補足. 一次方程式系の解き方 (解が無限個)

<u>例</u> (教科書 p.59)

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+x_4+3x_5=2 \\ 2x_1+x_2+2x_3+x_5=3 \\ -2x_1-3x_2+2x_3-x_4+2x_5=1 \end{cases}$$

を考える. 拡大係数行列は $\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$.

となる。まず「左下」の成分を0にしていく.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_2 \leftarrow r_2-2r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3+2r_1}]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & -2 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 8 & 5 \end{array}\right)$$

ここをゼロにした.

$$\xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 8 & 5 \\ 0 & -3 & 6 & -2 & -5 & -1 \end{array}\right)$$

この部分だけをみて, 左下をゼロにする.

$$\xrightarrow[r_3 \leftarrow r_3+3r_2]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19 & 14 \end{array}\right)$$

ここをゼロにした.

ここで拡大係数行列の各行を左からみて、

はじめて0でないものがでてくるところに注目する.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19 & 14 \end{array}\right)$$

赤丸の上の部分を基本変形で0にする. そのためには

「右上」から 0にしていくとよい

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_1 \leftarrow r_1 - r_3 \\ r_2 \leftarrow r_2 - r_3}]{} \begin{array}{c} \text{ここを0にした} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 & -16 & -12 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -11 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19 & 14 \end{array}\right) \end{array}$$

$$\xrightarrow[r_1 \leftarrow r_1 - 2r_2]{} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -11 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 19 & 14 \end{array}\right)$$

すると方程式は

$$\begin{cases} x_1 \qquad +2x_3 \qquad +6x_5 = 6 & \cdots (1) \\ \qquad x_2 -2x_3 \qquad -11x_5 = -9 & \cdots (2) \\ \qquad\qquad\qquad x_4 + 19x_5 = 14 & \cdots (3) \end{cases}$$

となる. Gauss の消去法のように、$x_5, x_4, x_3 \cdots$

の順に解を決定させる.

Step.1

x_5は (1)〜(3) のどれを使っても決定できない
(x_1〜x_4 を用いないと決められない) そこで $c_1 \in \mathbb{R}$
に対し $\boxed{x_5 = c_1}$ とおく.

Step.2

x_4は (3) と Step.1 を用いれば

$x_4 = 14 - 19x_5 = 14 - 19c$ だから.

$\boxed{x_4 = 14 - 19c_1}$ と決定できる.

Step.3

x_3 は (1), (2) にのみでてくるが. どちらを使っても
決定できない (x_1 , x_2を用いないと決められない)
そこで $c_2 \in \mathbb{R}$ に対し. $\boxed{x_3 = c_2}$ とおく.

Step.4

x_2は (2) と Step.1 , Step.3 を用いれば

$x_2 = -9 + 2x_3 + 11x_5 = -9 + 2c_2 + 11c_1$.

だから $\boxed{x_2 = -9 + 11c_1 + 2c_2}$ と決定できる

Step.5

x_1は (1)と Step.1. Step.3 を用いれば

$x_1 = 6 - 2x_3 - 6x_5 = 6 - 2c_2 - 6c_1$

だから $\boxed{x_1 = 6 - 6c_1 - 2c_2}$ と決定できる.

以上より、一次方程式の解として

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 0 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -6 \\ 11 \\ 0 \\ -19 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

となることがわかった。

<たしかめ（命題5.9）>

1. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 0 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}$ が最初の方程式系をみたすことを

代入してたしかめよ。

2. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 11 \\ 0 \\ -19 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ が最初の方程式系に対する

斉次一次方程式系

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 0 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

をみたすことを代入してたしかめよ。

1. 2. が正しければ、答えが正しいことがわかる。