〈比例〉

$$y = ax.$$

<u>重要なこと</u>

- $a=0$ か $a \neq 0$ か？
- a の符号.

〈変数を増やす〉

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, として

$$\vec{y} = A\vec{x}$$

とかいてみると比例によく似ている.

- A は何か？
- $A\vec{x}$ はどういう計算か？
- A のどのような情報が重要か？
- $\vec{x}$, $\vec{y}$ はベクトルとよんでいた.
  - ベクトルの性質は？どのような性質が重要？
  - どのように抽象化できるか？

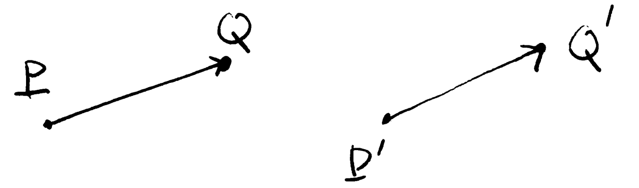
第1章　平面および空間のベクトル

数学は厳密さが重要！

しかし、この章は、厳密さより直観を優先することがある。

§1.1 平面と空間のベクトル

ベクトル：向きと長さの等しい矢印をすべて同じものとみたもの。



$$(\overrightarrow{PQ}) = (\overrightarrow{P'Q'})$$

$=: \vec{a}$ または $\mathbf{a}$

↑
太字

集合の記号を使って

$$\mathbb{R}^2 := \{\vec{a} : \vec{a}\text{ は平面のベクトル}\}$$

$$\mathbb{R}^3 := \{\vec{b} : \vec{b}\text{ は空間のベクトル}\}$$

↑
左を右で定める（定義する）

と書く。$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ と書いたら「$\mathbf{b}$は空間のベクトル」の意味。

座標 $P = (x, y, z)$, $Q = (x', y', z')$ に対し、

$$\vec{a} = (\overrightarrow{PQ}) = \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \\ z'-z \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

とかく。a, b, c を $\vec{a}$ の成分という。

図形

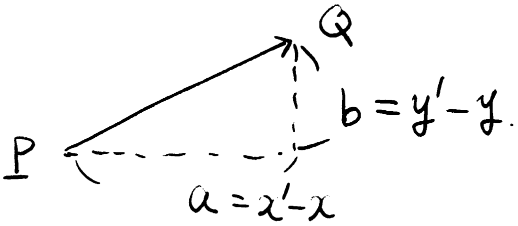
〈幾何的 意味〉

$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$

に対し.

$\vec{a}=\vec{b} \iff$ $a_1=b_1$ かつ $a_2=b_2$ かつ $a_3=b_3$

左と右が「同じ」ということ.



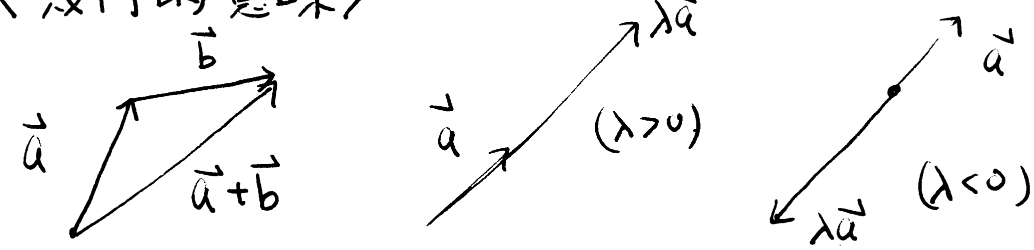
$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$, $\underline{\lambda\in\mathbb{R}}$ に対し 和とスカラー倍を

「実数λ」の意味

$$\vec{a}+\vec{b}:=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix},\quad \lambda\vec{a}:=\begin{pmatrix}\lambda a_1\\\lambda a_2\\\lambda a_3\end{pmatrix}$$

と定義する.

〈幾何的意味〉



$$\vec{0}:=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\quad \vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \text{ に対し } -\vec{a}:=\begin{pmatrix}-a_1\\-a_2\\-a_3\end{pmatrix}$$

とおく. $\vec{0}$ を零ベクトル, $-\vec{a}$ を $\vec{a}$ の逆ベクトル

という.

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を $\mathbb{R}^3$ の単位ベクトル ということがある

命題 1.1 $V = \mathbb{R}^2$ または $\mathbb{R}^3$ とする.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ に対し、次が成り立つ.

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \text{(交換法則)}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad \text{(結合法則)}$$

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

証明 交換法則のみ示す. $V = \mathbb{R}^3$ で考える.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ と成分でかくと

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ b_2 + a_2 \\ b_3 + a_3 \end{pmatrix} = \vec{b} + \vec{a}$$

証明終のイミ.

↓

□.

命題 1.2 $V = \mathbb{R}^2$ または $\mathbb{R}^3$.

$\vec{a}, \vec{b} \in V$, $c, d \in \mathbb{R}$ に対し. 次が成り立つ.

$$c(\vec{a} + \vec{b}) = c\vec{a} + c\vec{b}$$

$$(c + d)\vec{a} = c\vec{a} + d\vec{a}$$

$$(cd)\vec{a} = c(d\vec{a})$$

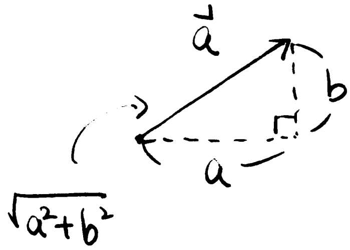
$$1\vec{a} = \vec{a}$$

証明は各自.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し. $\vec{a}$ の長さ $\|\vec{a}\|$ を

$\|\vec{a}\| := \sqrt{a^2+b^2}$

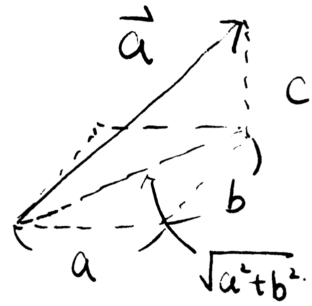
と定義する.



$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し. $\vec{a}$ の長さ $\|\vec{a}\|$ を

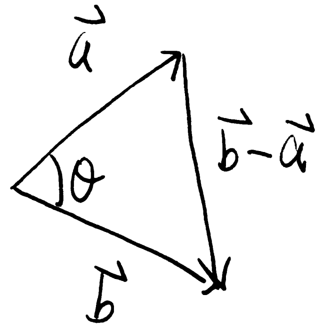
$\|\vec{a}\| := \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

と定義する.



〈余弦定理と内積〉

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ または $\mathbb{R}^3$ に対し. $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を $0 \leq \theta \leq \pi$ とすると



$$\|\vec{b}-\vec{a}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cos\theta$$

(余弦定理)

$$\therefore \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cos\theta = \frac{1}{2}\left(\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{b}-\vec{a}\|^2\right).$$

このとき. $(\vec{a}, \vec{b}) := \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cos\theta$ とかき.

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積という.

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$とし、$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$と成分でかくと $\vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$であり

$$\|\vec{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2, \quad \|\vec{b}\|^2 = b_1^2 + b_2^2, \quad \|\vec{b} - \vec{a}\|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2.$$

より

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}\left(\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - \|\vec{b} - \vec{a}\|^2\right) = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

命題1.3 $V = \mathbb{R}^2$または$\mathbb{R}^3$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$に対し、次が成り立つ。

$$\lambda(\vec{a}, \vec{b}) = (\lambda\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda\vec{b})$$

$$(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$$

$$|(\vec{a}, \vec{b})| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \quad \text{(Schwarzの不等式)}$$

$$\|\vec{a} + \vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| \quad \text{(三角不等式)}$$

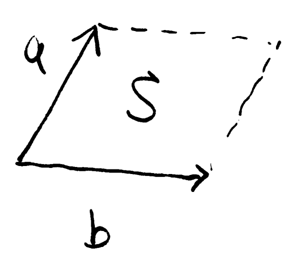
証明

上三つは、成分を計算。Schwarzの不等式と三角不等式は演習 □

命題1.4 $V = \mathbb{R}^2$または$\mathbb{R}^3$

$\vec{a}, \vec{b} \in V$に対し、$\vec{a}, \vec{b}$からつくられる平行四辺形の面積をSとすると

$$S = \sqrt{\|\vec{a}\|^2 \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2}$$

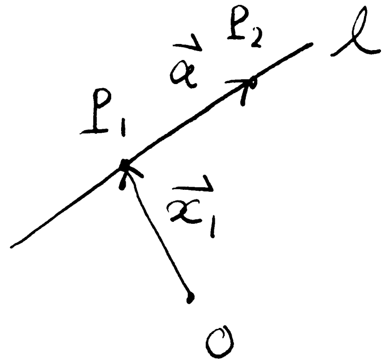


証明 演習で □

§1.2 直線と平面

〈平面上の直線〉

P_1, P_2 : 平面上の2点



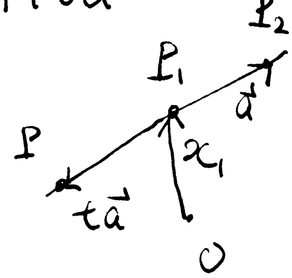
l : P_1, P_2 を通る直線

$\vec{x_1} := (\overrightarrow{OP_1})$, $\vec{a} := (\overrightarrow{P_1P_2})$

① 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $\vec{x_1} + t\vec{a}$ は l 上にある.

② 任意の l 上の点 P に対し. $(\overrightarrow{OP}) = \vec{x_1} + t\vec{a}$

となる $t \in \mathbb{R}$ が存在する.



よって直線 l は

$$l : \vec{x} = \vec{x_1} + t\vec{a} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と特徴付けできる. これを l のベクトル表示

または助変数表示, パラメータ表示という.

$t \in \mathbb{R}$ を助変数(パラメータ), $\vec{a}$ を l の

方向ベクトルという.

例　$3x+4y=2$ の表す直線をパラメータ表示してみる.

$\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ を通ることに注意すると.

$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ を方向ベクトルに

とることができて

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\qquad (t\in\mathbb{R})$$

とかける.

例　直線のパラメータ表示.

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\qquad (t\in\mathbb{R})$$

から直線の方程式を求めてみる. 成分でかくと

$$\begin{cases}x=1+3t\\y=3+2t\end{cases}$$

より. t を消去すると

$$(*)\qquad 2x-3y=-7$$

が求める方程式である(各自).

さて. 直線の方程式

$$l:\ ax+by=c$$

を考える. この直線に平行で原点を通る直線 l_0 は

$$l_0:\ ax+by=0$$

で与えられるが $\vec{n}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とかくと

$$l : (\vec{n}, \vec{x}) = c \quad , \quad l_0 : (\vec{n}, \vec{x}) = 0$$

となる. この式 $(\vec{n}, \vec{x})=0$ は $\vec{n}$ が l_0 と直交する,

従って l とも直交することを示している. $\vec{n}$ を l の

法線ベクトルという.

〈空間上の直線〉

空間内の直線についてもパラメータ表示は

平面上の直線と同様にかける. すなわち,

$\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ を方向ベクトルとしたとき. $\vec{x_1} \in \mathbb{R}^3$ を

通る直線 l は

$$l : \vec{x} = \vec{x_1} + t\vec{a} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

とかける.

<u>例</u> 方向ベクトルを $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ とする原点を

通る直線 l のパラメータ表示は

$$l : \vec{x} = t\vec{a} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

となる. $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ と成分でかくと.

$$(**) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 0 \\ x + z = 0 \end{array} \right.$$

が得られる。これが空間上の直線の方程式である。$\vec{n_1} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{n_2} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ とおくと(**)は

$$(\vec{n_1}, \vec{x}) = (\vec{n_2}, \vec{x}) = 0$$

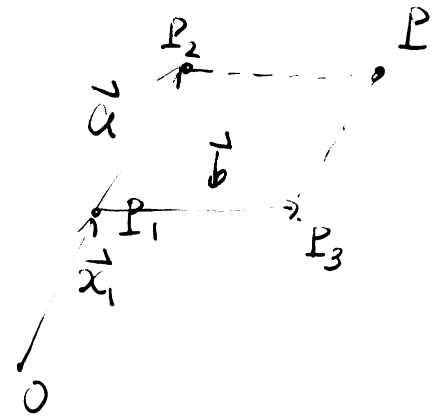
となるから直線ℓは$\vec{n_1}, \vec{n_2}$と直交する。

〈空間内の平面〉

空間上の3点P_1, P_2, P_3を通る平面Sのパラメータ表示を考える。ただしP_1, P_2, P_3は一直線上にはないとする。

$$\vec{x_1} = (\overrightarrow{OP_1}),\ \vec{a} = (\overrightarrow{P_1P_2}),\ \vec{b} = (\overrightarrow{P_1P_3})$$

とする。



(i) 任意の$t, s \in \mathbb{R}$に対し

$$\vec{x_1} + t\vec{a} + s\vec{b}$$

は平面S上にある。

(ii) 任意のS上の点Pに対し

$$(\overrightarrow{OP}) = \vec{x_1} + t\vec{a} + s\vec{b}$$

となる$t, s \in \mathbb{R}$が存在する。

よって平面Sは

$$S : \vec{x} = \vec{x_1} + t\vec{a} + s\vec{b} \qquad (t, s \in \mathbb{R}).$$

と特徴付けできる. これをSのベクトル表示, 助変数表示, パラメータ表示, という.

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$として. 成分表示してパラメータ$t, s$を消去すると

$$S : ax + by + cz = d$$

とかける(演習). この平面に平行で原点を通る平面S_0は

$$S_0 : ax + by + cz = 0$$

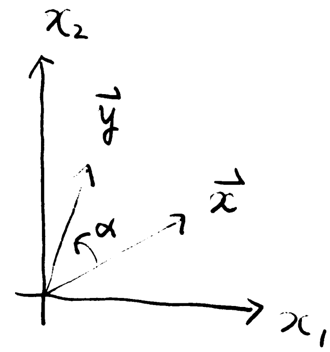
とかける. $\vec{n} := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$とおくと

$$S : (\vec{n}, \vec{x}) = d, \quad S_0 : (\vec{n}, \vec{x}) = 0$$

となるから$\vec{n}$はS_0と直交する. 従って $\vec{n}$はSとも直交する. $\vec{n}$をSの法線ベクトルという.

§§1.3 平面の回軸と行列.

〈平面の回転〉

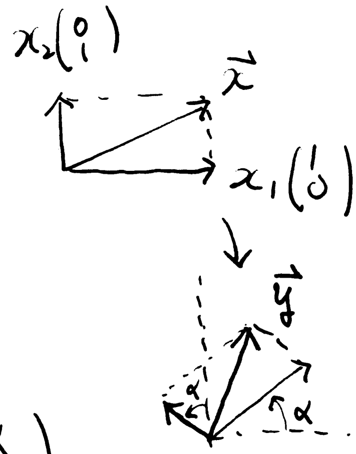


$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ を 原点 O を中心として.

角 α だけ回転した点を $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$(1) \quad \begin{cases} y_1 = (\cos\alpha) x_1 + (-\sin\alpha) x_2 \\ y_2 = (\sin\alpha) x_1 + (\cos\alpha) x_2 \end{cases}$$

となる.



<u>理由</u>

$\vec{x} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とかく.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を角 α だけ回転すると

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha) \\ \sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

だから

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\cos\alpha) x_1 + (-\sin\alpha) x_2 \\ (\sin\alpha) x_1 + (\cos\alpha) x_2 \end{pmatrix}$$

となる $\square$.

(1)の係数に注目して

$$(2) \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

とかく。すなわち(1)の右辺の係数をとりだして、四角に並べたものを考える。さらに $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ とかくと

(2)は

$$\vec{y} = A\vec{x}$$

とかける。このことを一般化する。

定義(行列)

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$ に対して

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

とかいたとき、A を行列という。$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ を行列の成分という。

(2)に注意すると、$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し、

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

となる。

命題3.1 (線形性)

A を行列, $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{R}$ に対し、次が成り立つ。

(1) $A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$

(2) $A(c\vec{x}) = cA\vec{x}$.

証明 (2)のみ示す. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$とかくと

$$A(c\vec{x}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ca_{11}x_1 + ca_{12}x_2 \\ ca_{21}x_1 + ca_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

$$= c\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = cA\vec{x}$$

□

〈行列のかけ算〉

行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\vec{z}=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

に対し

$$(3) \quad \begin{cases} y_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 \\ y_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} z_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ z_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{cases}$$

とすると $\vec{y}=B\vec{x}$, $\vec{z}=A\vec{y}$ とかくのだから代入して

$\vec{z} = A\vec{y} = A(B\vec{x})$ となる.

そこで. z_1, z_2をx_1, x_2で表してみると

$$z_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \overset{(3)}{=} a_{11}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2) + a_{12}(b_{21}x_1 + b_{22}x_2)$$
$$= (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})x_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})x_2$$

$$z_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = a_{21}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2) + a_{22}(b_{21}x_1 + b_{22}x_2)$$
$$= (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})x_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})x_2.$$

だから.

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

となる.

定義（行列のかけ算）

行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ に対し、行列の積 AB を

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$:=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

で定義する.

〈線形写像〉

定義（線形写像、線形変換）

任意の $\vec{x}\in\mathbb{R}^2$ に対し、ベクトル $\vec{y}=T\vec{x}\in\mathbb{R}^2$ を対応させる規則 T（このことを $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ とかく）が次をみたすとき、T を $\mathbb{R}^2$ 上の線形写像（線形変換）という：

- (i) 任意の $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^2$ に対し $T(\vec{x}+\vec{y})=T\vec{x}+T\vec{y}$
- (ii) 任意の $\vec{x}\in\mathbb{R}^2$, $c\in\mathbb{R}$ に対し $T(c\vec{x})=cT\vec{x}$.

A を行列とするとき、$\vec{x}\in\mathbb{R}^2$ に対して、$T_A\vec{x}=A\vec{x}\in\mathbb{R}^2$ を対応させる規則 $T_A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ は命題 3.1 により $\mathbb{R}^2$ 上の線形写像になる.

定理3.2

任意の$\mathbb{R}^2$上の線形写像 $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ に対し、
ある行列 Aが存在して、$T = T_A$ となる。つまり、
任意の$\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ に対し、$T\vec{x} = A\vec{x}$ となる。

証明 (存在を示すのだから、みつけてくればよい)

任意の $\mathbb{R}^2$上の線形写像 Tに対し、
$\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ について

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} := T\vec{e_1}, \quad \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} := T\vec{e_2}$$

と定めたとき、行列 $A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ が $T = T_A$ と

なることを示す。

任意の $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し、$\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2}$ と

かけるから

$$\begin{aligned} T\vec{x} &= T(x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2}) \\ &= T(x_1\vec{e_1}) + T(x_2\vec{e_2}) \\ &= x_1 T\vec{e_1} + x_2 T\vec{e_2} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} = A\vec{x} = T_A\vec{x} \end{aligned}$$

Tは線形

となる。よって $T = T_A$ が成り立つ。 □

§§1.4 三次行列と $\mathbb{R}^3$ 上の線形変換

この節は §§1.3 とほぼ同じ内容である.

定義 (線形写像)

任意の $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ に対し, ベクトル $\vec{y} = T\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ を対応させる規則 T (このことを $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ とかく) が次をみたすとき, T を $\mathbb{R}^3$ 上の線形写像 (線形変換) という.

(i) 任意の $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ に対し $T(\vec{x}+\vec{y}) = T\vec{x} + T\vec{y}$

(ii) 任意の $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, $c \in \mathbb{R}$ に対し $T(c\vec{x}) = cT\vec{x}$

定義 (行列)

$a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i,j = 1,2,3)$ に対し

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

とかいたとき, A を3次行列といい, a_{ij} を行列の (i,j) 成分という.

ベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, 行列 $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

に対して

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$:= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{3} a_{ik}b_{kj}\right)_{i,j}$$

と定義する.

例

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

に対し

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

他方

$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ や $A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ などの計算はできない.

命題4.1（線形性）

Aを3次行列, $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$, $c \in \mathbb{R}$に対し, 次が成り立つ.

(i) $A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$

(ii) $A(c\vec{y}) = cA\vec{y}$

証明は成分を計算すればよい.

Aを3次行列とするとき, 任意の$\vec{x} \in \mathbb{R}^3$に対し$T_A\vec{x} = A\vec{x} \in \mathbb{R}^3$と対応させる規則$T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$は命題4.1より$\mathbb{R}^3$上の線形写像となる.

定理4.2

任意の$\mathbb{R}^3$上の線形写像$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$に対し,

ある3次行列が存在して$T = T_A$となる.

証明

演習にまわす. $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$に対し,

平面での証明を手直しすればよい

$\square$

§§1.5 行列式とベクトル積

〈2次行列の行列式〉

定義

行列$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$に対し、Aの行列式 $\det A$ を

$$\det A := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

により定義する.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し.

$(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ とかくことにする

命題5.1

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$, 2次行列 A, Bに対し. 次が成り立つ.

(1) $k \in \mathbb{R}$が存在して $\vec{a} = k\vec{b}$ ならば $\det(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

(2) $\det(\vec{a}, \vec{b}) = -\det(\vec{b}, \vec{a})$

(3) $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{R}^2$に対し

$$\det(\vec{a}_1 + \vec{a}_2, \vec{b}) = \det(\vec{a}_1, \vec{b}) + \det(\vec{a}_2, \vec{b})$$

(4) $c \in \mathbb{R}$ に対し

$$\det(c\vec{a}, \vec{b}) = c\det(\vec{a}, \vec{b})$$

(5) $\det(AB) = \det A \det B$.

証明　(2)〜(4)は各自

(1)　(4)を使うと

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \det(k\vec{b}, \vec{b})$$
$$= k\det(\vec{b}, \vec{b}) = 0$$

(5)　$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$,　$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

とかくと

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

より

$$\det(AB) = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})$$
$$- (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})$$
$$= a_{11}a_{22}b_{11}b_{22} + a_{12}a_{21}b_{12}b_{21}$$
$$- a_{11}a_{22}b_{12}b_{21} - a_{12}a_{21}b_{11}b_{22}$$
$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})$$
$$= \det A \det B$$

□

命題1.4に注意すると、$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$ に対し

$|\det(\vec{a}, \vec{b})| =$ ($\vec{a}, \vec{b}$ からつくられる平行四辺形の面積)

がわかる。

〈ベクトルの外積〉

定義（外積）

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し、外積 $\vec{a} \times \vec{b}$ を

$$\vec{a} \times \vec{b} := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

で定義する。

命題5.2

$\vec{a}, \vec{a}', \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, $c \in \mathbb{R}$ に対し次が成り立つ。

(1) $\vec{a}$ と $(\vec{a} \times \vec{b})$ は直交する。

(2) $\vec{b}$ と $(\vec{a} \times \vec{b})$ は 〃 。

(3) $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = |$($\vec{a}$ と $\vec{b}$ から作られる平行四辺形の面積)$|$

(4) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

(5) $(c\vec{a} + \vec{a}') \times \vec{b} = c\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a}' \times \vec{b}$

証明　(3) のみ示す.

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2 = (a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2$$

$$= a_1^2(b_2^2+b_3^2)+a_2^2(b_1^2+b_3^2)+a_3^2(b_1^2+b_2^2)$$

$$-2a_2b_2a_3b_3-2a_1b_1a_3b_3-2a_1b_1a_2b_2$$

$$+a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2-a_1^2b_1^2-a_2^2b_2^2-a_3^2b_3^2$$

$$=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)$$

$$-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$

$$=\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2-(\vec{a},\vec{b})^2$$

$$=(\vec{a}\text{と}\vec{b}\text{から作られる平行四辺形の面積})^2 \qquad \square$$

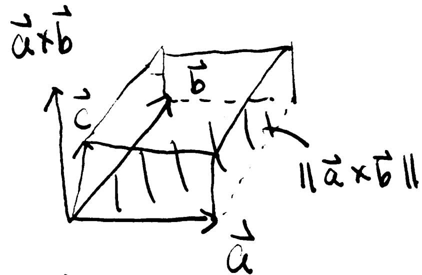
命題1.4

命題5.3

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbb{R}^3$ で作られる平行六面体の体積 V は

$$V=|(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})|$$

で与えられる.

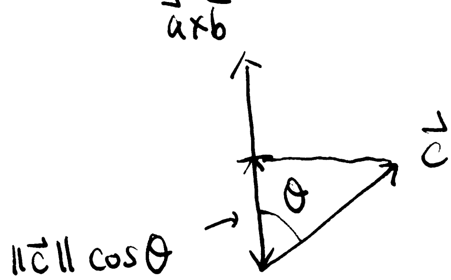


証明

$\vec{a}\times\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ とすると.

$$V=\big|\,\|\vec{a}\times\vec{b}\|\,(\|\vec{c}\|\cos\theta)\big|$$

$$=|(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})|. \qquad \square$$



〈3次の行列式〉

定義（行列式）

3次行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対し

$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ とおくとき.

Aの行列式 $\det A$ を

$$\det A = \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) := (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2, \vec{a}_3)$$

で定義する.

例

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

ここで

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

より $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 1.$

命題 5.4

$\vec{a}_1, \vec{a}, \vec{a}_2, \vec{a}_3 \in \mathbb{R}^3$, $c \in \mathbb{R}$ に対し. 次が成り立つ.

(1) $\det(\vec{a}_2, \vec{a}_1, \vec{a}_3) = (-1)\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ 他の交換も同様

(2) $\det(c\vec{a}_1 + \vec{a}, \vec{a}_2, \vec{a}_3) = c\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) + \det(\vec{a}, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$

$\vec{a}_2, \vec{a}_3$ についても同様.

証明　(1) のみ示す.

$$\det(\vec{a}_2, \vec{a}_1, \vec{a}_3) = (\vec{a}_2 \times \vec{a}_1, \vec{a}_3)$$

$$= (-\vec{a}_1 \times \vec{a}_2, \vec{a}_3)$$

命題5.2

$$= -(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2, \vec{a}_3)$$

命題1.3

$$= -\det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3) \quad \square$$

命題5.5

3次行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対し

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

証明

$$\det A = (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2, \vec{a}_3)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} \\ a_{31}a_{12} - a_{32}a_{11} \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \right)$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$\square$.

定理 5.6

行列 A, B に対し

$$\det(AB) = \det A \det B$$

証明は後期の「行列式」で行う.

定理 5.7

3次行列 A が次をみたすとする

「ある3次行列 B が存在して $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.」

このとき, $\det A \neq 0$.

証明

仮定より, ある3次行列 B がとれて,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とできる. 両辺行列式をとると定理 5.7 より

$$\det A \det B = \det(AB) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

となる. よって $\det A \neq 0$ となる. □

注意

定理 5.7 の逆, 「$\det A \neq 0$ ならば
ある3次行列 B が存在して $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$」

も成立する(後期でやる).

§ 集合と写像

定義（集合）

ある特定の性質をそなえた「もの」の集まりを集合という。

集合Aを構成する一つ一つの「もの」を集合Aの元，要素という。

例

$\mathbb{N} := \{n : n\text{は自然数}\}$ （Natural number）

$\mathbb{Z} := \{m : m\text{は整数}\}$ （Zahlen（独））

$\mathbb{Q} := \{q : q\text{は有理数}\}$ （Quotient）

$\mathbb{R} := \{x : x\text{は実数}\}$ （Real number）

$\mathbb{C} := \{z : z\text{は複素数}\}$ （Complex number）

$M_n(\mathbb{R}) := \{A : A\text{は}\mathbb{R}\text{係数}n\text{次行列}\}$ $(n=2,3)$

$$GL_n(\mathbb{R}) := \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) : {}^{\exists} B \in M_n(\mathbb{R})\text{が存在して } AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

定義

aが集合Aの元であるとき，$a \in A$ とかく

aが 〃 でないとき，$a \notin A$ とかく。

例

(i) $c \in \mathbb{R}$ は「cが$\mathbb{R}$の元である」ということ。よって，「cは実数」ということになる。

(ii) $A \in M_3(\mathbb{R})$は「Aが（$\mathbb{R}$係数）3次行列」ということ。

(iii) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ だが $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

定義

集合A, Bに対して $A \subset B$ と $A = B$ を次で定義する.

$$A \subset B \underset{\text{定義}}{\iff} \forall a \in A \text{ に対して } a \in B$$

∀ 任意の.

$$A = B \underset{\text{定義}}{\iff} A \subset B \text{ かつ } B \subset A$$

例

$$A = \{X \in M_3(\mathbb{R}) : \det X \neq 0\}$$

とすると, 定理 5.7は,

$\forall X \in GL_3(\mathbb{R})$ に対し $\det X \neq 0$, つまり $X \in A$

だから $GL_3(\mathbb{R}) \subset A$ と同じことをいっている.

実は, $A \subset GL_3(\mathbb{R})$ も成り立つ. 従って,

$$GL_3(\mathbb{R}) = \{X \in M_3(\mathbb{R}) : \det X \neq 0\}$$

となる.

定義 (写像)

集合 X, Y に対し, fが X から Y への写像であるとは,

$\forall x \in X$ に対し, $y \in Y$ を対応させる規則のことをいい,

$f : X \to Y$, $y = f(x)$ とかく.

例

$A \in M_3(\mathbb{R})$ に対し, $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$ に対し,

$T_A(\vec{x}) := A\vec{x}$ により定める.

定義 (全射, 単射)

集合 X, Y に対し $f: X \to Y$ が全射 であるとは,

$\forall y \in Y$ に対し, $\exists x \in X$ が存在して $y = f(x)$

が成り立つことをいう. $f: X \to Y$ が 単射 であるとは,

$\forall x_1, x_2 \in X$ に対し $f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$

が成り立つことをいう.

例

(i) $f: M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を $\forall X \in M_2(\mathbb{R})$ に対し $f(X) := \det X$

で定義すると, f は全射だが単射でない.

証明

(全射) $\forall y \in \mathbb{R}$ に対して, $f\left(\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = y$

(単射でない) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ で $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

だが $f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ □

(ii) $f: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ を $\forall X \in M_2(\mathbb{R})$ に対し,

$f(X) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X$ と定義すると, f は単射.

証明

$\forall X_1, X_2 \in M_2(\mathbb{R})$ に対し $f(X_1) = f(X_2)$ と仮定すると

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X_2$. 左から $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ をかけると

$X_1 = X_2$ となる □

第2章 行列

2次行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 3次行列 $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

これを一般化しよう. 以下 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする.

§2.1 行列の定義と演算

<u>定義(行列)</u>

$m, n \in \mathbb{N}$ に対し, $a_{ij} \in \mathbb{K}$ $\begin{pmatrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{pmatrix}$ をたてmコ, よこにnコの長方形に並べたものを $m \times n$ 行列という.

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{n\text{列}} \Big\} \ m\text{行}$$

a_{ij} を A の (i, j) 成分という.

横に一列に並んだ列を行(row), 縦に一列に並んだ列を列(column)という.

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} 1\text{列} & 2\text{列} & n\text{列} \\ (c1) & (c2) & (cn) \end{array} \end{array} \begin{array}{l} 1\text{行}\ (r1) \\ 2\text{行}\ (r2) \\ \\ n\text{行}\ (rn) \end{array}$$

$= (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ と略記する.

$m\times 1$ 行列 $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ を m 項列ベクトルという.

記号

$m, n \in \mathbb{N}$ に対し

$$M_{m,n}(\mathbb{K}) := \{A : A \text{ は } m\times n \text{ 行列}\}$$

とおく.

定義 (行列の等号)

$m, n \in \mathbb{N}$ と $A=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}$, $B=(b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ に対し

$$A=B \underset{\text{定義}}{\iff} 1\leq {}^\forall i\leq m,\ 1\leq {}^\forall j\leq n \text{ に対し } a_{ij}=b_{ij}$$

⑪ 行の数か列の数がちがうとき, 行列は等しくならない.

〈行列の和とスカラー倍〉

定義 (和, スカラー倍)

$n, m \in \mathbb{N}$ と $A=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}$, $B=(b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$,

$c\in\mathbb{K}$ に対し和 $A+B$ とスカラー倍 cA を

$$A+B := (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}},\quad cA := (ca_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq n}}$$

で定義する

例 $A=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq 3\\1\leq j\leq 2}}$, $B=(b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq 3\\1\leq j\leq 2}} \in M_{3,2}(\mathbb{K})$ に対し

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} \end{pmatrix}$$

定義

$m, n \in \mathbb{N}$ に対し $O = O_{m,n} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ を

$$O_{m,n} := \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{n\text{コ}} \Big\} m\text{コ}$$

と定める. $O = O_{m,n}$ を $m \times n$ 零行列 という.

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ に対し.

$-A = (-a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ とおく.

命題 1.1

$m, n \in \mathbb{N}$ に対し. 次が成り立つ.

- (i) $\forall A, B, C \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ に対し $(A+B)+C = A+(B+C)$ (結合法則)
- (ii) $\forall A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ に対し $A+B = B+A$ (交換法則)
- (iii) $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ に対し $A + O_{m,n} = O_{m,n} + A = A$.
- (iv) $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ に対し $A + (-A) = (-A) + A = O_{m,n}$.
- (v) $\forall A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $\forall c \in \mathbb{K}$ に対し $c(A+B) = cA + cB$
- (vi) $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $\forall c, d \in \mathbb{K}$ に対し $(c+d)A = cA + dA$
- (vii) $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $\forall c, d \in \mathbb{K}$ に対し $(cd)A = c(dA)$
- (viii) $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ に対し $1A = A$

証明は 成分を計算すればよい.

〈行列の積〉

定義（行列の積）　　ここが等しい

$\ell, m, n \in \mathbb{N}$ と $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le \ell}} \in M_{m,\ell}(\mathbb{K})$, $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le \ell \\ 1\le j\le n}} \in M_{\ell,n}(\mathbb{K})$

に対し. 行列の積 $AB = C = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ を

$1\le i\le m$, $1\le j\le n$ に対し

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^{\ell} a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{i\ell}b_{\ell j}$$

で定義する.

例

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ とすると

積 $AB \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ が定義できて

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 2 + 2\times 0 & 1\times 1 + 2\times 1 \\ 2\times 2 + 3\times 0 & 2\times 1 + 3\times 1 \\ 3\times 2 + 0\times 0 & 3\times 1 + 0\times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

しかし BA は定義できない（"Bの列数" $\neq$ "Aの行数"）

命題1.2（結合法則）

$k, \ell, m, n \in \mathbb{N}$. $A \in M_{k,\ell}(\mathbb{K})$, $B \in M_{\ell,m}(\mathbb{K})$,

$C \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ に対し

$$(AB)C = A(BC).$$

証明

1. (積が定義できて、行数、列数がそれぞれ等しいこと)

$AB \in M_{k,m}(\mathbb{K})$ より $(AB)C \in M_{k,n}(\mathbb{K})$

$BC \in M_{l,m}(\mathbb{K})$ より $A(BC) \in M_{k,n}(\mathbb{K})$

となり $(AB)C$ と $A(BC)$ はともに $k \times n$ 行列.

そこで $A = (a_{pq})_{\substack{1 \le p \le k \\ 1 \le q \le l}}$ $B = (b_{qr})_{\substack{1 \le q \le l \\ 1 \le r \le m}}$ $C = (c_{rs})_{\substack{1 \le r \le m \\ 1 \le s \le n}}$

とかき、任意の $1 \le i \le k$, $1 \le j \le n$ に対し $(AB)C$ と $A(BC)$ の (i,j) 成分を調べる.

2. AB の (p,r) 成分は $\sum_{q=1}^{l} a_{pq} b_{qr}$ より $(AB)C$ の (i,j) 成分は

$$\sum_{r=1}^{m}\left(\sum_{q=1}^{l} a_{iq} b_{qr}\right) c_{rj} = \sum_{r=1}^{m}\sum_{q=1}^{l} a_{iq} b_{qr} c_{rj}$$

3. BC の (q,s) 成分は $\sum_{r=1}^{m} b_{qr} c_{rs}$ より $A(BC)$ の (i,j) 成分は

$$\sum_{q=1}^{l} a_{iq}\left(\sum_{r=1}^{m} b_{qr} c_{rj}\right) = \sum_{r=1}^{m}\sum_{q=1}^{l} a_{iq} b_{qr} c_{rj}$$

となり、$(AB)C$ と $A(BC)$ の (i,j) 成分は等しい.

よって $(AB)C = A(BC)$ $\square$

命題 1.3 (分配法則) 省略 (演習)

〈単位行列〉

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

を Kronecker の delta という.

$$E_n = (\delta_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{K})$$

を n次 単位行列という.

命題 1.4

$m, n \in \mathbb{N}$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ に対し

$$AE_n = A, \qquad E_m A = A.$$

証明は各自.

〈行列の列ベクトル〉

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ に対し $\vec{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ を A の第 j 列ベクトルという

$A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2 \cdots \vec{a}_n)$ である. n項縦ベクトル $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\cdots$, $\vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ を n項単位ベクトル という.

命題 1.5

$l, m, n \in \mathbb{N}$, $A \in M_{m,l}(\mathbb{K})$, $B = (\vec{b}_1\ \vec{b}_2 \cdots \vec{b}_n) \in M_{l,n}(\mathbb{K})$

に対し

$$AB = (A\vec{b}_1\ \ A\vec{b}_2\ \cdots\ A\vec{b}_n).$$

証明 (演習)

定義（転置，随伴）

$m, n \in \mathbb{N}$. $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ に対し

$$\overline{A} := (\overline{a_{ij}})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

$$^tA := (a_{ij})_{\substack{1\le j\le n \\ 1\le i\le m}} \in \underline{M_{n,m}}(\mathbb{K})$$

たてとよこが入れかわる　　入れかわる

と定める. ^tA を A の転置行列, $\overline{^tA}$ を A の随伴行列という.
adjoint

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{n\text{列}} \Big\} m\text{行} \Rightarrow {}^tA = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{m\text{列}} \Big\} n\text{行}$$

命題1.7

$m, n, \ell \in \mathbb{N}$ に対し. 次が成り立つ.

(1) $^t(^tA) = A \quad (\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K}))$

(2) $^t(A+B) = {}^tA + {}^tB \quad (\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K}))$

(3) $^t(cA) = c\,{}^tA \quad (\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K}), \forall c \in \mathbb{K})$

(4) $^t(AB) = {}^tB\,{}^tA \quad (\forall A \in M_{m,\ell}(\mathbb{K}), \forall B \in M_{\ell,n}(\mathbb{K}))$

証明　(4) のみ示す．

$A=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\1\leq j\leq l}}$ ，$B=(b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq l\\1\leq j\leq n}}$ とおく．

$1\leq {}^\forall j\leq n$，$1\leq {}^\forall i\leq m$ に対し

$$(AB\text{ の }(i.j)\text{ 成分})=\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}$$

より

$$({}^t(AB)\text{ の }(j.i)\text{ 成分})=\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}$$

他方

${}^tA=(a_{ij})_{\substack{1\leq j\leq l\\1\leq i\leq m}}$　${}^tB=(b_{ij})_{\substack{1\leq j\leq n\\1\leq i\leq l}}$ より

より

$$({}^tB\,{}^tA\text{ の }(j.i)\text{ 成分})=\sum_{k=1}^{l}b_{kj}a_{ik}$$

$$=\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}=({}^t(AB)\text{ の }(j,i)\text{ 成分})$$

となり．成分はそれぞれ等しい　$\square$

〈行列の区分け〉

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&2&0\\0&1&0&-2\\\hline 0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&2\\0&-1&2&0\\\hline 0&0&-1&1\\0&0&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}1&0&-2&3\\0&-1&2&-2\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

これを 2次行列 $A_{ij}.B_{ij}$ $(1\leq i.j\leq 2)$ を用いて

$$\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}$$ とすると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}$$

がわかる(各自)、つまり、行列をより小さい小行列にわけてかけ算を計算した結果と等しくなる.

定理 1.8

行列 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1\ell} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{m\ell} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{\ell 1} & \cdots & B_{\ell n} \end{pmatrix}$$

と小行列に区分けして積 AB を

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{m1} & \cdots & C_{mn} \end{pmatrix}$$

と区分けしたとき、行列の積が定義できるならば

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{\ell} A_{ik}B_{kj}$$

となる. つまり、区分けしても、普通の行列の掛け算のように計算できる

例

$A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ を

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & {}^t\vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 & A_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & {}^t\vec{b}_2 \\ \vec{b}_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

とかく. ただし $a_1, b_1 \in \mathbb{K}$, $\vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{b}_2, \vec{b}_3 \in \mathbb{K}^{n-1}$

$A_4, B_4 \in M_{n-1,n-1}(\mathbb{K})$ である.

このとき

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 b_1 + {}^t\vec{a_2}\,\vec{b_3} & a_1\,{}^t\vec{b_2} + {}^t\vec{a_2}\,B_4 \\ \vec{a_3}\,b_1 + A_4\vec{b_3} & \vec{a_3}\,{}^t\vec{b_2} + A_4 B_4 \end{pmatrix}$$

となる. (演習).

§§2.2 正方行列と正則行列

$n \in \mathbb{N}$ に対し $M_n(\mathbb{K}) = M_{n,n}(\mathbb{K})$ とかく. つまり

$$M_n(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{K} \ (1 \le i, j \le n) \right\}$$

である. $n \times n$ 行列のことを n 次正方行列, n 次行列という.

$$O_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{n\text{列}} \Big\} n \text{行}, \quad E_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}}_{n\text{列}} \Big\} n \text{行} \quad (\text{空欄は}0)$$

とおくと $\mathbb{R}$ での 0 と 1 にだいたい対応している.

… しかしわり算ができない.

<u>定義(逆行列)</u>

$n \in \mathbb{N}$, $A \in M_n(\mathbb{K})$ に対し. $X \in M_n(\mathbb{K})$ が

A の逆行列

$$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \quad AX = XA = E_n.$$

補題

$n \in \mathbb{N}$, $A \in M_n(\mathbb{K})$, $X, Y \in M_n(\mathbb{K})$ は A の逆行列

$\Rightarrow X = Y$. つまり逆行列は存在すればただ1つ.

$$\because \quad X = XE_n \underset{\substack{\uparrow \\ Y\text{は逆行列}}}{=} X(AY) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{結合法則}}}{=} (XA)Y \underset{\substack{\uparrow \\ X\text{は逆行列}}}{=} E_n Y = Y$$

□

A の逆行列を A^{-1} とかく.

定義 (正則行列)

$A \in M_n(\mathbb{K})$ が逆行列を持つとき. A を正則行列という.

$$GL_n(\mathbb{K}) := \{A \in M_n(\mathbb{K}) : A\text{は正則行列}\}$$

とおく.

命題2.1

$n \in \mathbb{N}$ に対し, 次が成り立つ

(1) $A \in GL_n(\mathbb{K}) \Rightarrow A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K}), (A^{-1})^{-1} = A$

(2) $A, B \in GL_n(\mathbb{K}) \Rightarrow AB \in GL_n(\mathbb{K})$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

証明

(1) $A \in GL_n(\mathbb{K})$ より

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E_n$$

だから $(A^{-1})^{-1} = A$ となる.

(2) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) \underset{\text{結合法則}}{=} A(BB^{-1})A^{-1} = AE_nA^{-1} = AA^{-1} = E_n$

同様に $(B^{-1}A^{-1})(AB) = E_n$ も示せる(各自) $\square$

定義(対角行列)

$n \in \mathbb{N}$ に対し $A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$ となる n 次行列を

対角行列といい $A = \mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n)$ とかく.

命題 2.4

$n \in \mathbb{N}$, $A = \mathrm{diag}(a_1, \cdots, a_n)$ $(a_i \in \mathbb{K}, i = 1, \cdots, n)$

$A \in GL_n(\mathbb{K}) \underset{\text{同値}}{\iff} a_i \neq 0 \quad (i = 1, \cdots, n)$.

証明は演習

定義(トレース)

$n \in \mathbb{N}$. $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in M_n(\mathbb{K})$ に対し.

$$\mathrm{tr}\, A = \mathrm{tr} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

と定義する. $\mathrm{tr}\, A$ を A のトレース(trace)という.

命題 2.6

$n \in \mathbb{N}$, $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $c \in \mathbb{K}$ に対し. 次が成り立つ

(1) $\mathrm{tr}(cA) = c\,\mathrm{tr}\, A$

(2) $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}\, A + \mathrm{tr}\, B$

(3) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

証明は演習.

§§2.3 行列と線形写像

定義（線形写像）

$n, m \in \mathbb{N}$, $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ が線形写像

$\overset{\Longleftrightarrow}{\text{定義}}$ (i) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^n$ に対し $T(\vec{x}+\vec{y}) = T\vec{x} + T\vec{y}$

(ii) $\forall \vec{x} \in \mathbb{K}^n$, $\forall c \in \mathbb{R}$ に対し $T(c\vec{x}) = cT\vec{x}$.

例（演習書 p.105）

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し $f(\vec{x}) := \begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}$

で定めると f は線形写像となる.

証明

1. $\forall \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し.

$$f(\vec{x}+\vec{y}) = f\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_3+y_3)-(x_2+y_2) \\ (x_1+y_1)-(x_3+y_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_3-x_2 \\ x_1-x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_3-y_2 \\ y_1-y_3 \end{pmatrix} = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$

2. $\forall \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ に対し

$$f(\lambda\vec{x}) = f\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_3 - \lambda x_2 \\ \lambda x_1 - \lambda x_3 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_3-x_2 \\ x_1-x_3 \end{pmatrix} = \lambda f(\vec{x})$$

1. , 2. より f は線形写像となる $\square$

定理3.1 (表現行列)

$n, m \in \mathbb{N}$と線形写像 $T: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ に対し

$^\exists A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ が存在して

$$T\vec{x} = A\vec{x} \quad ({}^\forall x \in \mathbb{K}^n)$$

が成り立つ. この行列AをTの表現行列という.

証明

$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ として

$A := (T\vec{e}_1 . T\vec{e}_2 \cdots T\vec{e}_n)$ とおく. Aが表現行列

になることを示す.

${}^\forall \vec{x} \in \mathbb{K}^n$に対し $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$ とかくと

$$\begin{aligned} T\vec{x} &= T(x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n) \\ &= x_1 T\vec{e}_1 + x_2 T\vec{e}_2 + \cdots + x_n T\vec{e}_n \\ &= (T\vec{e}_1 \ T\vec{e}_2 \ \cdots T\vec{e}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= A\vec{x} \end{aligned}$$

Tは線形

□

§2.4 行列の基本変形

行列をより簡単な行列に変形するには？

記号 $n \in \mathbb{N}$, $1 \le i, j \le n$ に対し

$$E_{ij} := (\delta_{ki}\delta_{lj})_{\substack{1\le k\le n \\ 1\le l\le n}} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix} & \leftarrow i\text{行目} \\ \uparrow & \\ j\text{列目} & \end{array}$$

とおく．E_{ij}を行列単位という．

補題

$$E_{ij}E_{i'j'} = \begin{cases} E_{ij'} & (j=i') \\ O & (j\ne i') \end{cases}$$

(∵) $E_{ij}E_{i'j'}$ の (k,l) 成分は

$$\sum_{m=1}^{n} \delta_{ki}\underbrace{\delta_{mj}}_{\substack{m=j\text{のときだけ}1 \\ \text{他は}0}}\delta_{mi'}\delta_{lj'} = \delta_{ki}\delta_{ji'}\delta_{lj'}$$

$$= \delta_{ji'}\,(E_{ij'}\text{の}(k,l)\text{成分}).\ \square$$

定義（基本行列）

$n \in \mathbb{N}$, $1 \le i, j \le n$, $c \in \mathbb{R}$ に対し，次の行列を基本行列という．

$$P_n(i,j) := E_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji} \quad (i \ne j)$$

$$Q_n(i;c) := E_n + (c-1)E_{ii} \quad (c \ne 0)$$

$$R_n(i,j;c) := E_n + cE_{ij} \quad (i \ne j)$$

P, Q, Rは正則行列である（演習）

例（演習書p.25）

$$A=\begin{pmatrix}2&0&2&-4\\-6&-1&0&3\\1&0&1&-2\end{pmatrix}$$ とおく.

$$P_3(1,2)A \underset{\text{各自}}{=} \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&2&-4\\-6&-1&0&3\\1&0&1&-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-6&-1&0&3\\2&0&2&-4\\1&0&1&-2\end{pmatrix}$$ ←1行目と2行目が入れかわる

$$Q_3(2;c)A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&c&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&2&-4\\-6&-1&0&3\\1&0&1&-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&2&-4\\-6c&-c&0&3c\\1&0&1&-2\end{pmatrix}$$ ← 2行目がc倍

$$R_3(2,3;c)A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&c\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&2&-4\\-6&-1&0&3\\1&0&1&-2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&2&4\\-6+c&-1&c&3-2c\\1&0&1&-2\end{pmatrix}$$ ← 2行目に3行目のc倍を加える

$AP_4(i,j)$: i列目とj列目が入れかわる.

$AQ_4(i;c)$: i列目がc倍

$AR_4(i,j;c)$: i列目にj列目のc倍を加える. （各自）

定義（基本変形）

次の変形を基本変形という.

(i) 二つの行（または列）を入れかえる. $\begin{pmatrix} r_i \leftrightarrow r_j \ (\text{行}) \\ c_i \leftrightarrow c_j \ (\text{列}) \end{pmatrix}$

(ii) ある行（または列）に0でない数をかける $\begin{pmatrix} r_i \leftarrow c\,r_i \ (\text{行}) \\ c_i \leftarrow c\,c_i \ (\text{列}) \end{pmatrix}$

(iii) ある行に他のある行の定数倍を加える $\begin{pmatrix} r_i \leftarrow r_i + c\,r_j \ (\text{行}) \\ c_i \leftarrow c_i + c\,c_j \ (\text{列}) \end{pmatrix}$

定義（Hermite 標準形）

（エルミート）

$n, m \in \mathbb{N}$. $H \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ が Hermite 標準形

$\Longleftrightarrow$（定義）
- ある $1 \leq k \leq m$ に対し、H の第1行から第 k 行まではいずれも零ベクトルでなく、残りの行はすべて零ベクトル（横）
- $1 \leq i \leq k$ について第 i 行の成分を左からみたとき、0でない最初の成分を (i, q_i) 成分とすると

$$q_1 < q_2 < \cdots < q_k$$

（厳密には少しちがうが、これでよいことにする）

例（基本変形と Hermite 標準形）

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2 \leftarrow r_2 - r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 + 2r_2}]{\text{“=”ではない}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -5 & 2 \\ 0 & 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\xrightarrow[\substack{r_2 \leftarrow 3r_2 \\ r_3 \leftarrow 2r_3}]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -12 & -15 & 6 \\ 0 & 12 & 18 & 14 \end{pmatrix}$$

（4と6の最小公倍数を出している）

$$\xrightarrow[r_3 \leftarrow r_3 + r_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -12 & -15 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 20 \end{pmatrix}$$

$k=3$, $q_1 = 1$, $q_2 = 2$, $q_3 = 3$ の Hermite 標準形

注意

演習書 p.26 のポイントは正しくないし、解答の書き方もよくない。「各ステップごとに軸成分を1に直す」は、わり算と分数がでてきて、計算間違いのもと!!

例(演習書 p.27)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 5 & -1 & -2 & 6 & -8 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_1 \leftarrow r_1 + 2r_4 \\ r_2 \leftarrow r_2 + 5r_4 \\ r_3 \leftarrow r_3 + r_4}]{} \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 & -2 & 11 \\ 0 & 14 & 8 & 6 & 22 \\ 0 & 7 & 4 & 3 & 11 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

ひき算より
たし算の方が
ミスしにくい。

$$\xrightarrow[\substack{r_1 \leftrightarrow r_4 \\ r_2 \leftrightarrow r_3}]{} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 7 & 4 & 3 & 11 \\ 0 & 14 & 8 & 6 & 22 \\ 0 & 7 & 4 & -2 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3 \leftarrow r_3 - 2r_2 \\ r_4 \leftarrow r_4 - r_2}]{} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 7 & 4 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4 \leftrightarrow r_3]{} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 7 & 4 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$k=3$, $q_1=1$, $q_2=2$, $q_3=4$ のHermite標準形

$$\xrightarrow[c_3 \leftrightarrow c_4]{} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$k=3$, $q_1=1$, $q_2=2$, $q_3=3$ の Hermite標準形

㊟ Hermite標準形の k の値は基本変形でかわらない。

定義(階数)

$m, n \in \mathbb{N}$ に対し $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ を基本変形でHermite標準形としたとき、零ベクトルにならない行数 k を A の階数(rank)といい、$k = r(A)$ とか $k = \mathrm{rank}\, A$ とかく。

命題4.1

$n\in\mathbb{N}$, $A\in M_n(\mathbb{K})$, $XA=E_n$ となる $X\in M_n(\mathbb{K})$が存在

$\Longrightarrow A\in GL_n(\mathbb{K})$.

証明　$n\in\mathbb{N}$に関する帰納法. $n=1$のときは各自

$(n-1)$次行列で正しいと仮定する.

1. Aを基本変形する.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{行と列の}\\ \text{入れかえ}\\ (-1)\text{倍}}]{} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{かつ } a_{11}>0$$

$$\xrightarrow[\substack{r_2\leftarrow a_{11}r_2 \\ \vdots \\ r_n\leftarrow a_{11}r_n}]{} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11}a_{21} & \cdots & a_{11}a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{11}a_{n1} & \cdots & a_{11}a_{n1} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_2\leftarrow r_2-a_{21}r_1 \\ \vdots \\ r_n\leftarrow r_n-a_{n1}r_1}]{} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & \\ \vdots & A_1 & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_1\leftarrow \frac{1}{a_{11}}c_1]{} \begin{pmatrix} 1 & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ 0 & & \\ \vdots & A_1 & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_2\leftarrow c_2-a_{12}c_1 \\ \vdots \\ c_n\leftarrow c_n-a_{1n}c_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

よって $P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$, $A_1 \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ が存在して

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & {}^t\vec{0} \\ \vec{0} & A_1 \end{pmatrix}$$ とかける.

2. $A_1 \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$ を示す. 仮定より $XA = E_n$ だから

$E_n = (Q^{-1}XP^{-1})(PAQ)$ に注意して

$$Q^{-1}XP^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & (x_{12} \cdots x_{1n}) \\ \begin{pmatrix} x_{12} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} & X_1 \end{pmatrix}$$

とかくと

$$\begin{pmatrix} 1 & {}^t\vec{0} \\ \vec{0} & E_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & (x_{12} \cdots x_{1n}) \\ \begin{pmatrix} x_{12} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} & X_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & {}^t\vec{0} \\ \vec{0} & A_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & (x_{12} \cdots x_{1n})A_1 \\ \begin{pmatrix} x_{12} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} & X_1 A_1 \end{pmatrix}$$

となるから $X_1 A_1 = E_{n-1}$ となる. 帰納法の仮定より $A_1 \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$. 従って $\begin{pmatrix} 1 & {}^t\vec{0} \\ \vec{0} & A_1 \end{pmatrix}$ も正則となる (演習). よって

$$A = P^{-1} \begin{pmatrix} 1 & {}^t\vec{0} \\ \vec{0} & A_1 \end{pmatrix} Q^{-1}$$ も正則となる

□

定理4.2

$m,n\in\mathbb{N}$, $A\in M_{m,n}(\mathbb{K})$ に対し, $k\geq 0$ が存在して

$$A \xrightarrow[\text{基本変形}]{} \underbrace{\left.\begin{pmatrix} \overbrace{1 \ \ \ddots \ \ 1}^{k個} & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}\right\}n列}_{m行} =: F_{m,n}(k)$$

とできる. kは基本変形のしかたに依らずに定まる.

行列 $F_{m,n}(k)$ を行列Aの標準形といい,

kをAの階数(rank)という. $k=\mathrm{rank}\,A$ とかく.

証明はやらないで例をみることにする.

注意

(i) Hermite標準形で得られるrankと一致する.

(ii) この階数の定義がどう重要なのかはもっと先の話.

例(標準形の求め方)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ 5 & -1 & -2 & 6 & -8 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{先週の例}]{} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_1\leftarrow(-1)c_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_2\leftarrow c_2-3c_1 \\ c_4\leftarrow c_4-2c_4 \\ c_5\leftarrow c_5-6c_5}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_2 \leftarrow \frac{1}{7} c_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{c_3 \leftarrow c_3 - 3c_2 \\ c_4 \leftarrow c_4 - 4c_2 \\ c_5 \leftarrow c_5 - 11c_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[c_3 = -\frac{1}{5} c_3]{} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix} = F_{4,5}(3)$$

◎ Hermite標準形を求めてから標準形を求めた方が（分数を使わなくてすむというイミで）簡単.

命題4.3

$n \in \mathbb{N}$, $A \in M_n(\mathbb{K})$.

$$A \in GL_n(\mathbb{K}) \underset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} \operatorname{rank} A = n.$$

証明

1. $\Rightarrow$ を示す. $P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$ を $PAQ = F_{n,n}(k)$ となるようにとると PAQ も正則だから $k = n$ となる. そうでない, つまり $k < n$ だと PAQ は正則にならない.

2. $\Leftarrow$ を示す. $P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$ を $PAQ = F_{n,n}(n)$ をみたすようにとると, $F_{n,n}(n) = E_n$ より $A = P^{-1}Q^{-1}$, $P^{-1}, Q^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ より $A \in GL_n(\mathbb{K})$

□

とくに命題4.3の $\Leftarrow$ の証明で $A=P^{-1}Q^{-1}$ より

左から QP をかけると $QPA=E_n$ となる。よって $QP=A^{-1}$

であり、次がわかる。

命題4.4

$n\in\mathbb{N}$. $A\in GL_n(\mathbb{K})$

$\underset{同値}{\iff}$ 左基本変形のみで A を単位行列にできる。

〈正則行列の求め方〉

$n\in\mathbb{N}$, $A\in M_n(\mathbb{K})$ に対し

$$(A \mid E_n) \xrightarrow[\text{行基本変形}]{} (E_n \mid A^{-1})$$

途中でうまくいかなければ A は正則でない。

例　$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-2&-3&-4\\2&2&4\end{pmatrix}$ が正則かどうか調べ、

逆行列を求める。

$$(A \mid E_3)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\-2&-3&-4&0&1&0\\2&2&4&0&0&1\end{array}\right)$$

ここを0にする

$$\xrightarrow[\substack{r_2\leftarrow r_2+2r_1\\ r_3\leftarrow r_3-2r_1}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&2&2&1&0\\0&-2&-2&-2&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3\leftarrow r_3+2r_2]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&2&2&1&0\\0&0&2&2&2&1\end{array}\right)$$

ここを0にする

$$\xrightarrow[\mathbf{r}_1 \leftarrow 2\mathbf{r}_1]{} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 4 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{\mathbf{r}_1 \leftarrow \mathbf{r}_1 - 3\mathbf{r}_3 \\ \mathbf{r}_2 \leftarrow \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3}]{\text{ここを0にする}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 4 & \boxed{0} & -4 & -6 & -3 \\ 0 & 1 & \boxed{0} & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\mathbf{r}_1 \leftarrow \mathbf{r}_1 - 4\mathbf{r}_2]{\text{ここを0にする}} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & \boxed{0} & \boxed{0} & -4 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \boxed{0} & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{\mathbf{r}_1 \leftarrow \frac{1}{2}\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_3 \leftarrow \frac{1}{2}\mathbf{r}_3}]{} \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & & & -2 & -1 & \frac{1}{2} \\ & 1 & & 0 & -1 & -1 \\ & & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$\therefore$ $A \in GL_3(\mathbb{K})$ で $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

<u>例</u>　$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$ が正則か調べる.

$$(A \,\vdots\, E_2) = \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathbf{r}_2 \leftarrow \mathbf{r}_2 + 2\mathbf{r}_1]{} \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$(A \,\vdots\, E_2) \longrightarrow (E_2 \,\vdots\, B)$ と変形できないので

$A \notin GL_2(\mathbb{K})$.

§§2.5 連立方程式(Gaussの消去法)

$m,n\in\mathbb{N}$, $a_{ij}, b_i\in\mathbb{K}$ に対し,次の連立方程式を考える.

$$(1)\quad \begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases}$$

$A:=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m\end{pmatrix}$ とおくと.

(1)は

$$(2)\qquad A\vec{x}=\vec{b}$$

とかける.このとき.$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{array}\right)$ とおく.

$\tilde{A}$を(1)の拡大係数行列という.$\vec{\tilde{x}}:=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ -1\end{pmatrix}$ とおくと.(1)は

$$(3)\qquad \tilde{A}\,\vec{\tilde{x}}=\vec{0}$$

とかける.(3)の左から $P\in GL_m(\mathbb{K})$ をかけた

$$(4)\qquad P\tilde{A}\vec{\tilde{x}}=\vec{0}$$

と(3)は同値だから.左基本変形で$\tilde{A}$を簡単にしてみる.

例（解がただ1つ）

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

を考える。拡大係数行列は $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right)$

ここを0にする

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2 \leftarrow r_2 - r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - 2r_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 \leftarrow r_3 - r_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{array}\right) \cdots (*)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_1 \leftarrow r_1 + r_3 \\ r_2 \leftarrow r_2 - 3r_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1 \leftarrow 3r_1]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & -9 \\ 0 & -3 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1 \leftarrow r_1 + r_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & -3 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{array}\right)$$

これは $\begin{cases} 3x_1 = 12 \\ -3x_2 = 21 \\ x_3 = -8 \end{cases}$ と同じだから

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

注 (*)で $r_2 \leftarrow \frac{1}{3} r_2$ としてもよい。（分数がでてこないから）

注意（Gaussの消去法）

※1で $x_3=-8$ はわかっている。第2式より $-3x_2+3x_3=-3$

だから $-3x_2=-3-3x_3=-3-3(-8)=21$。よって $x_2=-7$。

第1式より $x_1+x_2-x_3=5$ だから、$x_1=5-x_2+x_3=5-(-7)+(-8)=4$。

よって $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -8 \end{pmatrix}$ としてもよい。この方法をGaussの消去法

という。

例（解が無限個）

$$\begin{cases} x_1+3x_2+8x_3=-9 \\ 3x_1+5x_2+2x_3=-1 \\ x_1+x_2-3x_3=4 \end{cases}$$

を考える。拡大係数行列は $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 8 & -9 \\ 3 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right)$。

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 8 & -9 \\ 3 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_1 \leftarrow r_1 - r_3 \\ r_2 \leftarrow r_2 - 3r_3}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 11 & -13 \\ 0 & 2 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 11 & -13 \\ 0 & 2 & 11 & -13 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 \leftarrow r_3 - r_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 11 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ここも0になった。

$$\xrightarrow[r_1 \leftarrow 2r_1 - r_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -17 & 21 \\ 0 & 2 & 11 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

これは $\begin{cases} 2x_1 \quad\quad -17x_3 = 21 \\ \quad\quad 2x_2 + 11x_3 = -13 \end{cases}$ と同じ. よって

分数がでないようにした.

$c \in \mathbb{R}$ に対し, $x_3 = 2c$ とすれば

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{21}{2} \\ -\frac{13}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 17 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix} c \quad (c \in \mathbb{R})$$

が解になる.

<u>例</u> (解がない)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 9x_3 = 4 \end{cases}$$

を考える. 拡大係数行列は $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & -9 & 4 \end{array}\right)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & -9 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_1 \leftarrow r_1 - 2r_2 \\ r_3 \leftarrow r_3 - 3r_2}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -9 & 3 \\ 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 8 & -24 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 8 & -24 & 4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 \leftarrow 3r_3 - 8r_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right)$$

これは

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ \quad\quad 3x_2 - 9x_3 = 3 \\ \quad\quad\quad\quad 0 = -12 \end{cases}$$

と同じ. よって $0 = -12$ は成り立たないから解はない.

※ 演習書 p.29−31 や p.24 の定理7.8 を覚えることより
そのもととなるアイデアを理解する方がはるかに重要!!

定義（斉次方程式）

$m, n \in \mathbb{N}$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ に対し

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

となる方程式．すなわち $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$ としたとき

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

となる一次方程式系を斉次一次方程式系という．
斉次一次方程式は必ず1つの解 $\vec{x} = \vec{0}$ をもつ．
これを自明解という．

定理 5.5

$n, m \in \mathbb{N}$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ に対し，$\mathrm{rank}\, A = r$
ならば斉次一次方程式系 $A\vec{x} = \vec{0}$ は $(n-r)$個
の非自明解 $\vec{x}_{r+1}, \cdots \vec{x}_n \in \mathbb{K}^n$ を持つ．
さらに $\vec{x}_{r+1}, \cdots, \vec{x}_n$ は線形独立である．すなわち
$\forall c_{r+1}, \cdots, c_n \in \mathbb{K}$ に対し

$$c_{r+1}\vec{x}_{r+1} + \cdots + c_n\vec{x}_n = \vec{0} \Rightarrow c_{r+1} = \cdots = c_n = 0.$$

証明の方針

1. 行基本変形で拡大係数行列 $(A \vdots \vec{0})$ を Hermite 標準形に変形する.

2. わり算をして, $1 \leq i \leq r$ に対し, (i, q_i) 成分を 1 にする. ただし, q_i は Hermite 標準形の定義にでてきたもの.

3. $x_{q_1} \cdots x_{q_r}$ 以外のどれかを 1, 残りを 0 とした方程式系 ($(n-r)$ 個作れる) の解を $\vec{x}_{r+1}, \cdots, \vec{x}_n$ とする. これが求めたいものになる

□

命題 5.9

$m, n \in \mathbb{N}$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$.

(NH) $\qquad A\vec{x} = \vec{b}$

(H) $\qquad A\vec{x} = \vec{0}$

$\vec{x}_0 \in \mathbb{K}^n$ が (NH) の解 $\Rightarrow$ (NH) の任意の解 $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$ に対して, (H) の解 $\vec{y} \in \mathbb{K}^n$ が存在して, $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{y}$ とかける.

証明

(NH) の任意の解 $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$ に対し $\vec{y} = \vec{x} - \vec{x}_0$ とする.

このとき $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{y}$ となる. さらに

$$A\vec{y} = A(\vec{x} - \vec{x}_0) = A\vec{x} - A\vec{x}_0 \overset{\text{(NH)の解}}{=} \vec{c} - \vec{c} = \vec{0}$$

より $\vec{y}$ は (H) の解となる.

□

§§2.6 内積とユニタリ行列

$n \in \mathbb{N}$. $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^n$ のとき, ${}^t\vec{x} \in M_{1,n}(\mathbb{K})$, $\vec{y} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$

だから $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ とおくと.

$${}^t\vec{x}\,\overline{\vec{y}} = (x_1 \cdots x_n)\begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix} = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i} \in \mathbb{K}$$

となる

定義(内積)

$n \in \mathbb{N}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ に対し, $\vec{x}$ と $\vec{y}$ の内積 $(\vec{x}, \vec{y})$ を

$$(\vec{x}, \vec{y}) = {}^t\vec{x}\,\overline{\vec{y}} = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n}$$

で定義する

命題 6.1

$n \in \mathbb{N}$, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{K}^n$, $c \in \mathbb{K}$ に対し, 次が成り立つ.

(1) $(\vec{x}+\vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$

(2) $(c\vec{x}, \vec{y}) = c(\vec{x}, \vec{y})$, $(\vec{x}, c\vec{y}) = \overline{c}(\vec{x}, \vec{y})$

(3) $(\vec{y}, \vec{x}) = \overline{(\vec{x}, \vec{y})}$

(4) $(\vec{x}, \vec{x})$ は 0 以上の実数で

$$(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \underset{\text{同値}}{\iff} \vec{x} = \vec{0}$$

証明　(3), (4) のみ示す. $\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ とかく.

(3)
$$(\vec{y},\vec{x})=\sum_{i=1}^{n} y_i\overline{x_i}=\sum_{i=1}^{n}\overline{\overline{y_i}\,\overline{\overline{x_i}}}$$
$$=\overline{\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i}}=\overline{(\vec{x},\vec{y})}$$

(4) $(\vec{x},\vec{x})=\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{x_i}=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\geq 0$ となる

($\Rightarrow$) $(\vec{x},\vec{x})=0$ のとき. $1\leq {}^\forall k\leq n$ に対し.

$$|x_k|^2\leq\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2=(\vec{x},\vec{x})\underset{\text{仮定}}{=}0$$ より $x_k=0$

よって $\vec{x}=\vec{0}$

($\Leftarrow$) 明らか (各自)

定義
$n\in\mathbb{N}$, $\vec{x}\in\mathbb{K}^n$ に対し
$$\|\vec{x}\|:=\sqrt{(\vec{x},\vec{x})}=\sqrt{|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2}$$
と定める. $\|\vec{x}\|$ を $\vec{x}$ の長さ, ノルム という.

命題 6.2 (Schwarz の不等式, 三角不等式)
$n\in\mathbb{N}$, $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{K}^n$ に対し. 次が成り立つ.

(1) $|(\vec{x},\vec{y})|\leq\|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|$ (Schwarzの不等式)

(2) $\|\vec{x}+\vec{y}\|\leq\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$ (三角不等式)

証明 (1) のみ示す.

$^\forall a, b \in \mathbb{K}$ に対し

$$0 \leq \|a\vec{x}+b\vec{y}\|^2 = (a\vec{x}+b\vec{y}, a\vec{x}+b\vec{y})$$
$$= |a|^2\|\vec{x}\|^2 + a\bar{b}(\vec{x},\vec{y}) + b\bar{a}\underbrace{(\vec{y},\vec{x})}_{\overline{(\vec{x},\vec{y})}} + |b|^2\|\vec{y}\|^2$$

となる. $a = \|\vec{y}\|^2$, $b = -(\vec{x},\vec{y})$ とおくと

$$0 \leq \|\vec{y}\|^4\|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2 \underbrace{\overline{(\vec{x},\vec{y})}(\vec{x},\vec{y})}_{=|(\vec{x},\vec{y})|^2} - \|\vec{y}\|^2 (\vec{x},\vec{y})\overline{(\vec{x},\vec{y})}$$
$$+ |(\vec{x},\vec{y})|^2\|\vec{y}\|^2$$

$$= \|\vec{y}\|^2 (\|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 - |(\vec{x},\vec{y})|^2)$$

$\|\vec{y}\| = 0$ のときは, 命題6.1より $\vec{y} = 0$. よって $(\vec{x},\vec{y}) = 0$ だから Schwarzの不等式は成り立つ.

$\|\vec{y}\| \neq 0$ のとき, $0 \leq \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 - |(\vec{x},\vec{y})|^2$ だから,

$|(\vec{x},\vec{y})|^2 \leq \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2$. 両辺平方根をとればよい. □

定義 (直交)

$n \in \mathbb{N}$, $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^n$ に対して

$\vec{x}$ と $\vec{y}$ が直交 $\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $(\vec{x},\vec{y}) = 0$.

命題 6.3

$m, n \in \mathbb{N}$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ とする.

(1) $^\forall\vec{x} \in \mathbb{K}^n$, $^\forall\vec{y} \in \mathbb{K}^m$ に対し $(A\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x}, {}^t\bar{A}\vec{y})$

(2) $B \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ が $^\forall\vec{x} \in \mathbb{K}^n$, $^\forall\vec{y} \in \mathbb{K}^m$ に対し

$(A\vec{x},\vec{y}) = (\vec{x}, B\vec{y})$ となるならば $B = {}^t\bar{A}$

証明

(1) $(A\vec{x},\vec{y}) = {}^t(A\vec{x})\overline{\vec{y}} = ({}^t\vec{x}\,{}^tA)\overline{\vec{y}} = {}^t\vec{x}\,({}^tA\overline{\vec{y}})$

$= {}^t\vec{x}\,(\overline{{}^t\bar{A}\vec{y}}) = (\vec{x}, {}^t\bar{A}\vec{y})$

(2) $\forall\vec{x}\in\mathbb{K}^n$, $\forall\vec{y}\in\mathbb{K}^m$ に対し (1)から

$(\vec{x}, {}^t\bar{A}\vec{y}) = (\vec{x}, B\vec{y})$ より $(\vec{x}, ({}^t\bar{A}-B)\vec{y}) = 0$。

とくに $\vec{x} = ({}^t\bar{A}-B)\vec{y}$ とすれば $\|({}^t\bar{A}-B)\vec{y}\| = 0$ だから

$({}^t\bar{A}-B)\vec{y} = \vec{0}$ となる. 問8.7 より ${}^t\bar{A} = B$ □

定義 (随伴行列, Hermite行列, ユニタリ行列)

$m, n\in\mathbb{N}$ とする

$A\in M_{m,n}(\mathbb{K})$ に対し $A^* := {}^t\bar{A}$ を随伴行列(adjoint)という.

$A\in M_n(\mathbb{K})$ に対し $A^* = A$ となる行列を Hermite行列

$A^* = A^{-1}$ となる行列をユニタリ行列という.

命題6.4

$n\in\mathbb{N}$, $A\in M_n(\mathbb{K})$ に対し, 次は同値.

(1) A はユニタリ行列, すなわち $A^* = A^{-1}$.

(2) $\forall\vec{x}\in\mathbb{K}^n$ に対し $\|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$

(3) $\forall\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{K}^n$ に対し $(A\vec{x}, A\vec{y}) = (\vec{x},\vec{y})$

(4) $A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)$ とかくと

$$(\vec{a}_i, \vec{a}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}.$$

証明

(1)⇒(2) $\forall \vec{x} \in \mathbb{K}^n$ に対し

$$\|A\vec{x}\|^2 = (A\vec{x}, A\vec{x}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{命題6.3}}}{=} (\vec{x}, A^*(A\vec{x})) \underset{\substack{\uparrow \\ (1)}}{=} (\vec{x}, E_n\vec{x}) = \|\vec{x}\|^2$$

平方根をとれば $\|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$.

(2)⇒(3) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^n$ に対し

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 \underset{\substack{\uparrow \\ (2)}}{=} \|A(\vec{x}+\vec{y})\|^2 = (A\vec{x}+A\vec{y}, A\vec{x}+A\vec{y})$$

$$= \|A\vec{x}\|^2 + (A\vec{x}, A\vec{y}) + \overline{(A\vec{x}, A\vec{y})} + \|A\vec{y}\|^2$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ (2)}}{=} \|\vec{x}\|^2 + (A\vec{x}, A\vec{y}) + \overline{(A\vec{x}, A\vec{y})} + \|\vec{y}\|^2$$

ここで $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + (\vec{x}, \vec{y}) + \overline{(\vec{x}, \vec{y})} + \|\vec{y}\|^2$

より

$$(\vec{x}, \vec{y}) + \overline{(\vec{x}, \vec{y})} = (A\vec{x}, A\vec{y}) + \overline{(A\vec{x}, A\vec{y})}.$$

よって $((\vec{x}, \vec{y})$ の実部$) = ((A\vec{x}, A\vec{y})$ の実部$)$ となる.

次に $\vec{x}$ のかわりに $i\vec{x}$ を代入すると $\overline{i(\vec{x}, \vec{y})} = -i\overline{(\vec{x}, \vec{y})}$ より

$$i\left((\vec{x}, \vec{y}) - \overline{(\vec{x}, \vec{y})}\right) = i\left((A\vec{x}, A\vec{y}) - \overline{(A\vec{x}, A\vec{y})}\right)$$

だから $((\vec{x}, \vec{y})$ の虚部$) = ((A\vec{x}, A\vec{y})$ の虚部$)$.

$$\therefore \quad (\vec{x}, \vec{y}) = (A\vec{x}, A\vec{y}).$$

(3)⇒(1) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{K}^n$ に対し.

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (A\vec{x}, A\vec{y}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{命題6.3}}}{=} (\vec{x}, A^*A\vec{y})$$

だから $(\vec{x}, (E_n - A^*A)\vec{y}) = 0$

とくに $\vec{x}=(E_n-A^*A)\vec{y}$ とすれば $\|(E_n-A^*A)\vec{y}\|^2=0$ だから

$(E_n-A^*A)\vec{y}=\vec{0}$. $\vec{y}$ は任意だったから 問8.7より

$A^*A=E_n$ となる. よって(命題4.1より)) $A^*=A^{-1}$

以上により (1), (2), (3) が同値となることがわかった.

(3) ⇒ (4) $1\leq {}^\forall i,j\leq n$ に対し. $\vec{e_j}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\leftarrow i$番目 と

すれば $A\vec{e_i}=\vec{a_i}$, $A\vec{e_j}=\vec{a_j}$ だから.

$$(\vec{a_i},\vec{a_j})=(A\vec{e_i},A\vec{e_j})\underset{(3)}{=}(\vec{e_i},\vec{e_j})=\delta_{ij}.$$

(4) ⇒ (3) ${}^\forall\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{K}^n$ に対し

$$\vec{x}=x_1\vec{e_1}+\cdots+x_n\vec{e_n},\quad \vec{y}=y_1\vec{e_1}+\cdots+y_n\vec{e_n}$$

とすれば

$$(A\vec{x},A\vec{y})=\left(A\left(\sum_{i=1}^n x_i\vec{e_i}\right),\ A\left(\sum_{j=1}^n y_j\vec{e_j}\right)\right)$$

$$=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i\bar{y_j}(A\vec{e_i},A\vec{e_j})$$

線形性 命題6.1

$$=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i\bar{y_j}(\vec{a_i},\vec{a_j})$$

$$=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_i\bar{y_j}(\vec{e_i},\vec{e_j})$$

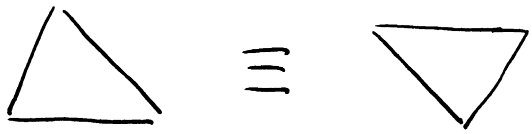
(4)

$$=\left(\sum_{i=1}^n x_i\vec{e_i},\sum_{j=1}^n y_j\vec{e_j}\right)=(\vec{x},\vec{y})$$

線形性 命題6.1

□

§§2.7 合同変換



2つの合同な三角形をベクトルを使って議論したい。

簡単のためにしばらく平面、つまり$\mathbb{R}^2$で考える。

定義（合同変換）

$T:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ が合同変換

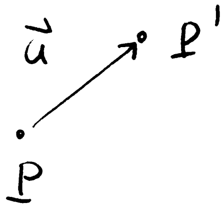
$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^2$ に対し $\underline{\|\vec{x}-\vec{y}\|=\|T\vec{x}-T\vec{y}\|}$

↑ 2点間のきょりをかえない

〈平行移動〉

$\vec{a}\in\mathbb{R}^2$ に対し

$T_{\vec{a}}:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ を



$$T_{\vec{a}}\vec{x}:=\vec{x}+\vec{a}\quad(\vec{x}\in\mathbb{R}^2)$$

と定めると $T_{\vec{a}}$ は合同変換である。

∵ $\forall\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^2$ に対し

$$\|T_{\vec{a}}\vec{x}-T_{\vec{a}}\vec{y}\|=\|(\vec{x}+\vec{a})-(\vec{y}+\vec{a})\|=\|\vec{x}-\vec{y}\|$$

$\square$

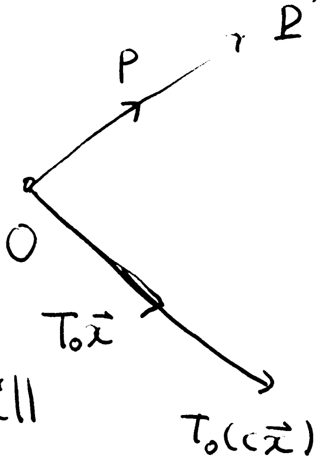
〈原点をうごかさない合同変換〉

$\vec{0}\in\mathbb{R}^2$ に対し $T_0\vec{0}=\vec{0}$ となる合同変換 $T_0:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を考える.

1. $\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^2$ に対し $\|T_0\vec{x}\| \underset{T_0\vec{0}=\vec{0}}{=} \|T_0\vec{x}-T_0\vec{0}\| \underset{T_0\text{は合同変換}}{=} \|\vec{x}-\vec{0}\| = \|\vec{x}\|$

となる. とくに $\vec{x}\neq\vec{0}$ なら $\|T_0\vec{x}\|\neq 0$.

2. $\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^2$, $\forall c\in\mathbb{R}$ に対し, $\overrightarrow{OP}=\vec{x}$, $\overrightarrow{OP'}=c\vec{x}$ とする.



$$\|T_0(c\vec{x})\| \underset{1.}{=} \|c\vec{x}\|$$
$$= |c|\,\|\vec{x}\|$$
$$\underset{1.}{=} |c|\,\|T_0\vec{x}\| = \|(c)T_0\vec{x}\|$$

となるから. $T_0(c\vec{x})=cT_0\vec{x}$ または $T_0(c\vec{x})=-cT_0\vec{x}$

しかし, $T_0(c\vec{x})=-cT_0\vec{x}$ はありえない

∵ $c=1$ とすると $T_0\vec{x}=-T_0\vec{x}$ となる. よって

$2T_0\vec{x}=\vec{0}$ となり $\|T_0\vec{x}\|\neq 0$ に矛盾する ∎

よって

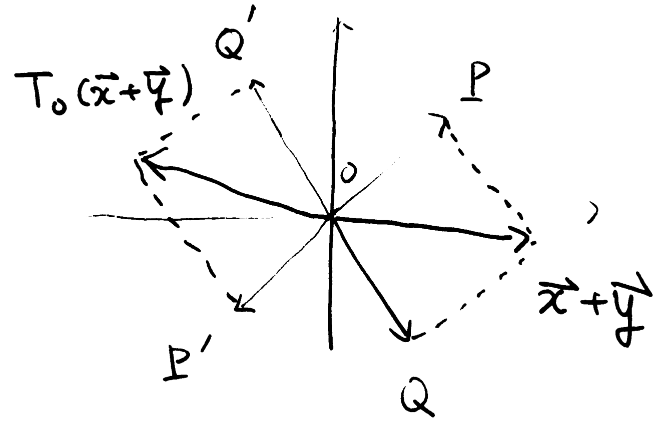
$$T_0(c\vec{x}) = cT_0\vec{x} \quad (\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \forall c \in \mathbb{R})$$

が成り立つ.

<u>3.</u> $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ に対し

$\overrightarrow{OP} = \vec{x}$, $\overrightarrow{OQ} = \vec{y}$

$\overrightarrow{OP'} = T_0\vec{x}$, $\overrightarrow{OQ'} = T_0\vec{y}$



とおくと三辺がそれぞれ等しいので $\triangle OPQ \equiv \triangle OP'Q'$. よって

$$\|T_0(\vec{x}+\vec{y})\| \underset{\underset{1}{\uparrow}}{=} \|\vec{x}+\vec{y}\| = \|T_0\vec{x} + T_0\vec{y}\|$$

<u>2.</u> と同じ理由により

$$T_0(\vec{x}+\vec{y}) = T_0\vec{x} + T_0\vec{y} \quad (\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2).$$

<u>2.</u> <u>3.</u> より $T_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は線形写像となる.

<u>1.</u> と命題 6.4. 定理 3.1 をくみあわせると.

あるユニタリ行列 $A \in M_2(\mathbb{R})$ が存在して.

$$T_0\vec{x} = A\vec{x} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^2)$$

とかける.

一般の合同変換 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は. 原点をうごかさない合同変換をしてから平行移動すれば得られる.

よって $\exists \vec{a} \in \mathbb{R}^2$ と $\exists$ユニタリ行列 $A \in M_2(\mathbb{R})$ が存在して

$$T\vec{x} = T_{\vec{a}}(A\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{a} \qquad (\vec{x} \in \mathbb{R}^2)$$

とかける．補助的に $\tilde{\vec{x}} := \begin{pmatrix} \vec{x} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{A} := \begin{pmatrix} A & \vec{a} \\ {}^t\vec{0} & 1 \end{pmatrix}$

とすると

$$\tilde{A}\tilde{\vec{x}} = \begin{pmatrix} A & \vec{a} \\ {}^t\vec{0} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\vec{x} + \vec{a} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T\vec{x} \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる．

定理 7.1

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を合同変換とすると $\exists \vec{a} \in \mathbb{R}^2$ と $\exists$ユニタリ行列 $A \in M_2(\mathbb{R})$ がとれて

$$\begin{pmatrix} A & \vec{a} \\ {}^t\vec{0} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{x} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T\vec{x} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2)$$

とかける．

〈一般線形群〉

$n \in \mathbb{N}$ に対し

$$GL_n(\mathbb{K}) := \{A \in M_n(\mathbb{K}) : A\text{は正則行列}\}$$

であった．$GL_n(\mathbb{K})$ は次の性質を持つ．

(0) $\forall A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ に対し $AB \in GL_n(\mathbb{K})$.

(1) $\forall A, B, C \in GL_n(\mathbb{K})$ に対し $(AB)C = A(BC)$ （結合法則）

(2) 単位行列 $E_n \in GL_n(\mathbb{K})$ が存在して．$\forall A \in GL_n(\mathbb{K})$ に対し
$AE_n = E_nA = A$

(3) $\forall A \in GL_n(\mathbb{K})$ に対し．逆行列 $B \in GL_n(\mathbb{K})$ が存在して $AB = BA = E_n$

(0)〜(3) をみたすとき、$GL_n(\mathbb{K})$ は行列のかけ算を演算として群をなすという。$GL_n(\mathbb{K})$ は一般線形群 (General Linear group) という。

注 $\mathbb{R}$ や $\mathbb{C}$ のかけ算も、(0)〜(3) と似た性質を持つ。
E_n のかわりに 1, $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ に対し、逆行列のかわりに $\frac{1}{a}$ を考えればよい。

〈ユニタリ群、直交群〉

$n \in \mathbb{N}$ に対し

$$U(n) := \{ A \in GL_n(\mathbb{C}) : A^*A = E_n \text{ (つまり}A\text{はユニタリ行列)} \}$$

$$O(n) := \{ A \in GL_n(\mathbb{R}) : A^*A = E_n \text{ (つまり}A\text{はユニタリ行列)} \}$$

とおく。問13.8より $U(n)$ や $O(n)$ も (0)〜(3) の性質をみたすことが示せる ($GL_n(\mathbb{K})$ を $U(n)$ や $O(n)$ にかえる) $U(n)$ をユニタリ群, $O(n)$ を直交群という。

〈合同変換群〉

$n \in \mathbb{N}$ に対し

$$G_n := \left\{ \begin{pmatrix} A & \vec{a} \\ {}^t\vec{0} & 1 \end{pmatrix} : A \in O(n),\ \vec{a} \in \mathbb{R}^n \right\}$$

とおく ($n=2$ は定理7.1)。G_n も (0)〜(3) の性質をみたしている ($\begin{pmatrix} A & \vec{a} \\ {}^t\vec{0} & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列は $\begin{pmatrix} {}^tA & -{}^tA\vec{a} \\ \vec{0} & 1 \end{pmatrix}$)

G_n を合同変換群という。

〈群を考える理由〉 (cf. wikipedia.jp)

(i) たし算やかけ算のもつ共通の性質を調べる(追求する)

(ii) 対称性(あるイミで美しさ)を数学の言葉に書きかえる

「比較」「計算」が考えられるようになる.

例 どんなルービックキューブについても元に戻すために必要な最小の手数は?」(神の数字)を求めることにも使われた.

(iii) 物事を抽象化して.みえるものを調べる.

(代数学幾何学B (11月〜). 数学入門CD.
代数学 etc...)

後期(11月〜)

ベクトルと行列を抽象化

⇒ 何が得られるか? みえるか?
何が得られないか?