

代数学幾何学 A 中間試験問題

2013年5月23日 第1時限施行 担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1 については, 必ず答えよ. ただし, 答えのみでもよい. 問題 2, 3, 4 から 2 題選択して答えよ. また, どの順番で回答してもよいが, どの問題を解いているのかわかるようにすること.

問題 1.

次の各問いに答えよ.

(1) 次の行列の積 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ を計算せよ.

(2) 次の行列式 $\det \begin{pmatrix} 16 & 12 \\ -8 & 24 \end{pmatrix}$ を計算せよ.

(3) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して, $\vec{a} \times \vec{b}$ を求めよ.

(4) 次の行列式 $\det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ を求めよ.

問題 2.

$t \in \mathbb{R}, \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ とする.

(1) $\|t\vec{a} + \vec{b}\|^2$ を t の多項式として表せ.

(2) $\|t\vec{a} + \vec{b}\|^2 \geq 0$ を用いて, 次の Schwarz の不等式を示せ:

$$|(\vec{a}, \vec{b})| \leq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|.$$

問題 3.

方程式 $3x + y - 2z = 3$ の表す空間内の平面をパラメータ表示せよ.

問題 4.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ とする. 任意の } \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \text{ に対して, } T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

を

$$T\vec{x} := (\vec{x}, \vec{a})\vec{a}$$

で定める.

- (1) T が \mathbb{R}^3 上の線形写像であることを示せ.
- (2) 任意の $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して $T\vec{x} = A\vec{x}$ となる 3 次行列 A を求めよ.
なお, 求めた行列 A が「任意の $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して $T\vec{x} = A\vec{x}$ をみたす」ことは示さなくてもよい.

以下余白 計算用紙として使ってよい.