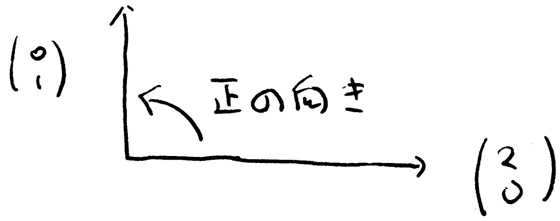
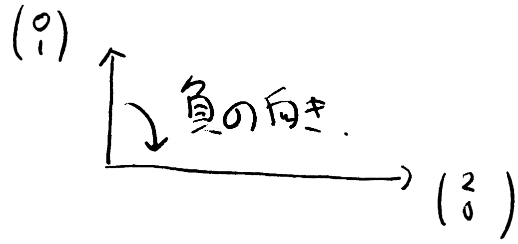
第3章 行列式

$$\det\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}=2\ ,\ \det\begin{pmatrix}0&2\\1&0\end{pmatrix}=-2$$





◎ 行列式が持っているもの

□ 平行体（四辺形, 直方体 etc）の体積

□ 回転の向き.

□ 正則か否か?

以下 $n\in\mathbb{N}$ とする.

§3.1 置換

<u>定義</u>（置換）

$\sigma:\{1,2,\cdots,n\}\longrightarrow\{1,2,\cdots,n\}$ が n 文字の 置換

$\underset{\text{定義}}{\iff}$ σ は全単射

$\sigma(1)=i_1,\ \sigma(2)=i_2,\ \cdots,\sigma(n)=i_n$ とするとき.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

とかく. 上と下の対応だけが問題である. たとえば

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

であり. $\sigma(1)=2$. $\sigma(2)=3$, $\sigma(3)=1$ である.

$$S_n := \{\sigma : \sigma \text{は} n \text{文字の置換}\}$$

とおく.

<u>例</u>

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$1_n := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \in S_n$ を単位置換という.

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \in S_n$ に対し.

$\sigma^{-1} := \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \in S_n$ を σ の逆置換

という.

<u>例</u>

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{のとき} \quad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\sigma, \tau \in S_n$ に対し．$\tau\sigma := \tau \circ \sigma$ を τ．σ の

積 という．

<u>例</u>

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

に対し

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$1 \to 2 \to 3 \qquad 2 \to 3 \to 2 \qquad 3 \to 1 \to 1$

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$1 \to 1 \to 2 \qquad 2 \to 3 \to 1 \qquad 3 \to 2 \to 3$

である．一般に $\tau\sigma \neq \sigma\tau$ である

命題 1.1

(1) $\forall \sigma, \tau, \rho \in S_n$ に対し $(\sigma\tau)\rho = \sigma(\tau\rho)$

(2) $\forall \sigma \in S_n$ に対し $1_n \sigma = \sigma 1_n = \sigma$

(3) $\forall \sigma \in S_n$ に対し $\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = 1_n$

証明 (1) のみ示す. $\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ に対し

$$\begin{aligned}((\sigma\tau)\rho)(i) &= (\sigma\tau)(\rho(i)) \\ &= \sigma(\tau(\rho(i))) \\ &= \sigma(\tau\rho(i)) = \sigma(\tau\rho)(i)\end{aligned}$$

よって $(\sigma\tau)\rho = \sigma(\tau\rho)$ □

命題 1.1 から S_n には積が定義できて

(1) 結合法則が成り立つ

(2) 単位元が存在する

(3) $\forall \sigma \in S_n$ に対し. 逆元 σ^{-1} が存在する.

この事実を「S_n は群である」という. そして

S_n を n 次対称群という.

$1 \leq i < j \leq n$ に対し

$$(i\ j) := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix}$$

とおく. つまり i と j だけ入れかえる置換である.

$(i\ j)$ を互換という.

<u>例</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ここを同じにさせる.　　ここを入れかえ

$$= (1\ 2)(2\ 3)$$

$$= (1\ 2)(2\ 3)(1\ 3)(1\ 3)$$

$\forall \sigma \in S_n$ に対し. 互換 $\tau_1, \cdots, \tau_k \in S_n$ が存在して $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$ とかける. k の値(互換の数)は一意に定まらないが. 次が成り立つ.

<u>定理1.3</u>

$\forall \sigma \in S_n$ に対し互換 $\tau_1, \cdots, \tau_k \in S_n$ が存在して $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$ とかける. このときの k の偶奇は σ にのみよってきまる.

定義（符号）

$\sigma \in S_n$ に対し，$k \in \mathbb{N}$ を定理1.3でとれるものとするとき

$$\operatorname{sgn} \sigma := (-1)^k$$

と定める．$\operatorname{sgn} \sigma$ を σ の符号という．

例

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ とすると

$$\sigma = (1\ 4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 6 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

これを $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ にする．

$$= (1\ 4)(3\ 6)$$

より $\operatorname{sgn} \sigma = (-1)^2 = 1$

$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ とすると

$$\tau = (1\ 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ 3)(2\ 3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ 3)(2\ 3)(3\ 4)$$

より $\operatorname{sgn} \tau = (-1)^3 = -1$

§3.2 行列式

$\mathbb{K}=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ とする.

定義（行列式）

$A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}\in M_n(\mathbb{K})$ に対し.

$$\det A := \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\, a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

で定義する. $\det A$ を A の行列式という.

$A=(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)$ のとき. $\det A=\det(\vec{a}_1\cdots\vec{a}_n)$ とかく.

例

$$S_2 := \{1_2, (1\ 2)\} = \left\{\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\right\}$$

である. $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{K})$ に対し

$$\begin{aligned}\det A &= \underbrace{\operatorname{sgn}1_2}_{=+1}\, a_{1\underbrace{1_2(1)}_{1}}\, a_{2\underbrace{1_2(2)}_{2}} \\ &\quad + \underbrace{\operatorname{sgn}(1\ 2)}_{=-1}\, a_{1\underbrace{(1 2)(1)}_{2}}\, a_{2\underbrace{(1 2)(2)}_{1}} \\ &= a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\end{aligned}$$

定理 2.1

$A\in M_n(\mathbb{K})$ に対し

$$\det A = \det {}^t\!A.$$

つまり. 列に関して成り立つことは行に関しても成り立つ.

証明

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \underset{\substack{\parallel \\ \operatorname{sgn}\sigma^{-1}}}{\operatorname{sgn}\sigma}\ \underset{\substack{\parallel\ \text{かけ算の順序の入れかえ} \\ a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}}}{\underline{a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}}}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma^{-1}\, a_{\sigma^{-1}(1)1} \cdots a_{\sigma^{-1}(n)n}$$

$$\overset{\text{演習}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\, a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} = \det {}^tA$$

□.

定理2.2 (多重線形性と交代性)

$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n \in \mathbb{K}^n$, $\vec{b} \in \mathbb{K}^n$, $c \in \mathbb{K}$ に対し

次が成り立つ

(1) $\det(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_j + \vec{b} \cdots \vec{a}_n)$

$= \det(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) + \det(\vec{a}_1 \cdots \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{番目}}}{\vec{b}} \cdots \vec{a}_n)$

(2) $\det(\vec{a}_1 \cdots c\vec{a}_j \cdots \vec{a}_n)$

$= c \det(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)$

証明は定義からほぼ自明.

定理2.3

$\tau \in S_n$ に対し

$$\det(\vec{a}_{\tau(1)} \cdots \vec{a}_{\tau(n)}) = \operatorname{sgn}\tau \det(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)$$

証明

$$\det(\vec{a}_{\tau(1)} \cdots \vec{a}_{\tau(n)}) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\, a_{1(\tau\sigma)(1)} \cdots a_{n(\tau\sigma)(n)}$$

$$= \operatorname{sgn}\tau \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau\sigma)\, a_{1(\tau\sigma)(1)} \cdots a_{n(\tau\sigma)(n)}$$

演習

$$= \operatorname{sgn}\tau \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma\, a_{1\sigma(1)} \cdots a_{1\sigma(n)}$$

$$= \operatorname{sgn}\tau \det A \qquad \square$$

系 2.4

$A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) \in M_n(\mathbb{K})$ に対して.

ある $1 \leq i, j \leq n$ が存在して $i \neq j$ かつ $\vec{a}_i = \vec{a}_j$

$\Rightarrow \det A = 0$ (演習)

系 2.5

$A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n) \in M_n(\mathbb{K})$, $c \in \mathbb{K}$ に対し

$$\det(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_i + c\vec{a}_j \cdots \vec{a}_n) = \det A$$

(演習)

系2.4

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \det\begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

とくに $\det\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdots a_{nn}$

ゼロ

証明

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(1)=1}} \operatorname{sgn}\sigma\, a_{11} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$\sigma \in S_n,\ \sigma(1)=1 \simeq \sigma \in S_{n-1}$

$a_{1i} = 0$ $(i \neq 1)$

$$= a_{11} \sum_{\sigma \in S_{n-1}} \operatorname{sgn}\sigma\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$$= a_{11} \det\begin{pmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \square$$

定義（上三角行列）

$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \in M_n(\mathbb{K})$ が上三角行列

$\overset{定義}{\Longleftrightarrow}$ $i > j$ に対して $a_{ij} = 0$. つまり

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

なんでもよい

ゼロ

〈行列式の計算〉

(ア) ある行に他のある行の定数倍を加える

… 行列式はかわらない（系2.5）

(イ) 二つの行を入れかえる … 行列式は(−1)倍
（定理2.3）

(ウ) ある行に0でない数cをかける

… 行列式はc倍　（定理2.2）

系2.9より、これらの変形で上三角行列を作ればよい
（2次、3次は公式を用いてもよい）

例　（演習書 p.74）

$\det\begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ を求める。

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{r_2 \leftrightarrow r_1}{=} (-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -1 & 5 \\ 3 & 7 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - 3r_1 \\ r_4 \leftarrow r_4 - r_1}}{=} (-1)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \cdots (*)$$

$$\underset{r_2 \leftrightarrow r_4}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_3 \leftarrow r_3 + 2r_2 \\ r_4 \leftarrow r_4 + 2r_2}}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= (3\times 7)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 7\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{r_4 \leftarrow r_4 - r_3}{=} 7\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 7\times 1\times(-2)\times 3\times 1 = -42.$$

なお(*)から $(*) = (-1)\det\begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ としてもよい

定理2.7

$A, B \in M_n(\mathbb{K})$ に対し

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

略証 $A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)$, $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le n}}$ とかくと

$$AB = \left(b_{11}\vec{a}_1 + \cdots + b_{n1}\vec{a}_n \ \cdots \ b_{1n}\vec{a}_1 + \cdots + b_{nn}\vec{a}_n\right)$$

より

$$\det(AB) \overset{\text{定理2.2}}{=} \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} b_{i_1 1} \cdots b_{i_n n} \det(\vec{a}_{i_1} \cdots \vec{a}_{i_n})$$

$k \ne l$ で $i_k = i_l$ となるとき $\det(\vec{a}_{i_1} \cdots \vec{a}_{i_n}) = 0$ (系2.4)

より

$$= \sum_{\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix}} b_{i_1 1} \cdots b_{i_n n} \det(\vec{a}_{i_1} \cdots \vec{a}_{i_n})$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} b_{\sigma(1)1} \cdots b_{\sigma(n)n} \operatorname{sgn}\sigma \det(\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)$$

$$= \det A \det B$$

□

§3.3 行列式の展開

文字のない行列式は系2.9を用いて計算するのがラク.

文字がある場合は?

定義(余因子)

$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} \in M_n(\mathbb{K})$ に対し

$$\tilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ここを除いたもの

を A の (i,j) 余因子という.

定理3.1 (行列式の余因子展開)

$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}} \in M_n(\mathbb{K})$, $1 \le i, j \le n$ に対し

$$\begin{aligned} \det A &= a_{1j}\tilde{a}_{1j} + a_{2j}\tilde{a}_{2j} + \cdots + a_{nj}\tilde{a}_{nj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\tilde{a}_{kj}, \qquad &-(1) \end{aligned}$$

$$\det A = \sum_{l=1}^{n} a_{il}\tilde{a}_{il} \qquad -(2)$$

が成り立つ. (1),(2)をそれぞれ j 列, i 行に対する行列式の余因子展開という.

<u>証明</u> アイデアをみやすくするために $n=3,\ j=2$ で (1) を示す.

$$\det A = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\underset{c_1 \leftrightarrow c_2}{=} (-1)\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{定理}2.2}{=} (-1)\left(\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & a_{11} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}\right)$$

$$\underset{\text{定理}2.3}{=} (-1)\left(\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + (-1)\det\begin{pmatrix} a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ 0 & a_{11} & a_{13} \\ 0 & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + (-1)^2\det\begin{pmatrix} a_{32} & a_{31} & a_{33} \\ 0 & a_{11} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}\right)$$

$$\underset{\text{系}2.4}{=} (-1)^{1+2} a_{12} \det\begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} a_{22} \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + (-1)^{3+2} a_{32} \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= a_{12}\tilde{a}_{12} + a_{22}\tilde{a}_{22} + a_{32}\tilde{a}_{32}$$

□

例　$x \in \mathbb{K}$ に対し

$$S_4(x) := \det\begin{pmatrix}1&x&x&x\\x&1&x&x\\x&x&1&x\\x&x&x&1\end{pmatrix}$$

を求める.

$$S_4(x) \underset{\text{1列目で展開}}{=} 1\times(-1)^{1+1}\det\begin{pmatrix}1&x&x\\x&1&x\\x&x&1\end{pmatrix}$$

$$+\,x\times(-1)^{2+1}\det\begin{pmatrix}x&x&x\\x&1&x\\x&x&1\end{pmatrix}$$

$$+\,x\times(-1)^{3+1}\det\begin{pmatrix}x&x&x\\1&x&x\\x&x&1\end{pmatrix}$$

$$+\,x\times(-1)^{4+1}\det\begin{pmatrix}x&x&x\\1&x&x\\x&1&x\end{pmatrix}$$

← 全部同じ

$$= S_3(x) - 3x\det\begin{pmatrix}x&x&x\\x&1&x\\x&x&1\end{pmatrix}$$

$$= S_3(x) - 3x^2\det\begin{pmatrix}1&1&1\\x&1&x\\x&x&\end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{r_2 \leftarrow r_2 - x r_1\\ r_3 \leftarrow r_3 - x r_1}}{=} S_3(x) - 3x^2\det\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1-x&0\\0&0&1-x\end{pmatrix}$$

$$= S_3(x) - 3x^2(1-x)^2$$

$$= \underbrace{1+2x^3-3x^2}_{=(x-1)^2(2x+1)} - 3x^2(1-x)^2$$

問2.1

$$= -(x-1)^2(3x^2-2x-1)$$

(各自)

$$= -(x-1)^3(3x+1)$$

定理3.2

$A \in M_n(\mathbb{K})$, $1 \leq i, j, k, l \leq n$ に対し

$$a_{1j}\tilde{a}_{1l} + a_{2j}\tilde{a}_{2l} + \cdots + a_{nj}\tilde{a}_{2l} = \delta_{jl}\det A \quad \text{—(3)}$$

$$a_{i1}\tilde{a}_{k1} + a_{i2}\tilde{a}_{k2} + \cdots + a_{nj}\tilde{a}_{kn} = \delta_{ik}\det A \quad \text{—(4)}$$

が成り立つ.

証明の方針 (3)のみ示す.

$j = l$ のときは 定理3.1

$j \neq l$ のとき. 話をかんたんにするため $j < l$ とする.

$$\underline{a_{1j}}\,\tilde{a}_{1l} + \underline{a_{2j}}\,\tilde{a}_{2l} + \cdots + \underline{a_{nj}}\,\tilde{a}_{nl}$$

$$\underset{\text{定理3.1}}{=} \det \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & \underline{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & \underline{a_{nj}} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{11}} & & \uparrow & & \uparrow & & \phantom{a_{nn}} \\ & & j\text{列目} & & l\text{列目} & & \end{array} \end{array}$$

$$\underset{\text{系2.4}}{=} 0$$

□

〈行列式と正則性．階数〉

定義（余因子行列）

$A \in M_n(\mathbb{K})$ に対し

$$\tilde{A} := (\tilde{a}_{ji})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \cdots & \tilde{a}_{n1} \\ \vdots & & \\ \tilde{a}_{1n} & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{pmatrix}$$

とおく（添字の順序に注意）．$\tilde{A}$ を余因子行列という．

定理3.2から次が得られる．

系3.3（Cramerの公式）

$A \in M_n(\mathbb{K})$ に対して

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = (\det A)E_n.$$

となる．よって $\det A \neq 0$ ならば $A \in GL_n(\mathbb{K})$ で

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\tilde{A}$$

で与えられる．

注意

Cramerの公式は文字のある行列の逆行列を求めるときに役立つ．文字がないときはあまり役に立たない．

系3.4（重要！）

$A \in M_n(\mathbb{K})$ に対して次は同値．

(1) $A \in GL_n(\mathbb{K})$，つまり A は正則，

(2) $\det A \neq 0$，

(3) $\operatorname{rank} A = n$，

第4章　線形空間

§4.1　イントロダクション

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $c \in \mathbb{R}$ に対し

$$\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0+b_0 \\ a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

$$c\vec{a} = c\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_0 \\ ca_1 \\ ca_2 \end{pmatrix} \qquad (**)$$

であった。ところで

$$(a_0+a_1X+a_2X^2)+(b_0+b_1X+b_2X^2)$$
$$= (a_0+b_0)+(a_1+b_1)X+(a_2+b_2)X^2$$

$$c(a_0+a_1X+a_2X^2) = (ca_0)+(ca_1)X+(ca_2)X^2$$

である。この2つの計算よくにている。

まとめて考えることはできないか？

ポイントはたし算とスカラー倍である。

〈復習〉

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ に対して和 $\vec{a}+\vec{b}$ が $(*)$ で定められていて、次の4つの性質をみたす (cf. 1章 命題1.1)

◎ $^\forall\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ に対して $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$,（交換法則）

◎ $^\forall\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbb{R}^3$ に対して $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$,（結合法則）

◎ $\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ が存在して．$^\forall\vec{a}\in\mathbb{R}^3$ に対して

$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$,　（零ベクトルの存在）

◎ $^\forall\vec{a}\in\mathbb{R}^3$ に対し．逆元 $\vec{b}=(-\vec{a})$ が存在して

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}=\vec{0}$,　（逆ベクトルの存在）

$\vec{a}\in\mathbb{R}^3$, $c\in\mathbb{R}$ に対し．スカラー倍 $c\vec{a}$ が(**)で定められていて．次の4つの性質をみたす（cf 1章 命題1.2）

◎ $^\forall\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3$, $^\forall c\in\mathbb{R}$ に対し $c(\vec{a}+\vec{b})=c\vec{a}+c\vec{b}$,

◎ $^\forall\vec{a}\in\mathbb{R}^3$, $^\forall c,d\in\mathbb{R}$ に対し $(a+b)\vec{a}=c\vec{a}+d\vec{a}$,

◎ $^\forall\vec{a}\in\mathbb{R}^3$, $^\forall c,d\in\mathbb{R}$ に対し $(cd)\vec{a}=c(d\vec{a})$,

◎ $^\forall\vec{a}\in\mathbb{R}^3$ に対し $1\vec{a}=\vec{a}$.

多項式でも和とスカラー倍は同じような性質を持つ．

◎ 和（加法，たし算）とスカラー倍がうまく定まると何がわかるだろうか？

§4.2 線形空間

以下 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする.

〈線形空間の定義〉

定義（線形空間）

集合 V が次の8条件をみたすとき. $\mathbb{K}$ 上の線形空間 ($\mathbb{K}$-vector space, 略して $\mathbb{K}$-vec.sp.) という.

(I) ${}^\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$ に対して. 加法 $\vec{x}+\vec{y} \in V$ が定められていて次が成り立つ.

1. ${}^\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$ に対して $\vec{x}+\vec{y} = \vec{y}+\vec{x}$,（交換法則）
2. ${}^\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ に対して $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z} = \vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$,（結合法則）
3. 零ベクトル $\vec{0} \in V$ が存在して. ${}^\forall \vec{x} \in V$ に対して
$$\vec{x}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{x} = \vec{x},$$（零ベクトルの存在）
4. ${}^\forall \vec{x} \in V$ に対して ${}^\exists \vec{y} \in V$ が存在して. $\vec{x}+\vec{y} = \vec{0}$ となる. この $\vec{y}$ を $\vec{x}$ の逆ベクトルといい. $-\vec{x} := \vec{y}$ とかく.（逆ベクトルの存在）

(II) ${}^\forall \vec{x} \in V$, ${}^\forall a \in \mathbb{K}$ に対してスカラー倍 $a\vec{x} \in V$ が定められていて. 次が成り立つ.

5. ${}^\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$, ${}^\forall a \in \mathbb{K}$ に対して $a(\vec{x}+\vec{y}) = a\vec{x}+a\vec{y}$,
6. ${}^\forall \vec{x} \in V$, ${}^\forall a, b \in \mathbb{K}$ に対して $(a+b)\vec{x} = a\vec{x}+b\vec{x}$,

7. $\forall \vec{x} \in V$, $\forall a, b \in \mathbb{K}$に対し　$(ab)\vec{x} = a(b\vec{x})$,

8. $\forall x \in V$　に対して　　　　$1\vec{x} = \vec{x}$。

〈線形空間の例〉

例　$n \in \mathbb{N}$ に対して. $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ はそれぞれ通常の（標準的な）加法とスカラー倍によって $\mathbb{R}$ 上の線形空間, $\mathbb{C}$ 上の線形空間となる.

例　$m, n \in \mathbb{N}$ に対して

$$M_{m,n}(\mathbb{K}) = \left\{ A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} : \begin{array}{c} 1 \le {}^\forall i \le m,\ 1 \le {}^\forall j \le n \text{に対して} \\ a_{ij} \in \mathbb{K} \end{array} \right\}$$

は通常の（標準的な）加法とスカラー倍によって $\mathbb{K}$ 上の線形空間になる（2章　命題 1.1）. なお行列の積はここでは考えない. スカラー倍と積はちがう.

例　$n \in \mathbb{N}$ に対し. $P_n(\mathbb{K})$ を $\mathbb{K}$ の元を係数とする n 次多項式全体, すなわち

$$P_n(\mathbb{K}) := \left\{ a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k : \begin{array}{c} 0 \le {}^\forall k \le n \text{に対し} \\ a_k \in \mathbb{K} \end{array} \right\}$$

とおく. 加法とスカラー倍を

$$f(x) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k,$$

$$g(x) = b_0 + b_1 X + \cdots + b_n X^n = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k \in P_n(\mathbb{K}),$$ $c \in \mathbb{K}$ に対し

$$f(x) + g(x) := (a_0+b_0) + (a_1+b_1)X + \cdots + (a_n+b_n)X^n = \sum_{k=0}^{n} (a_k+b_k) X^k,$$

$$cf(x) := (ca_0) + (ca_1)X + \cdots + (ca_n)X^n = \sum_{k=0}^{n} (ca_k) X^k$$

と定義すると，$P_n(\mathbb{K})$ は $\mathbb{K}$ 上の線形空間となる.

なお 零ベクトルは $0 + 0X + 0X^2 + \cdots + 0X^n \in P_n(\mathbb{K})$.

$f(x) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in P_n(\mathbb{K})$ の逆ベクトルは

$$-f(x) = (-a_0) + (-a_1)X + \cdots + (-a_n)X^n = \sum_{k=0}^{n} (-a_k) X^k$$

である.

<u>証明</u>　交換法則を示してみる.

$^\forall f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k \in P_n(\mathbb{K})$ に対し

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (a_0+b_0) + (a_1+b_1)X + \cdots + (a_n+b_n)X^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} (a_k+b_k) X^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} (b_k+a_k) X^k \quad (\because \mathbb{K} \text{での交換法則}) \\ &= (b_0+a_0) + (b_1+a_1)X + \cdots + (b_n+a_n)X^n \\ &= g(x) + f(x) \end{aligned}$$

これをきちんとかくこと

となる. よって交換法則が示された

□

例（難しいが重要）

Xを集合とし，X^*をXから$\mathbb{K}$への写像全体とする．すなわち

$$X^* := \{f : X \to \mathbb{K}\}$$

である．$\forall f, g \in X^*$と$\forall c \in \mathbb{K}$に対し

(写像の等号) $f \underset{\text{写像の等号}}{=} g \overset{}{\underset{\text{定義}}{\iff}} \forall x \in X$に対し$f(x) \underset{\mathbb{K}\text{での等号}}{=} g(x)$，

(加法 $f+g$) $\forall x \in X$に対し$(f+g)(x) := f(x) + g(x)$，

(スカラー倍 cf) $\forall x \in X$に対し$(cf)(x) := cf(x)$，

で定義する．このときX^*は$\mathbb{K}$上の線形空間となる．

証明

$\forall f, g \in X^*$，$\forall c \in \mathbb{K}$に対し$c(f+g) \underset{\text{写像の等号}}{=} cf + cg$を示してみる．

そのためには$\forall x \in X$に対して$(c(f+g))(x) \underset{\mathbb{K}\text{での等号}}{=} (cf+cg)(x)$を示せばよい．

$\forall x \in X$に対して

$$
\begin{aligned}
(c(f+g))(x) &= c((f+g)(x)) && (\because \text{スカラー倍の定義}) \\
&= c(f(x) + g(x)) && (\because \text{和の定義}) \\
&= cf(x) + cg(x) && (\because \mathbb{K}\text{上の分配法則}) \\
&= (cf)(x) + (cg)(x) && (\because \text{スカラー倍の定義}) \\
&= (cf+cg)(x) && (\because \text{和の定義})
\end{aligned}
$$

となるので$c(f+g) = cf + cg$が示された

□

〈線形写像〉

定義（線形写像）

V, W ： $\mathbb{K}$上の線形空間

写像 $T : V \to W$ が線形写像（linear mapping）

$\overset{\text{定義}}{\iff}$ 次の二条件をみたすこと．

(i) ${}^\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$ に対して $T(\vec{x}+\vec{y}) = T\vec{x} + T\vec{y}$

(ii) ${}^\forall \vec{x} \in V$, ${}^\forall c \in \mathbb{K}$ に対して $T(c\vec{x}) = cT\vec{x}$

例（演習 p.105）

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を ${}^\forall \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$T\vec{x} = T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}$$

で定義すると，Tは線形写像である．

証明

1. ${}^\forall \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し

$T(\vec{x}+\vec{y}) = T\vec{x} + T\vec{y}$ を示す． ← 何を示すか書いてから証明をかくとよい

$$T(\vec{x}+\vec{y}) = T\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$$

これをきちんとかくこと．

$$= \begin{pmatrix} (x_3+y_3) - (x_2+y_2) \\ (x_1+y_1) - (x_3+y_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_3 - y_2 \\ y_1 - y_3 \end{pmatrix} = T\vec{x} + T\vec{y}$$

より $T(\vec{x}+\vec{y}) = T\vec{x} + T\vec{y}$ が示された.

2. $\forall \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\forall c \in \mathbb{R}$ に対し

$T(c\vec{x}) = cT\vec{x}$ を示す.

$$T(c\vec{x}) = T\begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \\ cx_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} cx_3 - cx_1 \\ cx_1 - cx_3 \end{pmatrix}$$

$$= c\begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix} = cT\vec{x}$$

となるので $T(c\vec{x}) = cT\vec{x}$ が示された.

1. と 2. より T は線形写像である　□.

定義

$\mathbb{K}$ 上の線形空間 V, W に対し

$$\mathrm{Hom}(V, W) := \{T : V \to W, \text{線形写像}\}$$

と定める.

① 「$T : V \to W$ が線形写像」を「$T \in \mathrm{Hom}(V, W)$」とかくことができる.

$T, S \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $\alpha \in \mathbb{K}$ に対し.

加法 $T+S$ とスカラー倍 αT を $\forall \vec{x} \in V$ に対して

$$(T+S)(\vec{x}) := T\vec{x} + S\vec{x}$$

$$(\alpha T)(\vec{x}) := \alpha T\vec{x}$$

Hom(V.W) の加法

W の加法

で定義する. $T+S, \alpha S \in \mathrm{Hom}(V.W)$ となる (問題)

⑩ 加法"$+$"と等号"$=$"がどの空間においての記号かを注意することはとても重要.

定理

V, W を $\mathbb{K}$ 上の線形空間とすると $\mathrm{Hom}(V, W)$ は $\mathbb{K}$ 上の線形空間となる。零ベクトル $0 \in \mathrm{Hom}(V, W)$ は $\vec{x} \in V$ に対して

$$0(\vec{x}) := \vec{0}_W$$ ← W における零ベクトル

であり, $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ に対する逆ベクトル $-T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ は $\vec{x} \in V$ に対して

$$(-T)(\vec{x}) := -(T\vec{x})$$

で与えられる.

↖ W における $T\vec{x}$ の逆ベクトル

証明　全部は証明しない. 一部は問題とする

1. $\forall T, S \in \mathrm{Hom}(V, W)$ に対し. 交換法則

$T+S = S+T$ を示す.

↑ $\mathrm{Hom}(V, W)$ の等号

$\forall \vec{x} \in V$ に対して

$$(T+S)(\vec{x}) = T\vec{x} + S\vec{x} \quad (\because \mathrm{Hom}(V, W) \text{ の加法の定義})$$

W の等号

$$= S\vec{x} + T\vec{x} \quad (\because W \text{ の交換法則})$$

$$= (S+T)(\vec{x}) \quad (\because \mathrm{Hom}(V, W) \text{ の加法の定義})$$

となるので $T+S = S+T$ が成り立つ.

↑ $\mathrm{Hom}(V, W)$ の等号

2. ${}^{\forall}T \in \mathrm{Hom}(V,W)$, ${}^{\forall}\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ に対して

$(\alpha+\beta)T = \alpha T + \beta T$ を示す.

$\mathbb{K}$の加法　$\mathrm{Hom}(V,W)$の等号　$\mathrm{Hom}(V,W)$の加法

※ ＋と書いていても. 状況が異なることに注意.

${}^{\forall}\vec{x} \in V$ に対して

$((\alpha+\beta)T)(\vec{x}) = (\alpha+\beta)T\vec{x}$ （∵ $\mathrm{Hom}(V,W)$のスカラー倍の定義）

$= \alpha T\vec{x} + \beta T\vec{x}$ （∵ Wでのスカラー倍の定義）

$= (\alpha T)(\vec{x}) + (\beta T)(\vec{x})$ （∵ $\mathrm{Hom}(V,W)$のスカラー倍の定義）

$= (\alpha T + \beta T)(\vec{x})$ （∵ $\mathrm{Hom}(V,W)$の加法の定義）

となるので $(\alpha+\beta)T = \alpha T + \beta T$ が成り立つ　□

$\mathrm{Hom}(V,W)$の等号

定義（線形同型）

V, V' : $\mathbb{K}$上の線形空間

※ $T: V \to V'$ が VからV'への線形同型写像

$\overset{\Longleftrightarrow}{\text{定義}}$ T は線形写像 かつ 全単射 すなわち

〈全射〉

${}^{\forall}\vec{y} \in V'$ に対し ${}^{\exists}\vec{x} \in V$ が存在して $\vec{y} = T\vec{x}$

〈単射〉

${}^{\forall}\vec{x}, \vec{x}' \in V$ に対し $T\vec{x} = T\vec{x}'$ ならば $\vec{x} = \vec{x}'$

◎ V と V' が 線形同型

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 線形同型写像 $T: V \to V'$ が存在する.

例

$\mathbb{R}^3$ と $P_2(\mathbb{R})$ は 線形同型 である.

証明

$T: \mathbb{R}^3 \to P_3(\mathbb{R})$ を $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$T\vec{a} := a_0 + a_1 X + a_2 X^2$$

と定義すると. Tは線形写像 かつ 全単射となる (問題)

例 (淀 p108)

線形写像 $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ が

$$T\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad -(*)$$

をみたすとき. $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を求める。

$c_1\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ をとくと $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x+3y \\ 3x-2y \end{pmatrix}$ (各自).

よって

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= T\left((-4x+3y)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (3x-2y)\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \\ &= (-4x+3y)T\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (3x-2y)T\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (\because T\text{は線形}) \\ &= (-4x+3y)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (3x-2y)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\because (*)) \\ &= \begin{pmatrix} -x+y \\ -4x+3y \\ -x+y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる.

§4.3 基底と次元

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ は次の性質を持っていた.

1. (線形独立)

$\forall c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ に対し

$$c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1=0 \text{ かつ } c_2=0 \text{ かつ } c_3=0 \\ (c_1=c_2=c_3=0) \end{array}$$

2. $\forall \vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し. $\exists c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ が存在して.

(この場合は $c_1 = x_1$, $c_2 = x_2$, $c_3 = x_3$ とすると)

$$\vec{x} = c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

とできる. $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ でも同じことが成り立つ.

だから $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ は重要なベクトル(の組)

1. 2. の性質をもう少しくわしくみることにする.

以下. V を $\mathbb{K}$-線形空間とする.

定義 (線形結合, 一次結合)

$k \in \mathbb{N}$, $\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_k} \in V$, $c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{K}$ に対し

$$c_1\vec{a_1} + c_2\vec{a_2} + \cdots + c_k\vec{a_k}$$

の形のベクトルを $\vec{a_1}, \cdots, \vec{a_k}$ の線形結合(一次結合)という.

定義（線形独立, 一次独立）

$k \in \mathbb{N}$ に対し

$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_k \in V$ が 線形独立（一次独立, linearly independent）

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 「${}^\forall c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{K}$ に対し,

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \cdots + c_k\vec{a}_k = \vec{0} \Longrightarrow c_1 = 0 \text{ かつ } c_2 = 0 \text{ かつ} \cdots \text{かつ } c_k = 0$$」

線形独立の否定, つまり,

${}^\forall c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{K}$ に対し

$$c_1\vec{a}_1 + \cdots + c_k\vec{a}_k = \vec{0} \Rightarrow c_1 = 0 \text{ かつ } c_2 = 0 \text{ かつ} \cdots \text{かつ } c_k = 0.$$

の否定は（$\forall \to \exists$, $p \Rightarrow q \to p$ かつ $\neg q$, かつ → または）

${}^\exists c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{K}$ に対し $c_1\vec{a}_1 + \cdots + c_k\vec{a}_k = \vec{0}$ かつ（$c_1 \neq 0$ または $c_2 \neq 0$ または $\cdots$ または $c_k \neq 0$）

となる.

定義（線形従属, 一次従属）

$k \in \mathbb{N}$ に対し

$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_k \in V$ が 線形従属（一次従属, linearly dependent）

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 「${}^\exists c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{K}$ が存在して

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + \cdots + c_k\vec{a}_k = \vec{0} \text{ かつ } (c_1 \neq 0 \text{ または } c_2 \neq 0 \text{ または} \cdots \text{または } c_k \neq 0)$$

例 (演 p.46)

$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ が線形独立か

どうか調べる.

証明 (1. で線形独立を示そうとしてみる)

1. まず $^\forall c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ に対し $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_3\vec{a}_3 = \vec{0}$ を仮定してみる.

すると

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

だから

$$(*) \begin{cases} c_1 + 3c_2 + c_3 = 0 \\ 2c_1 + 6c_2 + 2c_3 = 0 \\ 3c_1 + c_2 - 5c_3 = 0 \end{cases}$$

となる. 拡大係数行列を使って変形すると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1 \\ r_3 \leftarrow r_3 - 3r_1}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \leftarrow -\frac{1}{8}r_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1 \leftarrow r_1 - r_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

となるから $\lambda \in \mathbb{R}$ として

$$c_1 = 2\lambda, \quad c_2 = -\lambda, \quad c_3 = \lambda$$

が (*) の解だから. とくに $\lambda = 1$ として. $c_1 = 2, c_2 = -1, c_3 = 1$

が解となり「$c_1 = c_2 = c_3 = 0$」となっていない. よって線形独立

ではない.

2. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ が線形従属であることを示す.

$c_1 = 2,\ c_2 = -1,\ c_3 = 1$ とおくと.

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_3\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる. さらに「$c_1 \neq 0$ または $c_2 \neq 0$ または $c_3 \neq 0$」となるから.
線形従属となる □

例 (浅 p. 46)

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

が線形独立か否か調べる.

証明

1. ${}^\forall c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ に対し. $c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 + c_3\vec{a}_3 + c_4\vec{a}_4 = \vec{0}$
を仮定する. すると.

$$(*) \quad \begin{cases} c_1 - c_2 + c_4 = 0 \\ 2c_1 + c_2 + 3c_3 + c_4 = 0 \\ c_3 = 0 \\ -c_1 + 2c_2 + 2c_4 = 0 \end{cases}$$

となる(各自). 拡大係数行列を使って変形すると

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_4 \leftarrow r_4 + r_1]{r_2 \leftarrow r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_4]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{r_4 \leftarrow r_4 - 3r_2 \\ \text{そのあと} \\ r_4 \leftarrow r_4 - 3r_3}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \end{array}\right)$$

となるので $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ となることがわかる(各自).

従って線形独立である □

命題3.1

$\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_k \in V$ が線形従属.

$\underset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \cdots, \vec{a}_k$ のある1個は他の$(k-1)$個のベクトルの線形結合でかける.

証明

$(\Longrightarrow)$ $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_k$ が線形従属と仮定する。すると

$c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{K}$ が存在して

$$c_1 \vec{a}_1 + \cdots + c_k \vec{a}_k = \vec{0}$$

かつ

$c_1 \neq 0$ または $c_2 \neq 0$ または $\cdots$ または $c_k \neq 0$

とできるから $c_l \neq 0$ となる $1 \leq l \leq k$ がとれる.

$$c_l \vec{a}_k = -c_1 \vec{a}_1 - \cdots - c_{l-1} \vec{a}_{l-1} - c_{l+1} \vec{a}_{l+1} - \cdots - c_k \vec{a}_k$$

だから

$$\vec{a}_l = -\frac{c_1}{c_l} \vec{a}_1 - \cdots - \frac{c_{l-1}}{c_l} \vec{a}_{l-1} - \frac{c_{l+1}}{c_l} \vec{a}_{l+1} - \cdots - \frac{c_k}{c_l} \vec{a}_k$$

となる. よって $\vec{a}_l$ は $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{l-1}, \vec{a}_{l+1}, \cdots, \vec{a}_k$ の

線形結合でかける.

$(\Leftarrow)$ $\vec{a}_\ell$ が $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_{\ell-1}, \vec{a}_{\ell+1}, \cdots, \vec{a}_k$ の線形結合でかけると仮定する．するとある $b_1, \cdots, b_{\ell-1}, b_{\ell+1}, \cdots, b_k \in \mathbb{K}$ が存在して

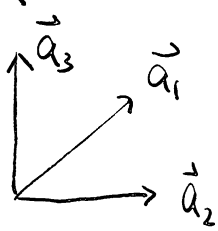
$$\vec{a}_\ell = b_1 \vec{a}_1 + \cdots + b_{\ell-1} \vec{a}_{\ell-1} + b_{\ell+1} \vec{a}_{\ell+1} + \cdots + b_k \vec{a}_k$$

とかける．従って

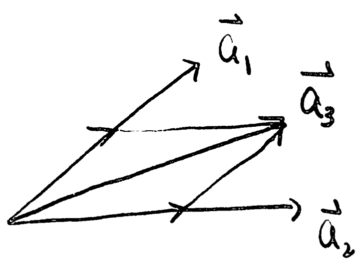
$$b_1 \vec{a}_1 + \cdots + b_{\ell-1} \vec{a}_{\ell-1} - \vec{a}_\ell + b_{\ell+1} \vec{a}_{\ell+1} + \cdots + b_k \vec{a}_k = \vec{0}$$

となり，$-1 \neq 0$ だから $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_k$ は線形従属となる □

〈命題3.1と線形独立の例：空間のベクトル〉



線形独立：$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ は平行六面体をなす．



線形従属：$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ が平行六面体をなさない．

$\vec{a}_3 = c_1 \vec{a}_1 + c_2 \vec{a}_2$ となる

$\Leftrightarrow$ $\vec{a}_3$ は $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ がつくる平面上にある．

〈基底〉

任意の空間ベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ は

$$\vec{x} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とかけた. つまり $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で $\mathbb{R}^3$ のすべてのベクトルを表せた.

<u>定義</u>

$\mathbb{K}$-線形空間 V が 有限次元

$\overset{\Longleftrightarrow}{\text{定義}}$ 有限個のベクトル $^\exists \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_k \in V$ が存在して

$^\forall \vec{x} \in V$ に対して. $\vec{x}$ は $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_k$ の線形結合でかける. すなわち $^\exists c_1, \cdots, c_k \in \mathbb{K}$ が存在して

$$\vec{x} = c_1 \vec{a}_1 + \cdots + c_k \vec{e}_k$$

とできる. V が有限次元でないとき. V は無限次元であるという.

<u>定義</u> (基底)

$\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n \in V$ が V の基底 (basis)

$\overset{\Longleftrightarrow}{\text{定義}}$ (1) $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ は線形独立

(2) $^\forall \vec{x} \in V$ に対して $^\exists c_1, \cdots c_n \in \mathbb{K}$ が存在して

$$\vec{x} = c_1 \vec{e}_1 + \cdots + c_n \vec{e}_n$$

とかける.

注意

基底の定義にあらわれる $c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{K}$ は1通りしかない

〈アイデア〉

1つしかないことを示す → もし2つあったら、実は同じになる。

証明

$c_1, \cdots, c_n, d_1, \cdots, d_n \in \mathbb{K}$ が

$$\vec{x} = c_1\vec{e}_1 + \cdots + c_n\vec{e}_n = d_1\vec{e}_1 + \cdots + d_n\vec{e}_n$$

とかけたとして $c_1 = d_1, \cdots, c_n = d_n$ をなることを示す。

このとき

$$(c_1 - d_1)\vec{e}_1 + \cdots + (c_n - d_n)\vec{e}_n = \vec{0}$$

となるから、$\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ が線形独立なことより

$$c_1 - d_1 = \cdots = c_n - d_n = 0.$$

となる。よって $c_1 = d_1, \cdots, c_n = d_n$ が示せた □

記号

$\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n \in V$ が V の基底であるとき、

$E = \langle \vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n \rangle$ とかくことにする。

定理3.4

V：有限次元線形空間、$V \neq \{0\}$.

$\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_r$ は線形独立.

$\Longrightarrow$ $\exists\, \vec{e}_{r+1}, \cdots, \vec{e}_n \in V$ が存在して

$\langle \vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n \rangle$ は V の基底になる。

証明のかわりにアイデアを例でみることにする.

例

$\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e_2}=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ を含む. $\mathbb{R}^3$ の基底を1つ求める.

$\mathbb{R}^3$ の任意のベクトルは $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ の線形結合でかけた.

1. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ は $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ の線形結合でかけない.

(もし $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=c_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ となる $c_1, c_2\in\mathbb{R}$ がとれたらどうなるか?)

2. $\vec{e_3}:=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ とおくと

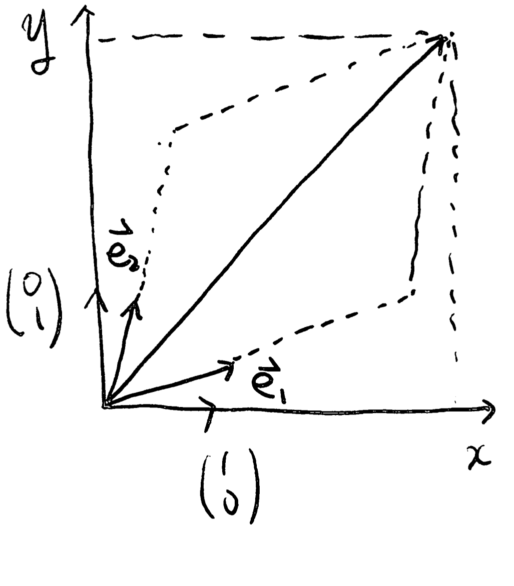
$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=0\vec{e_1}+0\vec{e_2}+\vec{e_3}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\vec{e_1}+\frac{1}{2}\vec{e_2}+\frac{1}{2}\vec{e_3}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\vec{e_1}+0\vec{e_2}+\vec{e_3}$$

とかける. 従って $\langle\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\rangle$ は $\mathbb{R}^3$ の基底となる (各自示せ) このことから $\mathbb{R}$ の基底は1通りではない

〈基底の意味〉



$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$
$$=c_1\vec{e_1}+c_2\vec{e_2}$$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を平行四辺形の2つの辺でどうかけるか?

〈次元〉

定理3.9

$\mathbb{K}$上の有限次元線形空間 V の任意の基底は、n コのベクトルからなる。すなわち、基底のとり方によってベクトルの数が異なることはない。

定義(次元)

有限次元線形空間 V の基底の持つベクトルの個数 n を V の次元 (dimension, dim.) といい、$n = \dim V$ で表す。

定理3.9の証明の概略

1. V が $\langle \vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n \rangle$ を基底にもつとき、V と $\mathbb{K}^n$ は線形同型となることを示す。実際、次が示せる。

命題3.7

線形写像 $\varphi: V \to \mathbb{K}^n$ を各 e_i に対し、

$$\varphi(e_i) := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{番目}$$

で定めると、φ は well-defined で同型写像となる。

2. $n \neq m$ ならば $\mathbb{K}^n$ と $\mathbb{K}^m$ は線形同型にならない。もし、$n>m$ として同型写像 $\varphi:\mathbb{K}^n\longrightarrow\mathbb{K}^m$ があったとすると、表現行列 $A\in M_{m,n}(\mathbb{K})$ が存在して

$$\varphi\vec{x}=A\vec{x},\qquad \vec{x}\in\mathbb{K}^n$$

とできる。斉次一次方程式系 $A\vec{x}=\vec{0}$ を考えて、少なくとも$(n-m)$個の非自明解をもつ(2章定理5.5)。これはφが単射であることに矛盾。(命題3.8も参照)

3. Vが基底$\langle \vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\rangle$, $\langle \vec{f}_1,\cdots,\vec{f}_m\rangle$を持ち、$n\neq m$と仮定する。このとき、同型写像 $\varphi:V\to\mathbb{K}^n$, $\psi:V\to\mathbb{K}^m$ が存在するが、これは$\mathbb{K}^n$と$\mathbb{K}^m$が線型同型にならないことに矛盾する。

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, shift right, "\varphi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ \mathbb{K}^n \arrow[ur, shift right, "\varphi^{-1}"'] \arrow[rr, "\psi\circ\varphi^{-1}"'] & & \mathbb{K}^m \end{tikzcd}$$

が同型写像になってしまう

例（三宅 p.49）

$$E = \langle \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

が $\mathbb{R}^3$ の基底となることを示す.

証明

1. $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ が線形独立であることを示す.

$^\forall c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ に対して $c_1\vec{e_1} + c_2\vec{e_2} + c_3\vec{e_3} = \vec{0}$ を仮定すると.

$$\begin{cases} 2c_1 + 7c_2 + 4c_3 = 0 \\ 2c_1 - c_2 + 5c_3 = 0 \\ 3c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases}.$$

これを解くと. $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ となる（各自）. よって.
$\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ は線形独立となる.

2. $^\forall \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して. $^\exists c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\vec{x} = c_1\vec{e_1} + c_2\vec{e_2} + c_3\vec{e_3} \qquad \text{—※1}$$

とかけることを示す. ※1 より.

$$\begin{cases} 2c_1 + 7c_2 + 4c_3 = x_1 \\ 2c_4 - c_2 + 5c_3 = x_2 \\ 3c_1 + 2c_2 = x_3 \end{cases}$$

となる. これを解くと

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{113} \begin{pmatrix} -10 & 8 & 39 \\ 15 & -12 & -2 \\ 7 & 17 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

となり. 実際に. この c_1, c_2, c_3 に対して

$$\vec{x} = c_1\vec{e_1} + c_2\vec{e_2} + c_3\vec{e_3}$$

となることがたしかめられる（各自）.

よって 1. 2. より $\langle \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3} \rangle$ は $\mathbb{R}^3$ の基底となる.

〈基底のとりかえ〉

$\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$ は $\mathbb{R}^2$ の基底，$\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \right\rangle$ も $\mathbb{R}^2$ の基底．

このとき．

$$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} & \wr\| \quad \leftarrow \text{命題3.7} \rightarrow & \| \\ \rightsquigarrow & \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \longleftrightarrow & \begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix} \end{array}$$

これらの $\leftrightsquigarrow$ の関係を考えたい．

$\mathbb{K}$-線形空間 V に対し $E = \langle \vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n \rangle$，
$F = \langle \vec{f}_1, \cdots, \vec{f}_n \rangle$ をともに V の基底とする．

命題3.8により，E, F に対応する同型写像
$\varphi : V \to \mathbb{K}^n$，$\psi : V \to \mathbb{K}^n$ が得られる．すなわち．

$${}^\forall \vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n = y_1\vec{f}_1 + \cdots + y_n\vec{f}_n \in V$$

に対して

$$\varphi(\vec{x}) = \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}, \quad \psi(\vec{x}) = \begin{pmatrix}y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}$$

となる．

このとき、$\varphi\circ\psi^{-1}:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n$

は線形写像になる

から、表現行列 $P\in M_n(\mathbb{K})$

がとれる。すなわち、

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\psi;F"'] \arrow[dr, "\varphi,E"] & \\ \mathbb{K}^n \arrow[ur, dashed, "\psi^{-1}"] \arrow[rr, "\varphi\circ\psi^{-1}"'] & & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

$\forall \vec{y}\in\mathbb{K}^n$ に対して

$$\varphi\circ\psi^{-1}(\vec{y}) = P\vec{y} \qquad \cdots (*1)$$

となる

<u>定義</u>（基底のとりかえ行列）

(*1)をみたす行列 $P\in M_n(\mathbb{K})$ を、

基底のとりかえ $E\to F$ の行列という。

〈基底のとりかえ行列の求め方〉

$$P\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = \varphi\circ\psi^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = \varphi\left(\psi^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\right) = \varphi(\vec{f_1})$$

$$\vdots$$

$$P\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix} = \varphi\circ\psi^{-1}\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix} = \varphi\left(\psi^{-1}\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \varphi(\vec{f_n})$$

となるから、$P=(\vec{p_1}\ \cdots\ \vec{p_n})$ と区分けすると

$$\vec{p_i} = \varphi(\vec{f_i}) \qquad i=1,\cdots,n$$

がわかる。$\vec{p_i} = \begin{pmatrix}p_{1i}\\\vdots\\p_{ni}\end{pmatrix}$ とかくて。

$$\vec{f}_i = p_{1i}\vec{e}_1 + p_{2i}\vec{e}_2 + \cdots + p_{ni}\vec{e}_n$$

となる(添字に注意). 形式的には

$$(\vec{f}_1 \cdots \vec{f}_n) = (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_n)\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

となっている.

<u>例</u> (塗 p.112)

$$E = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad F = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

はともに $\mathbb{R}^3$ の基底である. 基底のとりかえ $E \to F$ の行列を求めてみる. そのためには

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = p_{11}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_{21}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + p_{31}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = p_{12}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_{22}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + p_{32}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = p_{13}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + p_{23}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + p_{33}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を解けばよい. 拡大係数行列は

(簡単のためにまとめてかくと)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 \leftarrow r_2 - r_1]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2 \leftarrow \frac{1}{2} r_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 \leftarrow r_3 - r_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1 \leftarrow r_1 - r_3]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_1 \leftarrow r_1 + 2r_2]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

だから.

$P_{11} = 2$, $P_{21} = 1$, $P_{31} = -1$

$P_{12} = 2$, $P_{22} = 3$, $P_{32} = 2$

$P_{13} = -1$, $P_{23} = 0$, $P_{33} = 1$

となる. よって基底のとりかえ E → F の行列は

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$ となる.

注意

拡大係数行列を基本変形した結果，

基底のとりかえ行列が得られた．これは形式的な

表記で

$$(\vec{f}_1 \cdots \vec{f}_n) = (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_n)\, P$$

に左から $(\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_n)$ の逆行列（もどき）を

かけたことに対応している．

例

$E = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$，$F = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ を $\mathbb{R}^2$ の基底，

$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ を基底のとりかえ $E \to F$

の行列とすると

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2) \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

$$= (p_{11}\vec{e}_1 + p_{21}\vec{e}_2 \quad p_{12}\vec{e}_1 + p_{22}\vec{e}_2)$$

だから

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = p_{11}\vec{e}_1 + p_{21}\vec{e}_2, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = p_{12}\vec{e}_1 + p_{22}\vec{e}_2$$

となる．たとえば

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3(p_{11}\vec{e}_1 + p_{21}\vec{e}_2) + 2(p_{12}\vec{e}_1 + p_{22}\vec{e}_2)$$

$$= (3p_{11} + 2p_{12})\vec{e}_1 + (3p_{21} + 2p_{22})\vec{e}_2$$

となる．

§4.4 線形部分空間

$\mathbb{R}^2$上の直線 $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : ax+by=0 \right\}$ や $\mathbb{R}^3$上の平面 $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : ax+by+cz=0 \right\}$ はまた線形空間になる.

このことを詳しくみてみよう. 以下 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$,
V : $\mathbb{K}$-線形空間とする.

<u>定義</u> (線形部分空間)

$W \subset V$ が V の(線形)部分空間 (sub space)

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ V の演算(加法とスカラー倍)で W が線形空間になる.

㊟ 実際に部分空間となることを示すには, 次を示せばよい.

1. ${}^{\forall}\vec{x}, \vec{y} \in W$ に対し $\vec{x}+\vec{y} \in W$.
2. ${}^{\forall}\vec{x} \in W$, ${}^{\forall}c \in \mathbb{K}$ に対し $c\vec{x} \in W$.

<u>例</u> $a, b \in \mathbb{R}$ に対し, $\mathbb{R}^2$上の直線

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : ax_1 + bx_2 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

が $\mathbb{R}^2$ の部分空間になることを示す.

<u>1.</u> ${}^{\forall}\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in W$ に対し $\vec{x}+\vec{y} \in W$ を示す.

$\vec{x}+\vec{y} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix}$ より

$$a(x_1+y_1)+b(x_2+y_2) = (ax_1+bx_2)+(ay_1+by_2)$$
$$= 0+0 = 0$$

だから $\vec{x}+\vec{y} \in W$ である.

2. $\forall \vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in W$, $\forall c \in \mathbb{K}$ に対し $c\vec{x} \in W$ を示す.

$c\vec{x}=\begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{pmatrix}$ より

$$a(cx_1)+b(cx_2) = c(ax_1+bx_2) = c\cdot 0 = 0$$

だから $c\vec{x} \in W$ である.

1. 2. より W は $\mathbb{R}^2$ の部分空間である. □

例

$$\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}) = \{ X \in M_n(\mathbb{R}) : {}^tX = X \}$$

とすると $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ は $M_n(\mathbb{R})$ の部分空間となる.

∵ 1. $\forall X, Y \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ に対し $X+Y \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ を示す.

$${}^t(X+Y) = {}^tX + {}^tY$$
$$= X+Y \quad (\because X, Y \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}))$$

より $X+Y \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ となる

2. $\forall X \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$, $\forall c \in \mathbb{R}$ に対し $cX \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ を示す.

$${}^t(cX) = c\,{}^tX$$
$$= cX \quad (\because X \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R}))$$

より $cX \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ となる.

1. 2. より $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{R})$ は $M_n(\mathbb{R})$ の部分空間となる □

命題 4.1

$W_1, W_2 \subset V$ が部分空間 $\Longrightarrow$ $W_1 \cap W_2$ はVの部分空間

証明

1. ${}^\forall \vec{x}, \vec{y} \in W_1 \cap W_2$ に対して $\vec{x}+\vec{y} \in W_1 \cap W_2$ を示す.

$\vec{x}, \vec{y} \in W_1$ で W_1 が部分空間より $\vec{x}+\vec{y} \in W_1$。

$\vec{x}, \vec{y} \in W_2$ で W_2 が部分空間より $\vec{x}+\vec{y} \in W_2$。

よって $\vec{x}+\vec{y} \in W_1 \cap W_2$ が示された.

2. ${}^\forall \vec{x} \in W_1 \cap W_2$, ${}^\forall c \in \mathbb{K}$ に対して $c\vec{x} \in W_1 \cap W_2$ を示す.

$\vec{x} \in W_1$ で W_1 が部分空間より $c\vec{x} \in W_1$。

$\vec{x} \in W_2$ で W_2 が部分空間より $cx \in W_2$。

よって $c\vec{x} \in W_1 \cap W_2$ が示された.

1. 2. より $W_1 \cap W_2$ は部分空間となる $\square$

注意

$W_1, W_2 \subset V$ が V の部分空間であっても.

$W_1 \cup W_2$ はVの部分空間には一般にはならない。

命題 4.2

$S \subset V$ に対し

$$\langle S \rangle := \{ c_1\vec{x}_1 + \cdots + c_k\vec{x}_k : c_i \in \mathbb{K}, \vec{x}_i \in S, i=1,\cdots,k \}$$

とおくと. $\langle S \rangle$ は V の部分空間となる. $\langle S \rangle$ を

S によって生成される(張られる)部分空間という.

証明　$S=\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3\}$ で示す.

1. $^\forall\vec{x},\vec{y}\in\langle S\rangle$ に対し $\vec{x}+\vec{y}\in\langle S\rangle$ を示す.

$^\exists c_1,c_2,c_3,c_1',c_2',c_3'\in\mathbb{K}$ が存在して

$\vec{x}=c_1\vec{x}_1+c_2\vec{x}_2+c_3\vec{x}_3$, $\vec{y}=c_1'\vec{x}_1+c_2'\vec{x}_2+c_3'\vec{x}_3$

とかける. よって

$$\begin{aligned}\vec{x}+\vec{y}&=(c_1\vec{x}_1+c_2\vec{x}_2+c_3\vec{x}_3)+(c_1'\vec{x}_1+c_2'\vec{x}_2+c_3'\vec{x}_3)\\&=(c_1+c_1')\vec{x}_1+(c_2+c_2')\vec{x}_2+(c_3+c_3')\vec{x}_3\\&\in\langle S\rangle\quad(\because c_i+c_i'\in\mathbb{K},\ ^\forall i=1,2,3)\end{aligned}$$

となるから $\vec{x}+\vec{y}\in\langle S\rangle$ がわかる

2. $^\forall\vec{x}\in\langle S\rangle$, $^\forall c\in\mathbb{K}$ に対し $c\vec{x}\in\langle S\rangle$ を示す.

$^\exists c_1,c_2,c_3\in\mathbb{K}$ が存在して $\vec{x}=c_1\vec{x}_1+c_2\vec{x}_2+c_3\vec{x}_3$ とかける. よって

$$\begin{aligned}c\vec{x}&=c(c_1\vec{x}_1+c_2\vec{x}_2+c_3\vec{x}_3)\\&=(cc_1)\vec{x}_1+(cc_2)\vec{x}_2+(cc_3)\vec{x}_3\\&\in\langle S\rangle\quad(\because cc_i\in\mathbb{K},\ ^\forall i=1,2,3)\end{aligned}$$

となるから $c\vec{x}\in\langle S\rangle$ がわかる.

1. 2. より $\langle S\rangle$ は V の部分空間となる　□

(注) $\langle\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\rangle$ を V の基底とかくのは.

$V=\langle\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\rangle$ となるからである.

命題 4.3

$W_1, W_2 \subset V$ が部分空間

$\Longrightarrow$ $W_1 + W_2 := \{\vec{x}_1 + \vec{x}_2 : \vec{x}_1 \in W_1, \vec{x}_2 \in W_2\}$

は V の部分空間 となる.

証明は演習にまわす.

定義（核，像）

V, W を $\mathbb{K}$ 上の線形空間，$T \in \mathrm{Hom}(V, W)$

とするとき.

$$\mathrm{Im}\, T := T(V) = \{T\vec{x} \in W : \vec{x} \in V\}$$
$$\mathrm{Ker}\, T := T^{-1}(\{\vec{0}_W\}) = \{\vec{x} \in V : T\vec{x} = \vec{0}_W\}$$

と定める. $\mathrm{Im}\, T$ を T の像 (Image)，$\mathrm{Ker}\, T$ を

T の核 (Kernel) という.

命題 4.4

V, W : $\mathbb{K}$ 上の線形空間，$T \in \mathrm{Hom}(V, W)$

とする.

(1) $\mathrm{Im}\, T$ は W の部分空間となる.

(2) $\mathrm{Ker}\, T$ は V の部分空間となる.

証明

(1) $^\forall \vec{y} \in \mathrm{Im}\, T$, $^\forall c \in \mathbb{K}$ に対し $c\vec{y} \in \mathrm{Im}\, T$ を示す.

$^\exists \vec{x} \in V$ が存在して $\vec{y} = T\vec{x}$ とできる. よって

$$\begin{aligned} c\vec{y} &= cT\vec{x} \\ &= T(c\vec{x}) \quad (\because\ T \in \mathrm{Hom}(V, W)) \\ &\in \mathrm{Im}\, T \quad (\because\ c\vec{x} \in V) \end{aligned}$$

となるので $c\vec{y} \in \mathrm{Im}\, T$ がわかる.

$^\forall \vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \mathrm{Im}\, T$ に対し $\vec{y}_1 + \vec{y}_2 \in \mathrm{Im}\, T$ は演習

(2) $^\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathrm{Ker}\, T$ に対し $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in \mathrm{Ker}\, T$ を示す.

$$\begin{aligned} T(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) &= T\vec{x}_1 + T\vec{x}_2 \quad (\because\ T \in \mathrm{Hom}(V, W)) \\ &= \vec{0}_W + \vec{0}_W \quad (\because\ \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathrm{Ker}\, T) \\ &= \vec{0}_W \end{aligned}$$

より $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in \mathrm{Ker}\, T$.

$^\forall \vec{x} \in \mathrm{Ker}\, T$, $^\forall c \in \mathbb{K}$ に対し $c\vec{x} \in \mathrm{Ker}\, T$ は演習

□.

〈次元公式〉

以下，でてくる線形空間は有限次元とする。

定理 4.5（次元公式）

V, W：$\mathbb{K}$上の線形空間，$T \in \mathrm{Hom}(V, W)$

$$\Longrightarrow \dim V = \dim(\mathrm{Ker}\,T) + \dim(\mathrm{Im}\,T).$$

証明 $n = \dim V$，$s = \dim(\mathrm{Ker}\,T)$ とする．$\mathrm{Ker}\,T \subset V$ の基底 $\langle \vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_s \rangle = \mathrm{Ker}\,T$ を拡張して V の基底 $V = \langle \vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n \rangle$ をつくる．公式を示すには．

$\langle T\vec{e}_{s+1}, \cdots, T\vec{e}_n \rangle$ が $\mathrm{Im}\,T$ の基底になることを示せばよい．

1. $\mathrm{Im}\,T = \langle T\vec{e}_{s+1}, \cdots, T\vec{e}_n \rangle$ を示す．

$\mathrm{Im}\,T \supset \langle T\vec{e}_{s+1}, \cdots, T\vec{e}_n \rangle$ を示す。$T\vec{e}_{s+1}, \cdots, T\vec{e}_n \in \mathrm{Im}\,T$ より $\langle T\vec{e}_{s+1}, \cdots, T\vec{e}_n \rangle \subset \mathrm{Im}\,T$ となる（演習）

$\mathrm{Im}\,T \subset \langle T\vec{e}_{s+1}, \cdots, T\vec{e}_n \rangle$ を示す．$\forall \vec{y} \in \mathrm{Im}\,T$ に対し．

$\exists \vec{x} \in V$ s.t. $\vec{y} = T\vec{x}$ とできる．$\langle \vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n \rangle = V$ より $\exists x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{K}$ s.t.

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$$

とできる．よって．

$$\begin{aligned}\vec{y} &= T\vec{x} \\ &= T(x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n) \\ &= x_1 T\vec{e}_1 + \cdots + x_s T\vec{e}_s + x_{s+1} T\vec{e}_{s+1} + \cdots + x_n T\vec{e}_n \\ &\qquad (\because T \in \mathrm{Hom}(V.W)) \\ &= x_{s+1} T\vec{e}_{s+1} + \cdots + x_n T\vec{e}_n \quad (\because \vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_s \in \mathrm{Ker}\, T) \\ &\in \langle T\vec{e}_{s+1}, \cdots, T\vec{e}_n \rangle.\end{aligned}$$

となるので $\mathrm{Im}\, T \subset \langle T\vec{e}_{s+1}, \cdots, T\vec{e}_n \rangle$ がわかる.

<u>2.</u> $T\vec{e}_{s+1}, \cdots, T\vec{e}_n$ が線形独立となることを示す.

${}^\forall c_{s+1}, \cdots, c_n \in \mathbb{K}$ に対し $c_{s+1} T\vec{e}_{s+1} + \cdots + c_n T\vec{e}_n = \vec{0}_W$

を仮定する. $T \in \mathrm{Hom}(V.W)$ より

$$T(c_{s+1}\vec{e}_{s+1} + \cdots + c_n\vec{e}_n) = \vec{0}_W$$

となるから $c_{s+1}\vec{e}_{s+1} + \cdots + c_n\vec{e}_n \in \mathrm{Ker}\, T = \langle \vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_s \rangle$

となる. 従って ${}^\exists c_1, \cdots, c_s \in \mathbb{K}$ s.t.

$$c_{s+1}\vec{e}_{s+1} + \cdots + c_n\vec{e}_n = c_1\vec{e}_1 + \cdots + c_s\vec{e}_s$$

となるから

$$c_1\vec{e}_1 + \cdots + c_s\vec{e}_s - c_{s+1}\vec{e}_{s+1} - \cdots - c_n\vec{e}_n = \vec{0}_V$$

になる. $\langle \vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n \rangle$ は V の基底だったから.

$\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ は線形独立となるので $c_1 = \cdots = c_n = 0$.

となる. よって $T\vec{e}_{s+1}, \cdots, T\vec{e}_n$ は線形独立になる.

<u>1.</u> <u>2.</u> より $\langle T\vec{e}_{s+1}, \cdots, T\vec{e}_n \rangle$ は $\mathrm{Im}\, T$ の基底になる $\square$

命題4.6

$W_1, W_2 \subset V$ 部分空間.

(1) $W_1 \subset W_2 \Rightarrow \dim W_1 \subset \dim W_2$

(2) $W_1 \subset W_2$, $\dim W_1 = \dim W_2 \Rightarrow W_1 = W_2$.

証明の方針

(1) W_1 の基底 $\langle \vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_s \rangle = W_1$ を W_2 に拡張すればよい

(2) W_1 の基底 $\langle \vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_s \rangle = W_1$ が W_2 の基底になることを示す. ☑

〈次元公式の応用〉

$\mathbb{K}$-線形空間 V に対し $\mathrm{Hom}(V, V) = \mathrm{Hom}(V)$

とかく.

定理 (交代定理)

V: $\mathbb{K}$上の線形空間, $T \in \mathrm{Hom}(V)$ ← この仮定が重要.

このとき.

$$T: \text{全射} \underset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} T: \text{単射}.$$

証明

($\Rightarrow$) Tが全射ならば $\mathrm{Im}\, T = V$ より次元公式から

$$\dim V = \dim(\ker T) + \dim V.$$

よって $\dim(\ker T) = 0$ より $\ker T = \{\vec{0}\}$ となる.

$\therefore$ Tは単射となる.

($\Leftarrow$) Tが単射ならば $\mathrm{Ker}\,T=\{0\}$ より.

$\dim(\mathrm{Ker}\,T)=0$. よって次元公式から.

$$\dim V = \dim(\mathrm{Im}\,T).$$

また $\mathrm{Im}\,T \subset V$ より $V=\mathrm{Im}\,T$ となるので Tは全射.

交代定理は行列の言葉でかくと. 次のようになる.

<u>定理</u>

$n\in\mathbb{N}$. $A\in M_n(\mathbb{K})$ とする.

(1) $^\forall\vec{y}\in\mathbb{K}^n$ に対し. $^\exists\vec{x}\in\mathbb{K}^n$ s.t $\vec{y}=A\vec{x}$

(つまり $\vec{y}=A\vec{x}$ は $\vec{x}\in\mathbb{K}^n$ について解がある)

$\Longrightarrow$ 斉次方程式 $A\vec{x}=\vec{0}$ は自明解 $\vec{x}=\vec{0}$ しかない.

(2) $\vec{x}\in\mathbb{K}^n$ について. 斉次方程式 $A\vec{x}=\vec{0}$ は自明解

$\vec{x}=\vec{0}$ しかない

$\Longrightarrow$ $^\forall\vec{y}\in\mathbb{K}^n$ に対して. $^\exists\vec{x}\in\mathbb{K}^n$ s.t $\vec{y}=A\vec{x}$.

① 定理は. 正方行列からなる「非斉次一次方程式系の可解性」と「斉次一次方程式系が自明解しかもたない」ことが同値であるという主張である. 可解性を調べるより. 自明解しかもたないことを示す方がかんたんなことが多い.

例

$1 \leq k \leq n$ に対し

$$W_k = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : x_{k+1} + \cdots + x_n = 0 \right\}$$

の次元、つまり $\dim W_k$ を求める.

1. $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$T\vec{x} := x_{k+1} + \cdots + x_n .$$

と定める. $T \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ を示す (各自)

2. $\mathrm{Ker}\, T = W_k$ をたしかめる.

$$\mathrm{Ker}\, T = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : T\vec{x} = 0 \} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \| \right.$$

$$= \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : x_{k+1} + \cdots + x_n = 0 \right\}$$

$$= W_k$$

3. T が全射, すなわち $\mathrm{Im}\, T = \mathbb{R}$ を示す (各自)

4. 次元公式より

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim (\mathrm{Ker}\, T) + \dim (\mathrm{Im}\, T)$$

つまり

$$n = \dim W_k + 1 \Rightarrow \dim W_k = n - 1$$

がわかる.

注 $\dim W$ を求めるには $\dim W = \mathrm{Ker}\, T$ となる全射な線形写像をみつけるとよい.

〈直和〉

V：$\mathbb{K}$上の線形空間．$W_1, W_2 \subset V$：部分空間

$\vec{x} \in W_1 + W_2 \Longrightarrow \exists \vec{y} \in W_1, \exists \vec{z} \in W_2$ s.t. $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$.

Q このy⃗，z⃗の選び方は1通りか？

定義（直和）

$W_1 + W_2$ が W_1 と W_2 の直和

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall \vec{x} \in W_1 + W_2$ に対して．

$\exists 1\, \vec{y} \in W_1$, $\exists 1\, \vec{z} \in W_2$ s.t.

唯一つ　　唯一つ．

$\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$.

このとき．$W_1 \oplus W_2$ とかくことにする．

Q どのような条件で $W_1 + W_2$ が $W_1 \oplus W_2$ となるか？

定理4.7

$W_1, W_2 \subset V$ 部分空間

$$\Longrightarrow \dim W_1 + \dim W_2 = \dim(W_1 + W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) \quad \text{—(*)}$$

証明のアイデア　$W_1 \cap W_2 \subset W_1, W_2$ より.

$\dim(W_1 \cap W_2) = r$.　$\dim W_1 = r + s$

$\dim W_2 = r + t$　とすると. (*) は

$$(r+s) + (r+t) = \dim(W_1 + W_2) + r$$

だから $\dim(W_1 + W_2) = r + s + t$ を示せばよい.

そのためには. $W_1 \cap W_2$ の基底 $\langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r \rangle$

を拡大して. W_1 の基底 $\langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r, \vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_s \rangle$

W_2 の基底 $\langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r, \vec{c}_1, \cdots, \vec{c}_t \rangle$

をつくったとき. $E = \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r, \vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_s, \vec{c}_1, \cdots, \vec{c}_t \rangle$

が $W_1 + W_2$ の基底であることを示せばよい.

あとは斉藤を参照せよ.　□

定理 4.8

$W_1, W_2 \subset V$: 部分空間，$W = W_1 + W_2$.

このとき. 次の3条件は同値.

(1)　$W = W_1 \oplus W_2$

(2)　$W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$

(3)　$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$.

証明

(2) $\Leftrightarrow$ (3) 定理4.7を用いればよい.
$\dim(\{\vec{0}\}) = 0$ に注意せよ.

(2) $\Rightarrow$ (1) $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$ を仮定する.
${}^{\forall} x \in V$ に対して ${}^{\exists}\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in W_1$, ${}^{\exists}\vec{z}_1, \vec{z}_2 \in W_2$
s.t. $\vec{x} = \vec{y}_1 + \vec{z}_1 = \vec{y}_2 + \vec{z}_2$ —(*)
とできたとして. $\vec{y}_1 = \vec{y}_2$, $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$ を示す. (*)より
2つあったら同じ
$\vec{y}_1 - \vec{y}_2 = \vec{z}_2 - \vec{z}_1$ $\Rightarrow$ 1つしかない.
となるので (左辺) $\in W_1$, (右辺) $\in W_2$ より.
$\vec{y}_1 - \vec{y}_2 \in W_1 \cap W_2$, $\vec{z}_2 - \vec{z}_1 \in W_1 \cap W_2$
となる. $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$ より
$\vec{y}_1 - \vec{y}_2 = \vec{0}$, $\vec{z}_2 - \vec{z}_1 = \vec{0}$
となるので $\vec{y}_1 = \vec{y}_2$, $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$ がわかる.
$\therefore$ $W = W_1 \oplus W_2$ が成り立つ.

(1) $\Rightarrow$ (2) 対偶を示す. $W_1 \cap W_2 \neq \{\vec{0}\}$ とすると
${}^{\exists}\vec{a} \in W_1 \cap W_2$ s.t. $\vec{a} \neq \vec{0}$ とできる.
このとき. $\vec{0} \in W = W_1 \cap W_2$ より.

$$\vec{0} = \underset{\substack{\cap \\ W_1}}{\vec{0}} + \underset{\substack{\cap \\ W_2}}{\vec{0}} = \underset{\substack{\cap \\ W_1}}{\vec{a}} + (\underset{\substack{\cap \\ W_2}}{-\vec{a}})$$

となる。これは $W = W_1 \oplus W_2$ でないことを意味している.

□

$W_1, \cdots, W_k \subset V$ が部分空間のとき. $W_1 + \cdots + W_k$ が $W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ となるか？も考えることができる. 結果のみ述べる.

<u>定理4.9</u>

$W_1, \cdots, W_k \subset V$：部分空間, $W = W_1 + \cdots + W_k$.

このとき. 以下の3条件は同値

(1) $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$

(2) $\forall i = 1, \cdots, k$ に対して

$$W_i \cap (W_1 + \cdots + W_{i-1} + W_{i+1} + \cdots + W_k) = \{\vec{0}\}$$

(3) $\dim(W_1 + \cdots + W_k) = \dim W_1 + \cdots + \dim W_k$

$$= \sum_{i=1}^{k} \dim W_i$$

例 (注 p.45)

$$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3$$

とするとき. $W_1 + W_2$ が直和になるかどうか調べる.

証明

$W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$ となるかを調べる. $W_1 \cap W_2 \supset \{\vec{0}\}$ は明らかなので. $W_1 \cap W_2 \subset \{\vec{0}\}$ を考える.

${}^\forall \vec{a} \in W_1 \cap W_2$ に対し. ${}^\exists \alpha_1, \alpha_2, \beta_1 \in \mathbb{R}$ s.t.

$$\vec{a} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

とできる. よって

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad -(*)$$

となるから $(*)$ をといてみる. $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix} = 24 \neq 0$ より $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R})$ となる。$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}^{-1}$ を $(*)$ に左からかけると

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる. よって $\vec{a} = \vec{0}$ となるので $W_1 \cap W_2 \subset \{\vec{0}\}$ が示された. $\therefore$ $W_1 + W_2$ は直和になる $\square$

例　上と同じ記号を使う。

$W_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3$ として、$W_1 + W_3$ が

直和になるか調べる。$\forall \vec{a} \in W_1 + W_3$ に対し

$\exists \alpha_1, \alpha_2, \beta_1 \in \mathbb{R}$ s.t. $\vec{a} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$

とできる。よって、

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{—(*1)}$$

となるから(*1)を解いてみる。$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} = 0$

より、~~基本変形~~ 行列を基本変形してみると

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \underset{(\text{各自})}{\cdots} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となり、(たとえば) $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -3$, $\beta_1 = 1$ が

(*)の解となる。よって、

$$2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \in W_1 + W_3 \neq \{0\}.$$

となるので　$W_1 + W_3$ は直和にならない。 □

◎ $\mathbb{R}^4$ より次元が大きいときは、演習書のようにした方がかんたん。

§4.5 線形変換と表現行列

V : $\mathbb{K}$-線形空間, $E=\langle \vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n\rangle$ 基底.

$\varphi : V\to\mathbb{K}^n$ を $\vec{v}=x_1\vec{e}_1+\cdots+x_n\vec{e}_n\in V$ に対し

$$\varphi(\vec{v})=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$

とすると φ は線形同型となる.

◎ $\mathbb{K}^n$ は V のコピーと思える。では $T\in\mathrm{Hom}(V)$ は コピー $\mathbb{K}^n$ の方でどのようにみえるか？

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[d, shift right, "\varphi"'] & V \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[r, "\varphi\circ T\circ\varphi^{-1}"'] \arrow[u, shift right, "\varphi^{-1}"'] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}$$

1. 右図より

$\varphi\circ T\circ\varphi^{-1} : \mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n$

は線形になる。

よって表現行列 $A\in M_n(\mathbb{K})$

が得られる。i.e. (← すなわち)

$$\varphi\circ T\circ\varphi^{-1}(\vec{x})=A\vec{x}\quad(\vec{x}\in\mathbb{K}^n).$$

となる。

2. $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ とかくことにする.

このとき

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix},\ A\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{12}\\\vdots\\a_{n2}\end{pmatrix},\ \cdots,\ A\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{1n}\\\vdots\\a_{nn}\end{pmatrix}$$

となる. 一方.

$$\varphi\circ T\circ\varphi^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\varphi\left(T\left(\varphi^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\right)\right)$$
$$=\varphi(T\vec{e}_1)$$

より $\varphi(T\vec{e}_1)=\begin{pmatrix}a_{11}\\\vdots\\a_{n1}\end{pmatrix}$ となる. i.e.

$$T\vec{e}_1=a_{11}\vec{e}_1+\cdots+a_{n1}\vec{e}_n$$

となる. 同様にして $k=1,\cdots,n$ に対し

$$T\vec{e}_k=a_{1k}\vec{e}_1+\cdots+a_{nk}\vec{e}_n$$
$$=(\vec{e}_1\ \cdots\ \vec{e}_n)\begin{pmatrix}a_{1k}\\\vdots\\a_{nk}\end{pmatrix}$$

となる. 形式的には.

$$(T\vec{e}_1\ \cdots\ T\vec{e}_n)=(\vec{e}_1\ \cdots\ \vec{e}_n)\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

となる。

定義（表現行列）

$T \in \mathrm{Hom}(V)$ に対して，上で得られた $A \in M_n(\mathbb{K})$ を T の基底 E に関する表現行列 という。

◎ 基底 E を $F = \langle \vec{f_1}, \cdots, \vec{f_n} \rangle$ にとりかえたら どうなるか？

基底のとりかえ $E \to F$ の行列を $P \in GL_n(\mathbb{K})$ とすると，左の図になる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{K}^n \arrow[dd, bend left=60, "P^{-1}"] \\
V \arrow[u, "(\varphi:E)"'] \arrow[r, "T"] \arrow[d, "(\psi:F)"'] & V \arrow[u, "(\varphi:E)"'] \arrow[d, "(\psi:F)"] \\
\mathbb{K}^n \arrow[uu, bend left=60, "P"] \arrow[r, "B"'] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}
$$

よって T の基底 F に関する表現行列は $P^{-1}AP$ となる．

命題

$T \in \mathrm{Hom}(V)$，E, F：V の基底．

$A \in M_n(\mathbb{K})$：T の基底 E に関する表現行列

$B \in M_n(\mathbb{K})$：　〃　F　〃

$P \in GL_n(\mathbb{K})$：基底のとりかえ $E \to F$ の行列

$$\Longrightarrow \quad B = P^{-1}AP$$

形式的証明

形式的に

$$(T\vec{f_1} \cdots T\vec{f_n}) = (\vec{f_1} \cdots \vec{f_n})B \quad \cdots (1)$$

$$(T\vec{e_1} \cdots T\vec{e_n}) = (\vec{e_1} \cdots \vec{e_n})A \quad \cdots (2)$$

$$(\vec{f_1} \cdots \vec{f_n}) = (\vec{e_1} \cdots \vec{e_n})P \quad \cdots (3)$$

ここで $P = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ とかくと、$k = 1, \cdots, n$ に対して

$$T\vec{f_k} = T(p_{1k}\vec{e_1} + \cdots + p_{nk}\vec{e_n}) \quad (\because (3))$$

$$= p_{1k}T\vec{e_1} + \cdots + p_{nk}T\vec{e_n} \quad (\because T \in \mathrm{Hom}(V))$$

$$= (T\vec{e_1} \cdots T\vec{e_n})\begin{pmatrix} p_{1k} \\ \vdots \\ p_{nk} \end{pmatrix}.$$

より

$$(T\vec{f_1} \cdots T\vec{f_n}) = (T\vec{e_1} \cdots T\vec{e_n})P$$

$$= (\vec{e_1} \cdots \vec{e_n})AP \quad (\because (2))$$

$$= (\vec{f_1} \cdots \vec{f_n})P^{-1}AP \quad (\because (3))$$

(1) より $B = P^{-1}AP$ となる

□

〈今後のまとめ〉

(i) 行列とは何か？

Ⓐ 線形空間上の線形写像のコピー

(ii) 階数とは何か？

Ⓐ 線形写像の像空間の次元

(iii) 基底のとりかえ行列とは何か？

Ⓐ 線形写像のコピーのしかたをかえること．

(iv) $A \in M_n(\mathbb{K})$, $P \in GL_n(\mathbb{K})$ として

$P^{-1}AP$ が対角行列になることとは？

Ⓐ 基底をうまく選ぶと，表現行列

（線形写像のコピー）が簡単になるということ．

(v) 行列の跡（トレース），行列式とは何か？

Ⓐ 対応する線形写像の固有値の

（重複をこめた）和と積

今後，上記のことを勉強することになる．

〈線形写像の像と核，全単射〉

V, W : $\mathbb{K}$ 上の線形空間，$T \in \mathrm{Hom}(V, W)$

定義（像と核）

$$\mathrm{Im}\, T := \{ T\vec{x} \in W : \vec{x} \in V \}$$
$$\mathrm{Ker}\, T := \{ \vec{x} \in V : T\vec{x} = \vec{0}_W \}$$

$\mathrm{Im}\, T$ を T の像，$\mathrm{Ker}\, T$ を T の核という．

定義（単射）

T が単射

$\overset{\text{}}{\underset{\text{定義}}{\iff}}$ ${}^\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V$ に対し $T\vec{x}_1 = T\vec{x}_2 \Rightarrow \vec{x}_1 = \vec{x}_2$

㊟ 単射がいっていること．

$\vec{y} \in W$ に対し．方程式 $\vec{y} = T\vec{x}$ が $\vec{x} \in V$

について解けたと仮定する．このとき．

解はただ1つしかない

命題

〈仮定〉

$\forall \vec{x} \in V$ に対して $T\vec{x} = \vec{0}_W \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}_V$

〈結論〉

Tは単射.

の定義とちがうこと.

定義は $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V$ と2つのベクトルを考えるのに対して. 命題は. $\vec{x} \in V$ と1つのベクトルだけ考えている

証明

単射を示すために. $\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in V$ に対して.

$T\vec{x}_1 = T\vec{x}_2$ を仮定して. $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ を示す.

このとき. $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ より

$$\vec{0}_W = T\vec{x}_1 - T\vec{x}_2 = T(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$$

となる. よって. 仮定より ($\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$ と. とることで)

$\vec{x}_1 - \vec{x}_2 = \vec{0}_V$ が成り立つ. よって $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$

が成りたつ □

注意

Tが線形写像でないとき. 上記の命題は成立しない.

$\boxed{\text{問}}$

Tが単射 $\underset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{Ker}\,T = \{\vec{0}_W\}$

を示せ.

定義 (全射)

Tが全射

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $^\forall \vec{y} \in W$ に対して $^\exists \vec{x} \in V$ s.t. $T\vec{x} = \vec{y}$.

◎ 全射がいっていること.

$^\forall \vec{y} \in W$ に対して. 方程式 $T\vec{x} = \vec{y}$ が $x \in V$ について解ける.

$\boxed{\text{問}}$

Tが全射 $\underset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{Im}\,T = W$

を示せ.

例

$T \in \mathrm{Hom}(M_3(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ を $A \in M_3(\mathbb{K})$ に対し

$$TA := \mathrm{tr}\,A$$

で定める. このとき. Tは全射であるが単射でない.

証明

1. Tが全射になることを示す. そのために.

$^\forall y \in \mathbb{K}$ に対し $TA = y$ を $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} \in M_3(\mathbb{K})$

について解いてみる.

$$y = TA = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

より) $a_{11} = y,\ a_{22} = a_{33} = 0$ とすれば

$y = TA$ となることがわかる. この考察をもとに.

きちんと証明をかく.

$^\forall y \in \mathbb{K}$に対して $A = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{K})$

とおく(定める, 決める, …)。 すると

$$TA = y + 0 + 0 = y$$

となるので Tは全射 となる.

2. T が単射 にならないことを示す.

単射 の否定は命題 より)

$\neg\ (^\forall A \in M_3(\mathbb{K})$ に対し $TA = 0 \Rightarrow A = O)$

$\Leftrightarrow\ ^\exists A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} \in M_3(\mathbb{K})$ s.t.

$TA = 0$ かつ $A \neq O$

だから、$A \neq O$ の条件で $TA = 0$ を解いてみる。

$$0 = TA = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

より、たとえば $a_{11} = 1$, $a_{22} = -1$, $a_{33} = 0$ とすれば

$0 = TA$ かつ $A \neq O$ がわかる。この考察をもと

にきちんと証明をかく。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{K}) \text{ とおくと。}$$

$$TA = 1 - 1 + 0 = 0$$

となるが $A \neq O$ である。よって T は単射でない $\square$

<u>例</u>

$P \in GL_n(\mathbb{K})$ とする。$T \in \mathrm{Hom}(M_n(\mathbb{K}), M_n(\mathbb{K}))$ を

$A \in M_n(\mathbb{K})$ に対し

$$TA := P\,A$$

と定めると、T は全単射となる。

<u>証明</u> 単射のみ示す。全射は各自考えよ。

$\forall A \in M_n(\mathbb{K})$ に対して、$TA = 0$ を仮定して $A = O$

を示す。$TA = 0$ より $PA = 0$ となるから、

P^{-1} を左からかけると $P^{-1}(PA) = P^{-1}0$, すなわち

$A = O$ となる。よって T は単射となる

$\square$

⑪ Tが線形でないとき、上の証明は使えない。

線形でないときにも使える証明をしてみる。

$^\forall A_1, A_2 \in M_n(\mathbb{K})$ に対し $TA_1 = TA_2$ を仮定する。すると $PA_1 = PA_2$ より左から P^{-1} をかけると $P^{-1}(PA_1) = P^{-1}(PA_2)$，すなわち $A_1 = A_2$ となる。よって、Tは単射となる。 $\square$