代数学幾何学 A 演習問題 1　　2013 年 4 月 11 日

問題 1.1.
任意の $k > 0$ に対して, $x^2 + 4x - k = 0$ をみたす実数 x を求めよ.

問題 1.2.
「任意の $k > 0$ に対して, ある実数 x が存在して $x^2 + 4x - k = 0$」が成り立つことを示せ. 問題 1.1 と質問の仕方が微妙に異なる. 答案を書くときに, この違いが大きく影響することに注意せよ.

問題 1.3.
「ある実数 x が存在して, 任意の $k > 0$ に対して $x^2 + 4x - k = 0$」は正しいか？理由をつけて答えよ.
そして, 問題 1.2 と比較することで, 「任意」と「存在」の順序を入れかえると, どういうことがあるかを説明せよ.

問題 1.4.
「任意の実数 k に対して, ある実数 x が存在して $x^2 + 4x - k \neq 0$」は正しいか？理由をつけて答えよ.
そして, 「任意」や「存在」を否定するとどうなるかを説明せよ.

以下, 四角形 $ABCD$ に対して

$$p : \text{四角形 } ABCD \text{ は長方形}$$
$$q : \triangle ABC \equiv \triangle CDA$$

とする. $\Rightarrow$ は「ならば」と読む.

問題 1.5.
「$p \Rightarrow q$」を示せ. このとき, p を十分条件, q を必要条件という.

問題 1.6.
「$q \Rightarrow p$」は正しいか？理由をつけて答えよ. 「$q \Rightarrow p$」を「$p \Rightarrow q$」の逆という.
また, 一般に「$Q \Rightarrow P$」が成り立たない (つまり否定が成り立つ) とはどういうことかを説明せよ.

問題 1.7.

$$r : \text{四角形 } ABCD \text{ は○○○}$$

とする. 「$q \Rightarrow r$」と「$r \Rightarrow q$」がともに成り立つような四角形の条件「○○○」をみつけよ.
一般に「$Q \Rightarrow R$」と「$R \Rightarrow Q$」がともに成り立つとき, 「$Q \Leftrightarrow R$」と書き, Q と R は同値であるという.

問題 1.8.

任意の実数 c_1, c_2 に対して, 次は成り立つか？理由をつけて答えよ.

(1) $c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow c_1 = c_2 = 0.$

(2) $c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow c_1 = c_2 = 0.$

問題 1.9 (微分積分学の問題)**.**

$\varepsilon = 0.01$ としたときに, 次をみたす自然数 N_0 をみつけよ

$$\text{任意の自然数}\ n\ \text{に対して}\ n \geq N_0 \Longrightarrow \left| \frac{2n}{n+2} - 2 \right| < \varepsilon.$$

注意.

この問題は $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+2} = 2$ を定義にもとづいて示すこととほとんど同じである. いずれ, 微分積分学で ε-δ 論法 (ε-N 論法) を学ぶであろう.

代数学幾何学 A 演習問題 2　　2013 年 4 月 18 日

問題 2.1 から問題 2.5 までは, ベクトルの内積などについて, 成分を用いずに示せ. つまり, 問題 2.6 を用いずに計算すること.

問題 2.1.

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ に対して,

$$\|\boldsymbol{a}\|^2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}), \quad \|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + \|\boldsymbol{b}\|^2$$

を示せ.

問題 2.2.

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ とする.

(1) $(3\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}) - (3\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}) + 2(7\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})$ を簡単にせよ.

(2) $\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2)$ を示せ.

問題 2.3.

$t \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ とする.

(1) $\|t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2$ を t の多項式として表せ.

(2) $\|t\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 \geq 0$ と二次方程式の判別式を用いて, Schwarz の不等式

$$\left|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\right| \leq \|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\|$$

を示せ.

問題 2.4.

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ とする.

(1) 問題 2.1 と Schwarz の不等式を用いて, 三角不等式

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$$

を示せ.

(2) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}$ を用いて

$$\left|\|\boldsymbol{a}\| - \|\boldsymbol{b}\|\right| \leq \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|$$

を示せ.

問題 2.5.

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ は零ベクトルではないとする.

(1) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ のなす角を $0 \leq \theta \leq \pi$ とする. $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ から作られる三角形の面積を $\|\boldsymbol{a}\|$, $\|\boldsymbol{b}\|$, θ を用いて表せ (答えのみでよい).

(2) $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ から作られる平行四辺形の面積を S とするとき,

$$S^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 \cdot \|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2$$

を示せ.

問題 2.6.

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して, 内積 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\| \cos\theta$ を成分を用いて表せ.

問題 2.7.

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ とする. 次を求めよ.

(1) $2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{c}$.

(2) $\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}\|$.

問題 2.8.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ との交角が $\dfrac{\pi}{6}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ との交角が $\dfrac{\pi}{4}$ となる, 長さ 1 のベクトルを求めよ.

問題 2.9.

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ から作られる平行四辺形の面積を $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の成分を用いて表せ.

代数学幾何学 A 演習問題 3　　2013 年 4 月 25 日

問題 3.1.

次の方程式を表す平面上の直線をパラメータ表示せよ.

(1) $2x+3y=4$.

(2) $x=3$.

問題 3.2.

次の直線を表す方程式を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$.

(2) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$.

問題 3.3.

一次方程式系

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 3x+2y+z=-1 \end{cases}$$

の表す直線をパラメータ表示せよ.

問題 3.4.

方程式 $2x-y+3z=1$ の表す空間内の平面をパラメータ表示せよ.

問題 3.5.

パラメータ表示が

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t, s \in \mathbb{R})$$

となる平面の方程式を求めよ. また, その平面の法線ベクトルを求めよ.

問題 3.6.

空間内の 3 点 P_1, P_2, P_3 が一直線上にないとはどういうことかをベクトルを用いて表したい. 以下, $\boldsymbol{x}_1 = \overrightarrow{OP_1}$, $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{P_1P_3}$ とする.

(1) P_1 を通り, 方向ベクトルを $\boldsymbol{a}$ とする直線 l をパラメータ表示せよ.

(2) $\overrightarrow{OP_3} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{b}$ に注意して, P_3 が直線 l 上にあるときの条件を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を用いて表せ.

問題 3.7.

二つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$ が線形従属であるとは, $t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ となる $t=s=0$ でない $t, s \in \mathbb{R}$ が存在することをいう.

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ が線形従属であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OP}$, $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OQ}$ とする. このとき, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が線形従属となるとき, 点 O, P, Q のみたすべき条件を述べよ.

問題 3.8.

平面のパラメータ表示から平面の方程式を求めよう. 以下, 話を簡単にするために, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ に対して, 原点を通る平面

$$\boldsymbol{x} = t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b} \quad (t, s \in \mathbb{R})$$

を考える.

(1) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ と成分表示したとき, 平面のパラメータ表示を成分で表せ.

(2) パラメータ t を消去した方程式を 2 つ作れ. ただし, 割り算は自由に使ってもよいとする.

(3) (2) で得られた方程式の s の係数をそれぞれ A, B とおき, パラメータ s を消去した方程式を作れ. ただし, 割り算は自由に使ってもよいとする.

注意.

問題 3.8 で割り算をしてよいかどうかは「P_1, P_2, P_3 が一直線上にない」という仮定をもう少し深く考える必要がある.

問題 3.9.

原点を通る平面上の直線の方程式

$$l : ax + by = 0$$

を考える.

(1) 直線 l のパラメータ表示を求めて方向ベクトル $\boldsymbol{a}$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a}$ と直線 l の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ が直交することを示せ.

問題 3.10.

原点を通る空間上の平面の方程式

$$S : ax + by + cz = 0$$

を考える.

(1) S のパラメータ表示

$$S : \boldsymbol{x} = t\boldsymbol{a} + s\boldsymbol{b} \quad (t, s \in \mathbb{R})$$

を求めよ. このときに $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交するように選べるとなおよい.

(2) (1) で求めた $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ と平面 S の法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ が直交することを示せ.

代数学幾何学 A 演習問題 4　　2013 年 5 月 2 日

問題 4.1.

次の計算をせよ.

(1) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 　 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

問題 4.2.

行列 A, B に対して, 積 AB と BA は一般には等しくならない. つまり, 行列の積は交換可能ではない.

(1) $AB = BA$ となる行列 A, B の例を作れ.
(2) $AB \neq BA$ となる行列 A, B の例を作れ.

問題 4.3.

次の問いに答えよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ と $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して, $\boldsymbol{y} = T_A\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$ を図示することで, T_A がどのような変換となるかを説明せよ.
(2) $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ を x_2 軸に関する対称点へ移す変換を表す行列 B を求めよ.

問題 4.4.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して, $A\boldsymbol{x}_1$, $A\boldsymbol{x}_2$ を計算し, $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $A\boldsymbol{x}_1$, $A\boldsymbol{x}_2$ を平面に図示せよ. A から定まる線形変換 T_A はどのような変換となるか?

問題 4.5.

行列 A, B, C に対して, $(AB)C = A(BC)$ を示せ.

問題 4.6.

ベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ は $\|\boldsymbol{a}\| = 1$ をみたすとする. 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$T\boldsymbol{x} := (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$$

で定める. T が $\mathbb{R}^2$ 上の線形写像であることを示せ. この線形写像 T を $\boldsymbol{a}$ への射影という.

問題 4.7.

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ は $\|\boldsymbol{a}\| = 1$ をみたすとする. $\boldsymbol{a}$ への射影 T について, $T = T_A$ となる行列 A を求めよ.

問題 4.8.

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ は $\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\| = 1$ かつ $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ をみたすとする. T を $\boldsymbol{a}$ への射影, S を $\boldsymbol{b}$ への射影とする.

(1) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して, $TS\boldsymbol{x} = ST\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を示せ.

(2) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して, $T^2\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{x}$ を示せ.

代数学幾何学 A 演習問題 5　　2013 年 5 月 9 日

問題 5.1.

次の計算をせよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 10 & 8 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -8 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

問題 5.2.

次の行列式を計算せよ.

$$\det\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \det\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

問題 5.3.

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$, $c \in \mathbb{R}$ に対して, 次を示せ.

(1) $\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = -\det(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$

(2) $\det(c\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = c\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

問題 5.4.

A を 3 次行列, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$, $c \in \mathbb{R}$ とする.

(1) $A(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y}$ を示せ.

(2) $A(c\boldsymbol{x}) = cA\boldsymbol{x}$ を示せ.

問題 5.5.

任意の $\mathbb{R}^3$ 上の線形写像 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ に対して, ある 3 次行列 A が存在して, 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ について $T\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}$ とできることを示せ.

問題 5.6.

ベクトル $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ は $\|\boldsymbol{a}\| = 1$ をみたすとする. 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して, $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$T\boldsymbol{x} := (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$$

で定める. T が $\mathbb{R}^3$ 上の線形写像であることを示せ. この線形写像 T を $\boldsymbol{a}$ への**射影**という.

問題 5.7.

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ は $\|\boldsymbol{a}\| = 1$ をみたすとする. $\boldsymbol{a}$ への射影 T について, $T = T_A$ となる行列 A を求めよ.

問題 5.8.

ベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ は $\|\boldsymbol{a}\| = 1$ をみたすとする．任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して，$S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$S\boldsymbol{x} := \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$$

で定める．S が $\mathbb{R}^3$ 上の線形写像であることを示し，$S = S_B$ となる行列 B を求めよ．(ヒント: 行列 B を求めるには T を $\boldsymbol{a}$ への射影としたときに，$T\boldsymbol{x} + S\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ となることを使うと簡単)

問題 5.9 (Cramer の公式)**.**

行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ は $\det A \neq 0$ とする．$b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ に対して，連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{5.1}$$

を考える．このとき，

$$x_1 = \frac{\det\begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}}{\det A}, \qquad x_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix}}{\det A}$$

が (5.1) の解になることを示せ．

問題 5.10.

行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ は $\det A \neq 0$ とする．

(1) 次をみたす $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} \in \mathbb{R}$ を求めよ．

$$\begin{cases} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1 \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 0 \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 1 \end{cases}$$

(2) $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ とするとき，$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となることを確かめよ．

代数学幾何学 A 演習問題 6　　2013 年 5 月 16 日

問題 6.1.

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ に対して, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ が直交することを示せ.

問題 6.2.

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}', \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$, $c \in \mathbb{R}$ に対して次を示せ.

(1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$.

(2) $(c\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}') \times \boldsymbol{b} = c\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}' \times \boldsymbol{b}$.

問題 6.3.

次の行列式を計算せよ.

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

問題 6.4.

次の行列式を計算せよ.

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

問題 6.5.

$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ を計算して, $\det\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}\right)$ を直接計算せよ (講義ノートの定理 5.6 を使わずに計算せよ). そして, 問題 6.3, 6.4 を用いて,

$$\det\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}\right) = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

が成立していることを確かめよ.

問題 6.6.

行列 $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について, $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる 3 次行列 B が存在しないことを示せ.

問題 6.7.

行列 $A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ に対して, ${}^tA := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ を A の転置行列という. $\det({}^tA) = \det A$ を示せ.

問題 6.8.

問題 6.3 を用いて $\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ を求めよ．さらに, $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる 3 次行列 B を求めよ.

問題 6.9 (問題 4.4 を参照)**.**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) $\det A$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ によって作られる平行四辺形の面積を求めよ.

(3) $A\boldsymbol{x}_1$, $A\boldsymbol{x}_2$ によって作られる平行四辺形の面積を求めよ.

代数学幾何学 **A** 演習問題 **7**　　2013 年 5 月 23 日

問題 7.1.

次は正しいか否か答えよ.

(1) $9 \in \mathbb{C}$

(2) $\sqrt{3} \in \mathbb{Z}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R})$

問題 7.2.

$\boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^3$ を通り, 向きが $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ となる直線 l 上の点全体の集合を集合の記法を用いて表せ.

問題 7.3.

$X := \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ とおく. つまり, 正の偶数全体である. $f : \mathbb{N} \to X$ を任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $f(n) := 2n$ により定義する. このとき, f が全単射になることを示せ.

問題 7.4.

$A \in GL_3(\mathbb{R})$ とする. $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$T_A\boldsymbol{x} := A\boldsymbol{x}$$

により定義する. このとき T_A が単射となることを示せ.

問題 7.5.

$A \in GL_3(\mathbb{R})$ とする. $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$T_A\boldsymbol{x} := A\boldsymbol{x}$$

により定義する. このとき T_A が全射となることを示せ.

問題 7.6.

集合 X, Y, Z, $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ に対して, 合成写像 $g \circ f : X \to Z$ を, 任意の $x \in X$ に対して

$$g \circ f(x) := g(f(x))$$

で定義する. $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ と $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して $(T_A \circ T_B)(\boldsymbol{x})$ を計算せよ. ただし, T_A, T_B は問題 7.4 で定義されたものとする.

問題 7.7.

$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ に対して

$$T\boldsymbol{x}:=\begin{pmatrix}1&2&-1\\5&1&1\\0&-3&2\end{pmatrix}\boldsymbol{x}$$

により定義する.

(1) $T\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}$ を計算せよ.

(2) T が単射でないことを示せ.

問題 7.8.

$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を線形写像とする.

(1) T が単射ならば次が成り立つことを示せ.

$$\text{任意の } \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 \text{ に対して, } T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \text{ ならば } \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.$$

(2) 任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ に対して, $T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ が成り立つとき, T が単射になることを示せ.

問題 7.9.

$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ を線形写像とし,

$$\operatorname{Ker}T:=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3:T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$$

と定義する (T の核 (kernel) という). 任意の $c\in\mathbb{R}$ と任意の $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in\operatorname{Ker}T$ に対して $c\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{2}}\in\operatorname{Ker}T$ を示せ.

問題 7.10.

$A\in M_3(\mathbb{R})$ に対して, T_A は問題 7.4 で定義されたものとする.

(1) T_A が全射ならば単射となることを示せ (ヒント: $A\in GL_3(\mathbb{R})$ を示せ).

(2) 問題 7.7 の T が全射でないことを示せ.

代数学幾何学 A 演習問題 8　　2013 年 5 月 30 日

以下, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする.

問題 8.1.

次の行列の積を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$, 　ただし, $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位である.

(4) $\begin{pmatrix} 2 & 1-i & 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \\ -3i \end{pmatrix}$

問題 8.2.

次の行列の積は定義できるか？定義できるなら計算し, 定義できないなら, 理由を述べよ.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \\ -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1-i & 3i \end{pmatrix}$, 　ただし, $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位である.

問題 8.3.

$m, n \in \mathbb{N}$ とする. 次の分配法則を証明せよ (ヒント: 面倒くさがらずに, 全部書いた方がよい).

(1) $A \in M_{m,l}(\mathbb{K})$, B, $C \in M_{l,n}(\mathbb{K})$ に対して, $A(B+C) = AB + AC$.

(2) A, $B \in M_{m,l}(\mathbb{K})$, $C \in M_{l,n}(\mathbb{K})$ に対して,$(A+B)C = AC + BC$.

問題 8.4.

$m, n, l \in \mathbb{N}$ と $A \in M_{m,l}(\mathbb{K})$, $B \in M_{l,n}(\mathbb{K})$, $c \in \mathbb{K}$ に対して

$$c(AB) = (cA)B = A(cB)$$

が成り立つことを示せ.

問題 8.5.

$A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ で, 次が成り立つものが存在することをそれぞれ示せ[1]. 実際に成り立つことも確かめよ.

(1) $A \neq O_2$ かつ $A^2 = O_2$
(2) $A \neq E_2$ かつ $A^2 = E_2$

問題 8.6.

$m \in \mathbb{N}$ と $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) 行列の積 AA が定義できることを示し, 行列の型 (つまり行の数と列の数) を求めよ. このとき $A^2 := AA$ と定義する.
(2) 積 A^2A が定義できることを示せ. このとき, 結合法則より, A^2 と A は積について可換である. そこで, $A^3 := A^2A$ と定義する.
(3) 以下, 帰納的に $m \in \mathbb{N}$ について A^m が定義できる. 次の行列の m 乗の $(1,1)$ 成分, $(2,2)$ 成分, $(3,3)$ 成分を求めよ. ただし, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ とする.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

問題 8.7.

$m, n \in \mathbb{N}$, $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ に対して, 次のことを証明せよ.

(1) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ に対して, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ならば $A = O$.
(2) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ に対して, $A\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x}$ ならば $A = B$.

問題 8.8.

$n \in \mathbb{N}$, $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ に対し

$$[A, B] := AB - BA$$

と定義する. 次の等式を示せ.

(1) $A, B, C \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ に対して $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$.
(2) $A, B, C \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ に対して $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = O$. この等式を, **Jacobi の恒等式**という.

問題 8.9 (講義ノート 命題 1.5)**.**

$l, m, n \in \mathbb{N}$, $A \in M_{m,l}(\mathbb{K})$, $B = (\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2 \ldots \boldsymbol{b}_n) \in M_{l,n}(\mathbb{K})$ に対して,

$$AB = (A\boldsymbol{b}_1\ A\boldsymbol{b}_2 \ldots A\boldsymbol{b}_n)$$

を示せ (これも面倒くさがらずに成分を丁寧に書いた方がよい).

[1]存在を示せだから, 見つけかたは書かなくてもよい

代数学幾何学 A 演習問題 9　　2013 年 6 月 7 日

以下, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする.

問題 9.1.

次の行列の積を求めよ. ただし, 行列の区分けによる計算をしてよい.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

(2) $\mathrm{diag}(2, -1, 3)\mathrm{diag}(-1, 2, -1)$

問題 9.2.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $AX = E_2$ となる $X \in M_2(\mathbb{R})$ が存在しないことを示せ.

(2) $XA = E_2$ となる $X \in M_2(\mathbb{R})$ が存在しないことを示せ.

問題 9.3.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $AX = B$ となる $X \in M_2(\mathbb{R})$ が存在しないことを示せ.

(2) $YA = B$ となる $Y \in M_2(\mathbb{R})$ が 2 つ以上存在することを示せ.

問題 9.4 (講義ノート 命題 2.6)**.**

$n \in \mathbb{N}$, A, $B \in M_n(\mathbb{K})$ に対して, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ を示せ (ヒント: A, B をそれぞれ成分で書いて, 積を計算してみよ).

問題 9.5 (講義ノート 命題 2.4)**.**

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $A = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ とする. ただし, $i = 1, \ldots, n$ に対して $a_i \in \mathbb{K}$ である.

(1) すべての $i = 1, \ldots, n$ に対して $a_i \neq 0$ ならば, A が正則行列となることを示せ (ヒント: 逆行列はなにか？).

(2) A が正則行列ならば, すべての $i = 1, \ldots, n$ に対して $a_i \neq 0$ となることを示せ (ヒント: 背理法と命題 1.5).

問題 9.6.

$A, B \in M_4(\mathbb{K})$ を

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & {}^t\boldsymbol{a}_2 \\ \mathbf{0} & A_4 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} b_1 & {}^t\mathbf{0} \\ \boldsymbol{b}_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

と小行列に区分けできたとする. ただし, a_1, $b_1 \in \mathbb{K}$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_3 \in \mathbb{K}^3$, A_4, $B_4 \in M_3(\mathbb{K})$ である. このとき,

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 b_1 + {}^t\boldsymbol{a}_2 \boldsymbol{b}_3 & {}^t\boldsymbol{a}_2 B_4 \\ A_4 \boldsymbol{b}_3 & A_4 B_4 \end{pmatrix}$$

となっていることを確かめよ. なお, 講義ノートの定理 1.8 は使わないこと.

問題 9.7.

$n \in \mathbb{N}$, $A \in GL_n(\mathbb{K})$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) $\overline{A} \in GL_n(\mathbb{K})$ であることを示し, $(\overline{A})^{-1}$ を求めよ.

(2) ${}^tA \in GL_n(\mathbb{K})$ であることを示し, $({}^tA)^{-1}$ を求めよ.

問題 9.8 (問題 8.8 も参照)**.**

$n \in \mathbb{N}$, $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ に対し

$$[A, B] := AB - BA$$

と定義するとき, $[A, B] = E_n$ となる $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ が存在しないことを示せ (ヒント: トレースを考える).

問題 9.9.

$n \in \mathbb{N}$, $A \in M_n(\mathbb{K})$ に対して次の事柄を証明せよ.

(1) $A^k = E_n$ となる $k \in \mathbb{N}$ が存在するならば $A \in GL_n(\mathbb{K})$.

(2) $A^2 = A$ かつ $A \neq E_n$ ならば $A \notin GL_n(\mathbb{K})$.

(3) $A^k = O$ となる $k \in \mathbb{N}$ が存在するならば $A \notin GL_n(\mathbb{K})$. このような行列を巾零行列という.

(4) A が巾零行列なら, $(E - A) \in GL_n(\mathbb{K})$.

問題 9.10.

$m, n \in \mathbb{N}$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ に対して, $T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ を $T_A\boldsymbol{x} := A\boldsymbol{x}$ で定義する. T_A が次の条件をみたすとする:

$$\text{任意の } \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n \text{ に対して, } T_A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \in \mathbb{K}^m \text{ ならば } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \in \mathbb{K}^n.$$

このとき, T_A が単射となることを示せ.

問題 9.11.

$n \in \mathbb{N}$, $A \in GL_n(\mathbb{K})$ に対して, $T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ を $T_A\boldsymbol{x} := A\boldsymbol{x}$ で定義する. このとき, T_A が全単射となることを示せ.

代数学幾何学 A 演習問題 10　　2013 年 6 月 14 日

以下, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする. また, $n,i,j\in\mathbb{N}$ とし, E_{ij} は行列単位とする.

問題 10.1 (演習線形代数 p. 26–27)**.**
次の行列を Hermite 標準形に直し, 行列の階数を求めよ[2].

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 4 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ -2 & -12 & 3 & 5 \\ 5 & 21 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

問題 10.2.
次の写像は線形写像かどうか答え, そのことが正しいことを証明せよ.

(1) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ を $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ に対して, $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right):=\begin{pmatrix} x+y+4z \\ -y+z \end{pmatrix}$.

(2) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ を $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ に対して, $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right):=\begin{pmatrix} xy+z \\ y-z \end{pmatrix}$.

問題 10.3.
$c\in\mathbb{R}$ が $c\neq 0$ ならば $Q_n(i;c):=E_n+(c-1)E_{ii}$ が正則になることを示せ.

問題 10.4.
$c\in\mathbb{R}$ に対して $i\neq j$ ならば $R_n(i,j;c):=E_n+cE_{ij}$ が正則になることを示せ.

問題 10.5.
$i\neq j$ ならば $P_n(i,j):=E_n-E_{ii}-E_{jj}+E_{ij}+E_{ji}$ が $Q_n(i;c)$ と $R_n(i,j;c)$ の積で書けることを示せ.

[2]教科書 p.50 にあるような標準形に直しても構わない.

問題 10.6.

$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $T(\boldsymbol{x}) := \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}\|^2 - \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|^2$ により定めると, T が線形写像になることを示せ. さらに, この T の表現行列を求めよ.

問題 10.7 (参照: 演習線形代数 p.124)**.**

$\|\boldsymbol{a}\| = 1$ をみたす $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ に対して, $g_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$g_a(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$$

と定める. g_a を $\boldsymbol{a}$ に関する鏡映という.

(1) g_a が線形写像であることを示せ.

(2) g_a の表現行列を求めよ.

(3) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ として, $\boldsymbol{x}$ と $g_a(\boldsymbol{x})$ を平面上に図示してみよ.

問題 10.8.

$n, m, l \in \mathbb{N}$ に対して, 線形写像 $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^l$ の表現行列が $A \in M_{l,n}(\mathbb{K})$, 線形写像 $S : \mathbb{K}^l \to \mathbb{K}^m$ の表現行列が $B \in M_{m,l}(\mathbb{K})$ であるとする.

(1) 合成写像 $S \circ T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ が線形写像となることを示せ.

(2) $S \circ T$ に対する表現行列が BA となることを示せ.

問題 10.9.

$n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ に対して, 次の行列の階数を求めよ (ヒント: $x = 1, -\dfrac{1}{n-1}$, それ以外で場合わけする).

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ x & 1 & x & \cdots & x \\ x & x & 1 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

問題 10.10.

$$m, n \in \mathbb{N} \text{に対して}, \boldsymbol{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, , \ldots, \boldsymbol{e}_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \text{とし, 線形写像} T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$

を

$$T\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{y}_1 \in \mathbb{K}^m, \ldots, T\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{y}_n \in \mathbb{K}^m$$

により定めたとする. このとき, 任意の $\boldsymbol{y} \in \mathbb{K}^n$ に対して, $T\boldsymbol{y}$ が定まることを示せ. いいかえると, 線形写像は単位ベクトルがどこに移るかが決まれば定義できることを示せ.

代数学幾何学 A 演習問題 11　　2013 年 6 月 21 日

以下, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ とする.

問題 11.1 (問題 10.1 を参照)**.**
　次の行列を標準形に基本変形せよ. ただし, 問題 10.1 で求めた Hermite 標準形への基本変形による結果は使ってよい.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 4 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ -2 & -12 & 3 & 5 \\ 5 & 21 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

問題 11.2.
　次の行列が正則行列かどうか判定して, 逆行列があれば求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 25 & 25 & 14 \\ 7 & 7 & 4 \\ 5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

問題 11.3.
$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -5 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ に逆行列があれば求めよ.

問題 11.4.
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -3 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ に逆行列があれば求めよ.

問題 11.5 (教科書 [2.2])**.**
$A \in GL_{n-1}(\mathbb{K})$ とする．このとき

$$\begin{pmatrix} 1 & {}^t\mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A \end{pmatrix}$$

が n 次正則行列となることを示せ.

問題 11.6.
$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ は零ベクトルではないとする．$A := \boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{b}$ とおいたときに次を示せ.

(1) $\mathrm{rank}(A) = 1$.
(2) ある $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して $A^2 = \alpha A$ となる.

問題 11.7 (参照: 演習線形代数)**.**
$A \in M_n(\mathbb{K})$ に対して $\mathrm{tr}({}^t\overline{A}A)$ は非負の実数になることを示せ.

問題 11.8 (参照: 演習線形代数)**.**
$A \in M_n(\mathbb{K})$ に対して, ${}^t\overline{A} = A$ をみたす行列を **Hermite 行列**, ${}^t\overline{A} = -A$ をみたす行列を**歪 Hermite 行列**という.

(1) 任意の $A \in M_n(\mathbb{K})$ が Hermite 行列と歪 Hermite 行列の和で書けることを示せ.
(2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ を Hermite 行列と歪 Hermite 行列の和で表せ[3].

問題 11.9.
$n, k \in \mathbb{N}$ に対して, $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{K}^n$ が**線形独立**であるとは, 任意の $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{K}$ に対して

$$c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{x}_k = \mathbf{0} \Longrightarrow c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$$

が成り立つことをいう．$\boldsymbol{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, , \ldots, \boldsymbol{e}_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ が線形独立になることを示せ.

問題 11.10.
次の 4 つのベクトルから 3 本を選び[4], その 3 本が線形独立となることを示せ.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -12 \\ 21 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

[3] $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ のとき, Hermite 行列を**対称行列**, 歪 Hermite 行列を**歪対称行列**ということがある.
[4] この 3 という数字は問題 11.1 の (3) の rank と関係がある.

代数学幾何学 A 演習問題 12　　2013 年 6 月 27 日

以下, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする.

問題 12.1.

次の一次方程式系を解け (添字に注意せよ).

$$(1)\ \begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4-2x_5=1, \\ 2x_1+4x_2+x_3+3x_4-3x_5=2, \\ -x_1-2x_2+2x_3-4x_4-x_5=1, \\ 3x_1+6x_2+6x_4-5x_5=3. \end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases} 2x_1+4x_2+x_3-x_4=1, \\ x_1+2x_2-x_3+x_4=2, \\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=-2, \\ x_1+3x_2+2x_3-3x_4=0. \end{cases}$$

問題 12.2.

次の一次方程式系を解け (添字に注意せよ).

$$(1)\ \begin{cases} x_1+x_3+2x_4=6, \\ -2x_1+x_2+4x_3+x_4=3, \\ 4x_1-3x_2-4x_3+x_4=-3, \\ -x_1+x_2+2x_4+x_5=4. \end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4+4x_5=5, \\ x_3-2x_4+4x_5=-2, \\ 2x_1+4x_2-x_3+3x_4+2x_5=5. \end{cases}$$

問題 12.3.

$n\in\mathbb{N}$, $A\in M_n(\mathbb{K})$ に対して, 斉次一次方程式系 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ を考える.

(1) $A\in GL_n(\mathbb{K})$ ならば, 斉次一次方程式系 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は自明解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ しかないことを示せ.

(2) 斉次一次方程式系 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ が自明解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ しかないならば, $A\in GL_n(\mathbb{K})$ となることを示せ.

問題 12.4.

$n\in\mathbb{N}$, $A\in M_n(\mathbb{K})$ とする.

(1) $A\in GL_n(\mathbb{K})$ ならば, $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ をみたす任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbb{K}^n$ に対して, $A\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ となることを示せ.

(2) 逆に $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ をみたす任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbb{K}^n$ に対して, $A\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$ となるならば, $A\in GL_n(\mathbb{K})$ となることを示せ.

問題 12.5.

次の行列の逆行列を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

問題 12.6.

次の一次方程式系を解け (添字に注意せよ). なお, 問題 12.5 を用いてよい.

(1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = -3, \\ -x_3 + x_4 = 4. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = -3, \\ 3x_1 + x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$

問題 12.7 (演習書 p.46, ただし, 演習書の解答方法を使ってはいけない)**.**

次のベクトルの組が一次独立か否かを定義に基づいて示せ (ヒント: (1) について, $c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + c_3\boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0}$ を仮定して, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$ を解いてみよ. (2) も同様).

(1) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

(2) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

問題 12.8.

次の斉次一次方程式系の一次独立な非自明解の組を一つ求めよ.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

代数学幾何学 A 演習問題 13　　2013 年 7 月 11 日

以下, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする.

問題 13.1.

次のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対する内積 $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ を計算せよ. ただし, $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする.

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(3) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -i \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ -3i \end{pmatrix}$.

(4) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5i \\ -2i \\ 7 \end{pmatrix}$.

問題 13.2.

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を $0 \leq \theta \leq \pi$ とすると

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}$$

が成り立つ. 次のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ を求めよ.

(1) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(2) $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

問題 13.3.

任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{K}^n$, $c \in \mathbb{K}$ に対して, 次を示せ.

(1) $((\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}), \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$.

(2) $((c\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = c(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

(3) $(\boldsymbol{x}, (c\boldsymbol{y})) = \overline{c}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

問題 13.4.
任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{K}^n$ に対して, (Schwarz の不等式を用いて) 次の三角不等式を示せ.

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|.$$

問題 13.5 (中線定理)**.**
任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{K}^n$ に対して, 次を示せ. さらに $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ を図示して, この不等式が何を意味しているか考えてみよ.

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 + \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = 2(|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2).$$

問題 13.6 (Pythagoras の定理)**.**
$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{K}^n$ に対して, 次の問に答えよ.

(1) $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ が直交するならば $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2$ となることを示せ.
(2) 逆に $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + \|\boldsymbol{y}\|^2$ となるならば, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ が直交することを示せ.

問題 13.7.
$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n$ とする. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $t \in \mathbb{R}$ に対して $f(t) := \|\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}\|^2$ により定める. f の最小値と $f(t)$ を最小にする $t \in \mathbb{R}$ を求めよ (ヒント: $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ かどうかで場合わけする).

問題 13.8.
$\theta \in \mathbb{R}$ に対して, $\begin{pmatrix} cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ が 2 次ユニタリ行列であることを示せ.

問題 13.9.
A, $B \in M_n(\mathbb{K})$ をユニタリ行列とする.

(1) AB がユニタリ行列となることを示せ.
(2) A^{-1} がユニタリ行列となることを示せ.

問題 13.10 (正規行列[5])**.**
$A \in M_n(\mathbb{K})$ とする.

(1) $AA^* = A^*A$ ならば, 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ に対して, $\|A\boldsymbol{x}\| = \|A^*\boldsymbol{x}\|$ となることを示せ.
(2) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ に対して, $\|A\boldsymbol{x}\| = \|A^*\boldsymbol{x}\|$ が成り立つならば, $AA^* = A^*A$ となることを示せ.

[5] 正則行列ではない

代数学幾何学 A 「演習 線形代数」について

村上 - 野澤 - 稲葉 著「演習 線形代数」で講義内容に関係する問題は下記の通りである. ただし, 演習問題で配布した問題も含まれている. とくに具体的に計算する問題について, 各自計算を確認してみるとよい[6].

なお, 細字での数字は前が章の番号で後ろが例題の番号, 太字での数字は章末の問題を表す. 例えば, 1.3 と書いてあれば, 1 章の例題 3 のことを指す. **1.3** は 1 章の章末問題 1.3 のことを指す.

行列の演算について.

1.1–1.8, 1.11, **1.1–1.7, 1.11, 1.12, 1.14**

正則行列とその周辺.

1.9, 1.10, **1.8–1.10, 1.13**

基本変形と一次方程式.

2.1–2.9, 4.1–4.3, 4.5, **2.1–2.7, 4.1–4.5, 4.8, 4.9**

内積.

6.1–6.3, **6.1, 6.2**

[6] 証明問題がわからなくて頭が疲れているときに, この演習書のような計算問題をひたすら計算してすっきりさせるのもよいであろう.