$\boxed{13.1}$

(1) 1. 2. 5. 9. は $+1$, それ以外は -1

(2) $-ab$ (3) $\lambda=0, a, b$.

(4)(a) $a=1, b=0$ のときは 線形写像. それ以外は 線形写像でない.

(b) 線形写像 になる.

(5) $\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し $T(\vec{x})=a\vec{x_1}+b\vec{x_2}+6\vec{x_3}$

(6) $ab=0$ のとき. 全射にならない。それ以外は 全射になる.

(7) (i) 線形従属. (ii) 線形独立

(8)
$$\begin{pmatrix} -2-2b & 2+2b & 6+6b \\ -10 & 6 & 2 \\ 2+b & 4+2b & 6+3b \end{pmatrix}$$

(9) (i) 部分空間になる (ii) $a=b=0$ のときは 部分空間になる.
それ以外は 部分空間にならない。

(10) $\dim V=(15-b)^2$, $\dim W_1=\frac{1}{2}(15-b)(16-b)$

$\dim W_2=(15-b)^2-1$

(11) (i) 直和になる. (ii) 直和にならない。

$\boxed{13.6}$

Tが単射 $\Rightarrow \mathrm{Ker}\,T = \{\vec{0}_V\}$ を示す.

1. $\mathrm{Ker}\,T \subset \{\vec{0}_V\}$ を示す. $\forall \vec{x} \in \mathrm{Ker}\,T$ に対して. $T\vec{x} = \vec{0}_W$ が成り立つ. Tは線形写像だから $T\vec{0}_V = \vec{0}_W$ が成り立つので $T\vec{x} = T\vec{0}_V$ となる. ここでTは単射だったから ($\vec{x}_1 = \vec{x}$, $\vec{x}_2 = \vec{0}_V$ とおくことにより) $\vec{x} = \vec{0}_V$ となる. 従って $\vec{x} \in \{\vec{0}_V\}$ となるから $\mathrm{Ker}\,T \subset \{\vec{0}_V\}$ が成り立つ.

2. $\{\vec{0}_V\} \subset \mathrm{Ker}\,T$ を示す. $\forall \vec{x} \in \{\vec{0}_V\}$ に対して. $\vec{x} = \vec{0}_V$ である. Tは線形写像だから $T\vec{x} = T\vec{0}_V = \vec{0}_W$ となるので $\vec{x} \in \mathrm{Ker}\,T$ となる. 従って $\{\vec{0}_V\} \subset \mathrm{Ker}\,T$ が成り立つ。

3. $\mathrm{Ker}\,T \subset \{\vec{0}_V\}$ と $\{\vec{0}_V\} \subset \mathrm{Ker}\,T$ が示せたので $\mathrm{Ker}\,T = \{\vec{0}_V\}$ が成り立つ。 □

(1) $\mathrm{Ker}\,T = \{\vec{0}_V\}$ を示さないといけないのだから. 証明することは「$\mathrm{Ker}\,T = \{\vec{0}_V\}$ の定義」である. だから. $\mathrm{Ker}\,T \subset \{\vec{0}_V\}$ と $\{\vec{0}_V\} \subset \mathrm{Ker}\,T$ を示す必要がある。