代数学幾何学 A 期末試験問題

2013 年 7 月 18 日 第 2 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1 については, 必ず答えよ. ただし, 答えのみでもよい. 問題 2, 3, 4, 5, 6 から 3 題選択して答えよ. 4 題以上に答えた場合, 得点がよい問題を評価する.

以下, $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位とする. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする.

問題 1.

次の各問いに答えよ.

(1) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ i & -3 & 2 \end{pmatrix}$ を計算せよ.

(2) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & i & 3i \end{pmatrix}$ を計算せよ.

(3) 内積 $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$ を計算せよ.

(4) 内積 $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 2 \\ 3i \end{pmatrix} \right)$ を計算せよ.

(5) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & -12 & 3 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ.

(6) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ -2 & -12 & 3 & 5 \\ 5 & 21 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ の階数を求めよ.

(7) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ に逆行列があれば求めよ.

(8) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ に逆行列があれば求めよ.

(9) 一次方程式系 $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=1, \\ 2x_1+4x_2+x_3=2, \\ -x_1-2x_2+2x_3=1 \end{cases}$ を解け.

(10) 一次方程式系 $\begin{cases} x_1+x_3+2x_4=6, \\ -2x_1+x_2+4x_3+x_4=3, \\ 4x_1-3x_2-4x_3+x_4=-3, \\ -x_1+x_2+2x_4=4 \end{cases}$ を解け.

問題 2.

$n\in\mathbb{N}$, $A,B\in M_n(\mathbb{K})$ に対し

$$[A,B]:=AB-BA$$

と定義する. $A,B,C\in M_n(\mathbb{K})$ に対して

$$[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=O$$

を示せ.

問題 3.

$n\in\mathbb{N}$, A, $B\in M_n(\mathbb{K})$ に対して, $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$ を示せ.

問題 4.

$T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ を $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ に対して,

$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right):=\begin{pmatrix} x+3z \\ -2y-z \end{pmatrix}$$

で定める. T が線形写像になることを示し, 表現行列を求めよ.

問題 5.

$x\in\mathbb{R}$ に対して, 次の行列の階数を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$$

問題 6.

$n\in\mathbb{N}$, $A\in M_n(\mathbb{K})$ が $AA^*=A^*A$ をみたすならば, 任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbb{K}^n$ に対して, $\|A\boldsymbol{x}\|=\|A^*\boldsymbol{x}\|$ となることを示せ.