代数学幾何学 A 期末試験問題 略解とコメント

2013 年 7 月 18 日 第 2 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず. 解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1 については, 必ず答えよ. ただし, 答えのみでもよい. 問題 2, 3, 4, 5, 6 から 3 題選択して答えよ. 4 題以上に答えた場合, 得点がよい問題を評価する.

以下, $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする.

問題 1.

次の各問いに答えよ.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ i & -3 & 2 \end{pmatrix}$ を計算せよ.

(2) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & i & 3i \end{pmatrix}$ を計算せよ.

(3) 内積 $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$ を計算せよ.

(4) 内積 $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 2 \\ 3i \end{pmatrix} \right)$ を計算せよ.

(5) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & -12 & 3 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ.

(6) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ -2 & -12 & 3 & 5 \\ 5 & 21 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ.

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ に逆行列があれば求めよ.

(8) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ に逆行列があれば求めよ.

(9) 一次方程式系 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$ を解け.

(10) 一次方程式系 $\begin{cases} x_1 + x_3 + 2x_4 = 6, \\ -2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 3, \\ 4x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 = -3, \\ -x_1 + x_2 + 2x_4 = 4 \end{cases}$ を解け.

問題 1 の解答とコメント.

(1) $\begin{pmatrix} 3+2i & 12 & 4 \\ 2+i & 9 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 4 & 2i & 6i \\ 2 & i & 3i \\ -6i & 3 & 9 \end{pmatrix}$

(3) 10

(4) $3+2i$

(5) 2

(6) 3

(7) $\begin{pmatrix} -21 & -4 & -15 \\ 10 & 2 & 7 \\ -4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

(8) 逆行列は存在しない.

(9) 解なし.

(10) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} 39 \\ 59 \\ 11 \\ 20 \end{pmatrix}$.

(2), (4), (10) の間違いが多かった. (2) は行列の型がどうなるかに注意すること. (4) は複素共役をつけ忘れている解答が多かった. (10) は計算ミスが多数であった. $\square$

問題 2.

$n \in \mathbb{N}$, $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ に対し

$$[A, B] := AB - BA$$

と定義する. $A, B, C \in M_n(\mathbb{K})$ に対して

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = O$$

を示せ.

問題 2 のコメント.

この問題に手をつけた学生の殆どが正解であった. 行列の積は可換ではない. つまり $AB = BA$ とは限らない. 注意すべきことはこの一点だけであろう. $\square$

問題 3.

$n \in \mathbb{N}$, A, $B \in M_n(\mathbb{K})$ に対して, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ を示せ.

問題 3 のコメント.

正答率はそれなりといったところ. 行列 A, B を成分で書いて AB と BA の (i,i) 成分, (j,j) 成分を計算すれば, あと少しといったところ. 行列の積の計算を Σ を使って記述できるようにして欲しい. $\square$

問題 4.

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して,

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x + 3z \\ -2y - z \end{pmatrix}$$

で定める. T が線形写像になることを示し, 表現行列を求めよ.

問題 4 のコメント.

「$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ に対して, $T(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y})$ であること」と「$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, $\forall c \in \mathbb{R}$ に対して $T(c\boldsymbol{x}) = cT(\boldsymbol{x})$ を示すこと」が T が線形写像であることを示すために必要なことである. $\forall$ を省略してはいけない. また, 片方だけ示すだけでは不足である. 和のみ示している答案が多数あった.

表現行列を求めるためには, $(T\boldsymbol{e}_1\ T\boldsymbol{e}_2\ T\boldsymbol{e}_3)$ を求めればよい. ここで $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ は単位ベクトルである. よって表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ である. $\square$

問題 5.

$x \in \mathbb{R}$ に対して, 次の行列の階数を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$$

問題 5 の略解, コメント.

$x=1$ のとき階数は 1, $x=-\dfrac{1}{2}$ のとき階数は 2, これら以外のときは階数は 3 である. 例えば, 次のように基本変形すればよい.

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{r_2 \leftarrow r_2 - x r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - x r_1}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & (x+1)(1-x) & x(1-x) \\ 0 & x(1-x) & (x+1)(1-x) \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_2 \leftarrow r_2 - r_3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 1-x & -(1-x) \\ 0 & x(1-x) & (x+1)(1-x) \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_3 \leftarrow r_3 - x r_2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ 0 & 1-x & -(1-x) \\ 0 & 0 & (2x+1)(1-x) \end{pmatrix}$$

$\square$

問題 6.

$n \in \mathbb{N}$, $A \in M_n(\mathbb{K})$ が $AA^* = A^*A$ をみたすならば, 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ に対して, $\|A\boldsymbol{x}\| = \|A^*\boldsymbol{x}\|$ となることを示せ.

問題 6 の略解とコメント.

任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ に対して,

$$\|A\boldsymbol{x}\|^2 = (A\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, A^*A\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, AA^*\boldsymbol{x}) = (A^*\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{x}) = \|A^*\boldsymbol{x}\|^2$$

となるから, 平方根を取ればよい. 長さやノルムの等式や不等式を示したいときは, 2 乗を考えて内積の計算をするのが基本的である. $\square$