代数学幾何学 B 演習問題 1　　2013 年 10 月 3 日

以下, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$ とする.

問題 1.1.

次の置換の符号を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 3 & 6 & 5 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

問題 1.2.

4 文字の置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix}$ を全て求めよ.

問題 1.3.

3 文字の置換 $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix}$ に対して, $\operatorname{sgn}\sigma$ をそれぞれ求めよ.

問題 1.4.

$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, $\operatorname{sgn}\sigma$ を求めよ.

問題 1.5.

S_n を n 次対称群とし,

$$A:=\{\sigma\in S_n:\operatorname{sgn}\sigma=1\},\quad B:=\{\sigma\in S_n:\operatorname{sgn}\sigma=-1\}$$

とおく. $T:A\to B$ を任意の $\sigma\in A$ に対して,

$$T\sigma:=\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\sigma$$

で定義する. T が全射であることを示せ.

問題 1.6.

問題 1.5 において, T が単射になることを示せ.

問題 1.7.

S_n を n 次対称群とする. $\sigma,\tau\in S_n$ に対して, $\operatorname{sgn}(\sigma\tau)=\operatorname{sgn}\sigma\operatorname{sgn}\tau$ を示せ.

問題 1.8.

n 変数 $x_1, \ldots, x_n$ に対して

$$\begin{aligned}\Delta(x_1, \ldots, x_n) &= \prod_{i<j}(x_j - x_i) \\ &= (x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2}) \cdots (x_n - x_2)(x_n - x_1) \\ &\quad \times (x_{n-1} - x_{n-2})(x_{n-2} - x_{n-3}) \cdots (x_{n-1} - x_2)(x_{n-1} - x_1) \\ &\qquad \times \cdots \times (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)\end{aligned}$$

を n 変数の差積という. $\sigma \in S_n$ に対して,

$$\sigma(\Delta(x_1, \ldots, x_n)) := \Delta(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

と定める. τ が n 変数の互換であるならば

$$\tau(\Delta(x_1, \ldots, x_n)) := -\Delta(x_1, \ldots, x_n)$$

となることを示せ.

代数学幾何学 B 演習問題 2　　2013 年 10 月 10 日

以下, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$ とする.

問題 2.1.

3 次の対称群 S_3 を

$$S_3 := \{\mathbf{1}_3=\sigma_1, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}=\sigma_2, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\sigma_3,$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}=\tau_1, \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}=\tau_2, \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}=\tau_3\}$$

と書くことにする. 定義にもとづいて $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}\in M_3(\mathbb{K})$ の行列式 $\det A$ を求めよ.

問題 2.2.

$A\in M_n(\mathbb{K})$ とする.

(1) $A\in GL_n(\mathbb{K})$ ならば, $\det A\neq 0$ を示せ.

(2) $\det A\neq 0$ ならば $A\in GL_n(\mathbb{K})$ を示せ (ヒント: A を標準形に基本変形すると, ある正則行列 $P,Q\in GL_n(\mathbb{K})$ がとれて, $A=P\mathrm{diag}(1,1,\ldots,1,0,\ldots,0)Q$ とできる. このときに両辺の行列式を考えて, A の階数がどうなっているかを調べよ).

問題 2.3.

S_n を n 次対称群とする. $f:S_n\to S_n$ を $\sigma\in S_n$ に対して

$$f(\sigma):=\sigma^{-1}$$

で定義するとき, f が全単射となることを示せ.

問題 2.4.

S_n を n 次対称群とする. $\tau\in S_n$ を一つ固定し, $g_\tau:S_n\to S_n$ を $\sigma\in S_n$ に対して

$$g_\tau(\sigma):=\tau\sigma$$

で定義するとき, f が全単射となることを示せ.

問題 2.5.

$A=(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \ldots\ \boldsymbol{a}_n)\in M_n(\mathbb{K})$ に対し, ある二つの列が等しい, すなわち $i\neq j$ かつ $\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{a}_j$ となる $1\leq i,j\leq n$ があるならば $\det A=0$ となることを示せ.

問題 2.6.

$A=(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \ldots\ \boldsymbol{a}_n)\in M_n(\mathbb{K})$, $c\in\mathbb{K}$, $i\neq j$ に対して,

$$\det(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \ldots\ \boldsymbol{a}_i+c\boldsymbol{a}_j\ \ldots\boldsymbol{a}_n)=\det A$$

を示せ.

問題 2.7.

次の行列式を求めよ.

$$(1)\ \det\begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 10 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(2)\ \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & -4 \\ -7 & 1 & -8 & 6 \\ 10 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

問題 2.8.

次の行列式を求めよ.

$$(1)\ \det\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ -3 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & -3 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(2)\ \det\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & -4 & 1 & 3 \\ -5 & -4 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

問題 2.9 (巡回行列式)**.**

$a, b, c, d \in \mathbb{K}$ に対し, 次の行列式を因数分解せよ (ヒント: 2 列目, 3 列目, 4 列目を 1 列目に足してみよ).

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

問題 2.10 (Vandermonde の行列式)**.**

$x, y, z, w \in \mathbb{K}$ に対し, 次の行列式を因数分解せよ.

$$\det\begin{pmatrix} x^0 & y^0 & z^0 & w^0 \\ x^1 & y^1 & z^1 & w^1 \\ x^2 & y^2 & z^2 & w^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 & w^3 \end{pmatrix}$$

代数学幾何学 B 演習問題 3　　2013 年 10 月 17 日

以下, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ とする.

問題 3.1.

次の行列式を求めよ (ヒント: まず, 行列がどう書けるか調べよ).

(1) $1 \leq i, j \leq 4$ に対して, $\det P_4(i,j) = \det(E_4 - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji})$.

(2) $c \in \mathbb{K}$, $c \neq 0$ に対して, $\det(Q_4(i:c)) = \det(E_n + (c-1)E_{ii})$.

(3) $c \in \mathbb{K}$, $1 \leq i, j \leq 4$, $i \neq j$ に対して $\det(R_n(i,j;c)) := \det(E_n + cE_{ij})$.

問題 3.2.

次の行列式を求めよ.

(1) $\det \begin{pmatrix} 97 & 98 & 99 \\ 99 & 97 & 98 \\ 98 & 99 & 97 \end{pmatrix}$ (ヒント: $99-98=1$ などをうまく使って, 成分を小さくせよ)

(2) $\det \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{5}{6} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix}$ (ヒント: 分数をくくりだして, 成分を整数にせよ)

問題 3.3.

次の各問いに答えよ.

(1) $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

(2) $P^{-1} \begin{pmatrix} 7 & 10 & 8 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -8 & -5 \end{pmatrix} P$ を計算せよ.

(3) $\det \begin{pmatrix} 7 & 10 & 8 \\ -1 & 0 & -1 \\ -4 & -8 & -5 \end{pmatrix}$ を求めよ.

問題 3.4.

$A = \det \begin{pmatrix} -8 & -2 & -1 \\ 6 & -3 & -2 \\ -6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ と $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して, 次の方程式を考える.

$$\det(\lambda E_3 - A) = 0 \tag{3.1}$$

(1) $\lambda = 1$ が (3.1) の解となることを示せ.

(2) (3.1) の解を全て求めよ.

問題 3.5.

$A \in M_n(\mathbb{K})$ に対して, $a = \det(A)$ とする. 次の行列式を a を用いて表せ.

(1) $P \in GL_n(\mathbb{K})$ に対して, $\det(P^{-1}AP)$

(2) $\lambda \in \mathbb{K}$ に対して, $\det(\lambda A)$

(3) $A \in GL_n(\mathbb{K})$ を仮定して $\det(A^{-1})$(ヒント: $AA^{-1} = E_n$ の両辺の行列式を取る)

(4) $\det({}^tAA)$

問題 3.6.

次の各問いに答えよ.

(1) $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ に対して

$$\det \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix} = (af - be + cd)^2$$

を示せ.

(2) $A \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$ が歪対称行列, すなわち ${}^tA = -A$ をみたすとき, $\det(A) = 0$ を示せ.

問題 3.7.

$A \in M_n(\mathbb{Z})$ について次を示せ.

(1) $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ で $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$, すなわち, 逆行列が存在して, その成分がすべて整数ならば $\det A = +1$ または $\det A = -1$.

(2) 逆に $\det A = +1$ または $\det A = -1$ ならば, $A \in GL_n(\mathbb{Z})$ で $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$. (ヒント: Cramer の公式を用いる)

問題 3.8.

空間 $\mathbb{R}^3$ 上の, 一直線上にない三点 $P_i = \det \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$ $(i = 1, 2, 3)$ を通る平面の方程式は

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

で与えられることを示せ (ヒント: 示すことは, P_1, P_2, P_3 が方程式をみたすことと, 方程式が x, y, z の一次式となっていること).

問題 3.9.

$x \in \mathbb{K}$ に対し, 次の行列式を因数分解せよ.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x & x & x & x \\ x & 1 & x & x & x \\ x & x & 1 & x & x \\ x & x & x & 1 & x \\ x & x & x & x & 1 \end{pmatrix}$$

代数学幾何学 B 演習問題 4　　2013 年 10 月 28 日

以下, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ とする.

問題 4.1.

$A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n) \in GL_n(\mathbb{K})$, $b = (b_j)_{1 \le j \le n} \in \mathbb{K}^n$ に対して, 次の一次方程式系

$$(*) \qquad A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

を考える.

(1) (*) の解は $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ で与えられることを示せ.

(2) (*) の解を $\boldsymbol{x} = (x_j)_{1 \le j \le n}$ とおく. このとき,

$$\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$$

となることを示せ. ただし, 区分けによる計算をしてよい.

問題 4.2 (Cramer の公式)**.**

問題 4.1 と同じ記号を用いる. $1 \le i \le n$ に対して,

$$\det(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{i-1}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}_{i+1}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)$$

を計算せよ. そして,

$$x_i = \frac{\det(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_{i-1}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{a}_{i+1}\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n)}{\det A}$$

となることを示せ.

問題 4.3.

$x \in \mathbb{R}$ に対して, 次の行列の階数を求めよ (ヒント: 行列式を求めて, 場合わけの候補を決めてから計算する方が簡単).

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x & x & x \\ x & 1 & x & x & x \\ x & x & 1 & x & x \\ x & x & x & 1 & x \\ x & x & x & x & 1 \end{pmatrix}$$

問題 4.4 (固有値と固有ベクトル)**.**

$A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して, $\lambda \in \mathbb{C}$ が A の**固有値**であるとは, 「$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ となる解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ を持つ」ときをいう. また, このとき, 解 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ を固有値 λ に対する**固有ベクトル**という.

(1) $A \in M_n(\mathbb{C})$ に対して, $\lambda \in \mathbb{C}$ を固有値, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ を固有値 λ に対する固有ベクトルとする. このとき, $(\lambda E_n - A)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となることと, $\det(\lambda E_n - A) = 0$ となることを示せ.

(2) $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して, $\det(\lambda E_n - A) = 0$ となるならば, λ は A の固有値となることを示せ. なお, $\det(\lambda E_n - A)$ を A の**固有多項式**という.

(3) 次の行列の固有値をすべて求めよ. ただし, $k \in \mathbb{R}$ とする.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & k & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

問題 4.5 (行列式の幾何学的意味).

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{とする.}$$

(1) $1 \le i, j \le 4$ に対して内積 $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j)$ を計算せよ.

(2) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ を各辺とする四次元 (超) 平行体の体積を V とする. V の値はいくつにすべきか？理由をつけて答えよ.

(3) $\det(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4)$ を求めよ.

コメントと作題意図

今回は試験に出すには少し難しすぎる問題をあつめています.

問題 4.1, 4.2 は講義でやらなかった, 一次方程式系に対する Cramer の公式の導出についてです. Cramer の公式は解の公式を与えるという意味ではよいのですが, 実際に計算するには計算が多すぎるので, **パソコンや計算機を用いるにしてもよい方法ではありません**. 手で計算するときでも Gauss の消去法を用いる方がたいてい簡単なので, 講義ではあえて触れませんでした. ただし, 文字式を含んだ一次方程式系には Cramer の公式が有効となる場合があります. 特に, 行列式関数の微分などを計算するときに有効となる場合があります.

問題 4.3 は文字式を含んだ行列の階数の計算です. 基本変形を用いると, 途中で場合わけが発生して厄介です[1]. 文字式を含んだ行列の階数を求めるときは, 先に行列式を求めて, 文字がどの値のときに正則でない, つまり階数が行列の次数と一致しないのかを確認してから計算した方が簡単です.

問題 4.4 は 2 年での線形代数学の目標である, 行列の固有値と固有ベクトルの求め方についてです. 行列の固有値を求めるには, 固有多項式の零点を探すのが基本的な方針です.

問題 4.5 は行列式が図形で考えたときにどのような意味をもつかについてです. 三次元までは (なんとか) 図示できるので, 体積を計算することはできますが, 四次元以上になると, 図示することが非常に困難なので (推測することはできるかもしれませんが, **客観的に**図示して説明することは今のところは不可能でしょう[2]), 数式だけで説明する必要があります. この問題は非常に特殊な場合で体積をどう定義すればよいか？とその定義と行列式がどのように対応しているか？を問題にしました. 厳密に証明しようとすると, いろいろなアプローチがあるとはいえ, かなり込み入った議論を要します[3]. 興味のある方は

雪江 明彦, 線形代数学概説, 培風館, 2006.

を参考にしてください.

[1]場合わけをせずに計算する方法もあるのですが, 多項式の除法の性質などを少し勉強してからでないとわかりづらいと思います.

[2]ドラえもんの四次元ポケットみたいなものが発明されたら説明できるようなるかもしれません

[3]厄介なところは, 面積とは何か？をどう定義するかと, 一見あたりまえに思える「回転移動や平行移動で体積がかわらない」をどうやって示すか？ということです.

代数学幾何学 B 演習問題 5　　2013 年 10 月 24 日

以下, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$ とする. V を $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする.

問題 5.1.

$\mathbf{0}, \mathbf{0}'\in V$ がともに V の零ベクトルであるとする. このとき, $\mathbf{0}=\mathbf{0}'$ を示せ[4](ヒント: $\mathbf{0}+\mathbf{0}'$ に零ベクトルの性質を用いよ).

問題 5.2.

$\boldsymbol{a}\in V$ に対して, $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}'\in V$ がともに $\boldsymbol{a}$ の逆ベクトルであるとする. このとき, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}'$ を示せ[5](ヒント: 零ベクトルの性質より $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\mathbf{0}$ となる. また, $\boldsymbol{b}'$ が $\boldsymbol{a}$ の逆ベクトルだから, $\mathbf{0}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}'$ となる. 組みあわせて, 結合法則を用いてみよ).

問題 5.3.

$\mathbb{R}=\mathbb{R}^1$ は通常の (標準的な) 和とスカラー倍で $\mathbb{R}$ 上の線形空間になる. 線形空間の定義のみを用いて, 次の問いに答えよ ($\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^1$ を区別して書いていることに注意せよ).

(1) $0\in\mathbb{R}$ とする. 任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^1$ に対して, $0\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ を示せ (ヒント: $0+0=0$ を使う).

(2) $-1\in\mathbb{R}$ とする. 任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^1$ に対して, $(-1)\boldsymbol{x}=-\boldsymbol{x}$ を示せ (ヒント: $1+(-1)=0$ を使う. 右辺の $-\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の逆ベクトルであって, $(-1)\boldsymbol{x}$ と同じものかどうかは証明する必要があることに注意せよ).

問題 5.4.

問題 5.3 と同じ記号を使う.

(1) $\mathbf{0}\in\mathbb{R}^1$ を零ベクトルとする. 任意の $a\in\mathbb{R}$ に対して, $a\mathbf{0}=\mathbf{0}$ を示せ (ヒント: $\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$ を使う).

(2) $-\mathbf{1}\in\mathbb{R}^1$, $-1\in\mathbb{R}$ とする. $(-1)(-\mathbf{1})=\mathbf{1}$ を示せ[6](ヒント: $(-1)(\mathbf{1}+(-\mathbf{1}))=\mathbf{0}$ の両辺に $\mathbf{1}$ をたしてみよ).

問題 5.5.

$P_n(\mathbb{K})$ を $\mathbb{K}$ の元を係数とする n 次多項式全体とする. $f(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$, $g(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}b_kX^k\in P_n(\mathbb{K})$ に対して, 和 $f(X)+g(X)\in P_n(\mathbb{K})$ を $f(X)+g(X):=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)X^k$ で定める. このとき, 結合法則をみたすことを示せ.

問題 5.6.

問題 5.5 と同じ記号を使う. $f(X)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kX^k\in P_n(\mathbb{K})$, $c\in\mathbb{K}$ に対して, スカラー倍 $cf(X)\in P_n(\mathbb{K})$ を $cf(X):=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(ca_k)X^k$ で定める. このとき, 任意の $f(X)\in P_n(\mathbb{K})$ と $c,d\in\mathbb{K}$ に対して $(c+d)f(X)=cf(X)+df(X)$ が成り立つことを示せ.

---

[4]このことにより, 零ベクトルは存在すればただ一つしかないことがわかる.

[5]このことにより, 逆ベクトルは存在すればただ一つしかないことがわかる.

[6]$\mathbb{R}=\mathbb{R}^1$ だからベクトルの記号を通常の書き方にすると, $(-1)\times(-1)=1$ となることがわかる.

問題 5.7.

集合 X に対して, X^* を X から $\mathbb{K}$ への写像全体とする. $f, g \in X^*$ に対して, 和 $f + g$ を, 任意の $x \in X$ に対して $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ で定義する. このとき, 和に関して交換法則が成り立つことを示せ.

問題 5.8.

問題 5.7 と同じ記号を使う. $f_0 \in X^*$ を, 任意の $x \in X$ に対して, $f_0(x) := 0$ と定義する (この $0 \in \mathbb{K}$ は $\mathbb{K}$ における零である). このとき, 任意の $f \in X^*$ に対して $f + f_0 = f$ となることを示せ[7].

問題 5.9.

問題 5.7, 5.8 と同じ記号を使う. $f \in X^*$ に対して $g \in X^*$ を, 任意の $x \in X$ に対して, $g(x) := -f(x)$ と定義する (この $-f(x) \in \mathbb{K}$ は $\mathbb{K}$ におけるマイナスである). このとき, $f + g = f_0$ となることを示せ[8].

問題 5.10.

問題 5.7 と同じ記号を用いる. $f \in X^*$, $c \in \mathbb{K}$ に対してスカラー倍 $cf \in X^*$ を, 任意の $x \in X$ に対して, $(cf)(x) := cf(x)$ と定義する. このとき, 任意の $f \in$ と $c, d \in \mathbb{K}$ に対して $(cd)f = c(df)$ となることを示せ.

[7]つまり, f_0 は X^* における零ベクトルである.

[8]つまり, g は f における逆ベクトルである.

代数学幾何学 B 演習問題 6　　2013 年 11 月 7 日

以下, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$ とする. V, W を $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする.

問題 6.1.

線形写像 $T: V\to W$ に対して, $T(\mathbf{0}_V)=\mathbf{0}_W$ を示せ. ただし, $\mathbf{0}_V$ は V における零ベクトル, $\mathbf{0}_W$ は W における零ベクトルである (ヒント: $\mathbf{0}_V+\mathbf{0}_V=\mathbf{0}_V$ と T の線形性を用いる).

問題 6.2.

$T:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^3$ を $\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\in\mathbb{C}^2$ に対して,

$$T\boldsymbol{z}=T\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}:=\begin{pmatrix} z_2 \\ z_1-z_2 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

で定義する. T は線形写像になるか？(注意: このような質問の問題では, 「答えのみでよい」と書かれていない限り, 証明もつけなければいけない. つまり, 「線形写像になる」が答えであれば, 線形写像であることの証明をつけること. 「線形写像にならない」が答えであれば, 線形写像にならないことの証明をつけること)

問題 6.3.

$n\in\mathbb{N}$ とする. $T:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ を $\boldsymbol{z}\in\mathbb{C}^n$ に対して,

$$T\boldsymbol{z}:=\|\boldsymbol{z}\|=\sqrt{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z})}$$

で定義する. T は線形写像になるか？

問題 6.4.

$T,S\in\mathrm{Hom}(V,W)$, $\alpha\in\mathbb{K}$ とする.

(1) $T+S\in\mathrm{Hom}(V,W)$, つまり $T+S$ が線形写像となることを示せ.

(2) $\alpha T\in\mathrm{Hom}(V,W)$, つまり αT が線形写像となることを示せ.

問題 6.5.

$T,S,R\in\mathrm{Hom}(V,W)$ に対して, 結合法則 $(T+S)+R=T+(S+R)$ を示せ.

問題 6.6.

$T,S\in\mathrm{Hom}(V,W)$, $\alpha\in\mathbb{K}$ に対して, $\alpha(T+S)=\alpha T+\alpha S$ を示せ.

問題 6.7.

$T:\mathbb{R}^3\to P_2(\mathbb{R})$ を $\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ に対して

$$T\boldsymbol{a}:=a_0+a_1X+a_2X^2$$

で定める. $T\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3,P_2(\mathbb{R}))$ を示せ.

問題 6.8.

問題 6.7 の T について, T が全射になることを示せ.

問題 6.9.

問題 6.7 の T について, T が単射になることを示せ.

問題 6.10.

$m,n\in\mathbb{N}$ に対して, $M_{m,n}(\mathbb{K})$ と $\mathbb{K}^{mn}$ が線形同型となることを示せ.

代数学幾何学 B 演習問題 7　　2013 年 11 月 14 日

以下, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$, $n,k\in\mathbb{N}$ とする. V, W を $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする.

問題 7.1.

次のベクトルの組は線形独立かどうか答えよ. ただし, a は学生番号の 1 の位, b は学生番号の 10 の位とする.

(1) $\begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ b \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

問題 7.2.

次の多項式の組は $P_2(\mathbb{R})$ を線形空間とみて, 線形独立となるかどうかを答えよ.

(1) $2X^2+5X$, X^2+2X+2, $3X^2+5X+1$

(2) $-X^2+4X+1$, $4X^2+X+3$, $9X^2-2X+5$

問題 7.3.

次の行列の組は $M_2(\mathbb{R})$ を線形空間とみて, 線形独立となるかどうかを答えよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

問題 7.4.

$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4\in V$ が線形独立のとき, 次のベクトルの組は線形独立となるかどうかを答えよ. ただし, 演習書 p.48 の証明の方法は論理的に正しくないので注意せよ.

(1) $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_1$

(2) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2+3\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_1+2\boldsymbol{a}_2+3\boldsymbol{a}_3+4\boldsymbol{a}_4$

問題 7.5.

$\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k\in V$ が線形独立ならば, $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_{k-1}$ が線形独立となることを示せ.

問題 7.6.

$\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k\in V$ が線形独立であり, $\boldsymbol{a}\in V$ が $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k$ の線形結合で書けないとする. このとき, $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}$ が線形独立となることを示せ.

問題 7.7.

$\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k\in V$ が線形独立であり, $\boldsymbol{a}\in V$ が $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k,\boldsymbol{a}\in V$ は線形従属とする. このとき, $\boldsymbol{a}$ が $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_k$ の線形結合で書けることを示せ.

問題 7.8.

$T \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in V$ とする. $T\boldsymbol{a}_1, \ldots, T\boldsymbol{a}_k \in W$ が線形独立ならば $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ も線形独立となることを示せ.

問題 7.9.

$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ が線形独立となるための必要十分条件は $A = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_k) \in M_{n,k}(\mathbb{R})$ について $\mathrm{rank}\, A = k$ となることを示せ.

代数学幾何学 B 演習問題 8　　2013 年 11 月 21 日

以下, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ とする. V を $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする.

問題 8.1.

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$ を含む, $\mathbb{R}^3$ の基底を一つ求めよ.

問題 8.2.

$E = \langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ を V の基底とする. 線形写像 $\varphi : V \to \mathbb{K}^n$ を各 $\boldsymbol{e}_i$ に対して,

$$\varphi(\boldsymbol{e}_i) := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (i \text{ 番目のみが } 1)$$

とおく. φ が well-defined であること, すなわち, 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して, $\varphi(\boldsymbol{x})$ が定まることを示せ (ヒント: $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ と書けることを使う).

問題 8.3.

問題 8.2 と同じ記号を使う. φ が全単射となることを示せ.

問題 8.4.

問題 8.2 と同じ記号を使う. φ^{-1} が線形写像となることを示せ.

問題 8.5.

次で定める $\mathbb{R}^3$ のベクトルの組 E が $\mathbb{R}^3$ の基底となることを示せ.

$$E = \left\langle \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

問題 8.6.

次で定める $\mathbb{R}^3$ のベクトルの組が $\mathbb{R}^3$ の基底となるか判定せよ.

(1) $E = \left\langle \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(2) $F = \left\langle \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

問題 8.7.

次で定める $\mathbb{R}^3$ のベクトルの組が $\mathbb{R}^3$ の基底となるか判定せよ.

(1) $E = \left\langle \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

(2) $F = \left\langle \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

問題 8.8.

$P_2(\mathbb{K})$ の次元, すなわち $\dim P_2(\mathbb{R})$ を求めよ (ヒント: $\langle 1, X, X^2 \rangle$ が基底になることを示せ).

問題 8.9.

$M_2(\mathbb{K})$ の次元, すなわち $\dim M_2(\mathbb{K})$ を求めよ (ヒント: 次の行列の組

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

が基底になることを示せ).

代数学幾何学 B 演習問題 9　　2013 年 11 月 28 日

以下, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする.

問題 9.1.

$\mathbb{R}^3$ の基底 E, F を次で定める.

$$E=\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle, \quad F=\left\langle \begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

基底の取り替え $E\to F$ の行列 P を求めよ.

問題 9.2.

問題 9.1 と同じ記号を用いる.

(1) 基底の取り替え $F\to E$ の行列 Q を求めよ.
(2) PQ を計算せよ.

問題 9.3.

$P_1(\mathbb{R})$ の基底 E, F を次で定める.

$$E=\langle X+3,-2X\rangle, \quad F=\langle 4X+2,5X-1\rangle$$

基底の取り替え $E\to F$ の行列を求めよ.

問題 9.4.

$W\subset\mathbb{R}^3$ を

$$W:=\left\{ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 : x_1+x_2+x_3=0 \right\}$$

とおく.

(1) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in W$ に対して $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in W$ を示せ.
(2) 任意の $\boldsymbol{x}$ と $c\in\mathbb{R}$ に対して $c\boldsymbol{x}\in W$ を示せ.

問題 9.5.

問題 9.4 と同じ記号を用いる. ベクトルの組 E を次で定める.

$$E=\left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$$

(1) E が線形独立となること, すなわち $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ が線形独立となることを示せ.
(2) 任意の $x\in W$ に対して, $c_1, c_2\in\mathbb{R}$ が存在して,

$$\boldsymbol{x}=c_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

と書けることを示せ.

問題 9.6.

問題 9.4, 9.5 と同じ記号を用いる．さらにベクトルの組 F を次で定める．

$$F = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

E と F はともに W の基底となる (みとめてよい)．基底の取り替え $E \to F$ の行列を求めよ．

問題 9.7.

$\mathbb{K}$ 上の線形空間 V に対して，$V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$ を V の**双対空間**とか**共役空間**という．$\boldsymbol{f} \in V^*$ を V 上の**線形汎関数**という．

$E = \langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ を V の基底とする．$\boldsymbol{f}_i \in V^*$ を各 $\boldsymbol{e}_j$ に対して

$$\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

で定める．各 $\boldsymbol{f}_i$ が well-defined であることを示せ．すなわち，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して，$\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x})$ が定まることを示せ．

問題 9.8 (難)**.**

問題 9.7 と同じ記号を用いる．$E^* := \langle \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n \rangle$ が V^* 上で線形独立となることを示せ (ヒント: 任意の $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ に対して，$c_1\boldsymbol{f}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{f}_n = \mathbf{0}_{V^*}$ を仮定する．各 $\boldsymbol{e}_j \in V$ について，$(c_1\boldsymbol{f}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{f}_n)(\boldsymbol{e}_j)$ を計算してみよ)．

問題 9.9 (難)**.**

問題 9.7 と同じ記号を用いる．任意の $\boldsymbol{f} \in V^*$ に対して，ある $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ が存在して，$\boldsymbol{f} = c_1\boldsymbol{f}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{f}_n$ と書けることを示せ．(ヒント: $\boldsymbol{f} = c_1\boldsymbol{f}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{f}_n$ と書けたとして，各 $\boldsymbol{e}_j \in V$ について $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{e}_j) = (c_1\boldsymbol{f}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{f}_n)(\boldsymbol{e}_j)$ を計算してみよ)．

代数学幾何学 B 演習問題 10　　2013 年 12 月 5 日

以下, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$, V は $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする.

問題 10.1.

$W_1, W_2 \subset V$ を部分空間とする. このとき

$$W_1+W_2=\{\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2 : \boldsymbol{x}_1\in W_1,\ \boldsymbol{x}_2\in W_2\}$$

は V の部分空間となることを示せ.

問題 10.2.

V, W を $\mathbb{K}$ 上の線形空間, $T\in\mathrm{Hom}(V,W)$ とする. このとき, $\mathrm{Im}\,T$ が W の線形空間となることを示せ.

問題 10.3.

V, W を $\mathbb{K}$ 上の線形空間, $T\in\mathrm{Hom}(V,W)$ とする. このとき, $\mathrm{Ker}\,T$ が V の線形空間となることを示せ.

問題 10.4.

次の集合が $\mathbb{R}^n$ の部分空間となることを示せ.

(1) $\left\{\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n : x_1+\cdots+x_n=0\right\}$.

(2) $1\le k\le n$ に対して, $\left\{\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n : x_k=\cdots=x_n=0\right\}$.

問題 10.5.

次の集合が部分空間とならないことを示せ.

(1) $\left\{\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n : x_1^2+\cdots+x_n^2=1\right\}$.

(2) $1\le k\le n$ に対して, $\left\{\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 : x_1=0\right\}\cup\left\{\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 : x_2=0\right\}$.

問題 10.6.

次の集合が $M_n(\mathbb{R})$ の部分空間となることを示せ.

(1) $\{X\in M_n(\mathbb{R}) : {}^tX=X\}$.

(2) $\{X\in M_n(\mathbb{R}) : {}^tX=-X\}$.

問題 10.7.

$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + \cdots + x_4 = 0 \right\}$ とおく.

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ が線形独立となることを示せ.

(2) $W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ となることを示せ.

問題 10.8.

$W \subset V$ を部分空間, $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m \in W$ とする. $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ が W の基底となるためには, 次を示せばよいことを示せ.

(1) $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ が線形独立

(2) $W = \langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_m \rangle$

問題 10.9.

$1 \leq k \leq n$ に対して, $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : x_k = \cdots = x_n = 0 \right\}$ の基底を一組求めよ.

代数学幾何学 B 演習問題 11　　2013 年 12 月 12 日

以下, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$ とする.

問題 11.1.

$a\in\mathbb{R}$ に対して $A(a)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2a&0&a\\0&-1&1\end{pmatrix}$ とおく. 任意の $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^3$ に対して, 方程式 $A(a)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ が $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ について可解になるための a の条件を求めよ.

問題 11.2.

$T:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}$ を $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{K}^n$ に対して

$$T\boldsymbol{x}:=x_1+\cdots+x_n$$

で定める. $T\in\mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n,\mathbb{K})$ を示せ.

問題 11.3.

問題 11.2 の記号をそのまま使う.

(1) T が全射になることを示せ.
(2) $\mathrm{Ker}\,T$ を求めよ.
(3) $\dim\mathrm{Ker}\,T$ を求めよ.

問題 11.4.

V を $\mathbb{K}$ 上の線形空間, $W\subset V$ を部分空間とする. $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_k\in V$ が, 任意の $1\leq l\leq k$ に対して, $\boldsymbol{e}_l\in W$ を満すならば, $\langle\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_k\rangle\supset W$ を示せ.

問題 11.5.

$W\subset M_n(\mathbb{K})$ を $W:=\{X\in M_n(\mathbb{K}):\mathrm{tr}\,X=0\}$ で定める. W が $M_n(\mathbb{K})$ の部分空間となることを示せ.

問題 11.6.

問題 11.5 の記号をそのまま使う. $\dim W$ を求めよ.

問題 11.7.

$\mathbb{R}^4$ の部分空間 $W_1,W_2\subset\mathbb{R}^4$ を $W_1=\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\0\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\3\\-3\end{pmatrix}\right\rangle$, $W_2=\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\-5\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-9\\-1\\-4\end{pmatrix}\right\rangle$ で定める. W_1+W_2 の基底を一組求めよ.

問題 11.8.

問題 11.7 の記号をそのまま用いる. $W_1\cap W_2$ の基底を一組求めよ.

問題 11.9.

$A\in M_n(\mathbb{K})$ とする. 斉次一次方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ は自明解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ しか持たないとする. このとき, $A\in GL_n(\mathbb{K})$ を示せ. ただし, 代数学幾何学 A の第 2 章定理 5.5 は使わないこと.

代数学幾何学 B 演習問題 12　　2013 年 12 月 19 日

以下, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$ とする. V は $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする.

問題 12.1.

$\mathbb{R}^4$ の部分空間 $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$ を $W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -b \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$
で定める. ただし, a, b はそれぞれ学生番号の一の位, 十の位とする. このとき, W_1+W_2 が直和になるかどうか調べよ.

問題 12.2.

$M_n(\mathbb{R})$ の部分空間 W_1 と W_2 をそれぞれ

$$W_1 := \{X \in M_n(\mathbb{R}) : {}^tX = X\}$$
$$W_2 := \{X \in M_n(\mathbb{R}) : {}^tX = -X\}$$

で定める.

(1) $M_n(\mathbb{R}) = W_1 + W_2$ となることを示せ.
(2) $M_n(\mathbb{R}) = W_1 \oplus W_2$ となることを示せ.

問題 12.3.

線形部分空間 $W_1, W_2, W_3 \subset V$ に対して, 和空間 $W_1+W_2+W_3$ を

$$W_1+W_2+W_3 := \{\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_3 : \boldsymbol{x}_1 \in W_1,\ \boldsymbol{x}_2 \in W_2,\ \boldsymbol{x}_3 \in W_3\}$$

で定義する. $W_1+W_2+W_3$ が V の部分空間となることを示せ.

問題 12.4.

線形部分空間 $W_1, W_2 \subset V$ が $V = W_1 \oplus W_2$ をみたすとする. 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して, $\boldsymbol{y} \in W_1$, $\boldsymbol{z} \in W_2$ がただ一つ存在して $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$ とできる. そこで, $P : V \to W_1$ を $P\boldsymbol{x} := \boldsymbol{y}$ で定義する. このとき, $P \in \mathrm{Hom}(V, W_1)$ を示せ.

注意.

問題 12.4 の線形写像 P を V の W_1 への**射影 (projection)** という.

問題 12.5.

部分空間 W_1, $W_2 \subset \mathbb{R}^4$ を

$$W_1 := \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{c} x_1+2x_2+x_3+3x_4=0, \\ x_1+3x_2+2x_3=0 \end{array} \right\}$$

$$W_1 := \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{c} 2x_1+x_3+2x_4=0, \\ -2x_1-x_2-2x_3+x_4=0 \end{array} \right\}$$

で定める. W_1+W_2 の次元および基底を求めよ.

問題 12.6.

$\mathbb{R}^4$ の部分空間 $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^4$ を $W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ で定める.

(1) $W_1 + W_2$ が直和になることを示せ.

(2) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ を W_1 のベクトルと W_2 のベクトルの和の形に表せ. ただし, a, b はそれぞれ自分の誕生月の十の位と一の位, c, d は誕生日の 10 の位と 1 の位とせよ.

問題 12.7.

$W \subset \mathbb{K}^n$ を線形部分空間とする. このとき

$$W^{\perp} := \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{K}^n : (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_{\mathbb{K}^n} = 0\}$$

と定義すると, $W^{\perp}$ が線形部分空間となることを示せ. なお, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_{\mathbb{K}^n}$ は代数学幾何学 A で学んだ内積, すなわち $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ に対して

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_{\mathbb{K}^n} = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k} = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \cdots + x_n \overline{y_n}$$

である. なお, $W^{\perp}$ を W の**直交補空間**という.

問題 12.8.

問題 12.7 において, $W + W^{\perp}$ は直和になることを示せ.

注意.

実際には, $W \oplus W^{\perp} = \mathbb{K}^n$ となることが示せる. これを W に関する $\mathbb{K}^n$ の**直交分解**という.

代数学幾何学 B 演習問題 13　　2013 年 12 月 20 日

以下, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする.

問題 13.1.

以後、a を学生番号の 2 桁目, b を学生番号の 1 桁目の番号とする. 次の各問いに答えよ. ただし, 答えのみでよい.

(1) b. の値の問題番号の置換の符号を求めよ。ただし、$b = 0$ の場合は 10. を求めよ。
(例えば、4169 番の場合は 9. のみ解く。)

1. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

2. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

3. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 6 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

4. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

5. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

6. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

7. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

8. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

9. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

10. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(2) 次の行列式を求めよ.

$$\det \begin{pmatrix} 2-a & 4-4a & 2-2a & 4-4a \\ -4+2b & -9+4b & -4+2b & -7+5b \\ 11+a-8b & 24+4a-16b & 11+2a-8b & 20+4a-20b \\ -2+2b & -4+4b & -2+2b & -4+5b \end{pmatrix}$$

(3) 行列 A, I を次で定めたとき, $\det(\lambda I - A) = 0$ となるような λ を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 10b-9a & 18a-15b & 9a-10b \\ 2b-2a & 4a-3b & 2a-2b \\ 6b-6a & 12a-9b & 6a-6b \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(4) 次の写像 T が線形写像かどうか判定せよ.

(a) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \in \mathbb{R}$ に対して $T(x) = x^a + b$ と定める.

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して $T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で定める.

(5) $T \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ が, $T(\boldsymbol{e}_1) = a, T(\boldsymbol{e}_2) = b, T(\boldsymbol{e}_3) = 6$ をみたすとする. $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して, $T(\boldsymbol{x})$ を求めよ.

ただし, $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする.

(6) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して, $T(\boldsymbol{x}) := B\boldsymbol{x}$ で定義する. ただし,

$$B = \begin{pmatrix} 672 - 30a - 305b & 112 + 66a - 122b & 560 - 36a - 244b \\ -120 + 5a + 55b & -20 - 11a + 22b & -100 + 6a + 44b \\ -780 + 35a + 355b & -130 - 77a + 142b & -650 + 42a + 284b \end{pmatrix}$$

とする. T が全射かどうか判定せよ.

(7) 次のベクトルの組は線形独立かどうか調べよ.

(i) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} -12 \\ -8 \\ 0 \\ -2b \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -3a \\ 3b \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \\ b \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ 3b \end{pmatrix}$

(ii) $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 2 \\ b \\ a \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ 4 \\ 2a \\ 2b \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} -18 \\ -12 \\ 6 \\ 3a \\ 3a \end{pmatrix}$

(8) 次の $\mathbb{R}^3$ の基底 E, F について, 基底の取り替え $E \longrightarrow F$ の行列を求めよ.

$$E = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad F = \left\langle \begin{pmatrix} -2 - 2b \\ -10 \\ 2 + b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 + 2b \\ 6 \\ 4 + 2b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 + 6b \\ 2 \\ 6 + 3b \end{pmatrix} \right\rangle$$

(9) 次の集合が部分空間になるかどうか答えよ.

(i) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0, az = 0 \right\}$

(ii) $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ y \\ z \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : y, z \in \mathbb{R} \right\}$

(10) $V = M_{(15-b)}(\mathbb{R}),\ W_1 = \{X \in V | X^* = X\},\ W_2 = \{X \in V | \mathrm{Tr} X = 0\}$ のとき, $\dim V$, $\dim W_1$, $\dim W_2$ を求めよ.

(11) $\mathbb{R}^4$ 上 W_1, W_2 が直和かどうか答えよ.

(i) $W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

(ii) $W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

問題 13.2.

V,W を $\mathbb{K}$ 上の線形空間とする．次の問いに答えよ．

(1) $T : V \to W$ が線形写像であることの定義を答えよ．
(2) $\mathrm{Hom}(V, W)$ は何か？定義を答えよ．
(3) $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k \in V$ が線形独立の定義を答えよ．
(4) $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k \in V$ が線形従属の定義を答えよ．
(5) $\langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n \rangle$ が V が基底になることの定義を答えよ．
(6) W が V の部分空間を示すには, 何を示せばよいか？
(7) $T : V \to W$ が単射であることの定義を答えよ．
(8) $T : V \to W$ が全射であることの定義を答えよ．
(9) 線形部分空間 $W_1, W_2 \subset V$ に対して, $W_1 + W_2$ が直和になることの定義を答えよ．

問題 13.3.

$T : P_n(\mathbb{K}) \to P_n(\mathbb{K})$ を $f(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in P_n(\mathbb{K})$ に対して

$$Tf(X) := \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$$

とおく ($\sum$ の添字に注意). $T \in \mathrm{Hom}(P_n(\mathbb{K}), P_n(\mathbb{K}))$ を示せ．

問題 13.4.

次の多項式の組が $P_3(\mathbb{K})$ 上で線形独立か線形従属かを判定し, 証明を与えよ．ただし, a は学生番号の 10 の位とせよ．

(1) $(a+5)X^2 + (a+3)X - 2a - 6$, $-2X^2 + 2$, $(a+2)X^2 + (a+2)X - 2a - 3$;
(2) $(-a-6)X^2 + (-a-4)X + 2a + 8$, $4X^2 + 2X - 4$, $(-a-2)X^2 + (-a-2)X + 2a + 4$;

問題 13.5.

$W \subset P_2(\mathbb{R})$ を

$$W := \left\{ f(X) \in P_2(\mathbb{R}) : \int_0^1 f(x)\,dx = 0 \right\}$$

で定義する．W が $P_2(\mathbb{R})$ の線形部分空間になることを示せ．

問題 13.6.

V, W を線形空間とする．このとき $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ に対して,「T が単射であること」と「$\mathrm{Ker}\, T = \{\boldsymbol{0_V}\}$」が同値となることを示せ．すなわち,「$T$ が単射であるならば $\mathrm{Ker}\, T = \{\boldsymbol{0_V}\}$」と「$\mathrm{Ker}\, T = \{\boldsymbol{0_V}\}$ ならば T が単射になること」を示せ．

問題 13.7.

V, W を線形空間とする．このとき $T \in \mathrm{Hom}(V, W)$ に対して,「T が全射であること」と「$\mathrm{Im}\, T = W$」が同値となることを示せ．

代数学幾何学 B 「演習 線形代数」について

村上 - 野澤 - 稲葉 著「演習 線形代数」で講義内容に関係する問題は下記の通りである. ただし, 演習問題で配布した問題も含まれている. とくに具体的に計算する問題について, 各自計算を確認してみるとよい.

なお, 細字での数字は前が章の番号で後ろが例題の番号, 太字での数字は章末の問題を表す. 例えば, 1.3 と書いてあれば, 1 章の例題 3 のことを指す. **1.3** は 1 章の章末問題 1.3 のことを指す.

行列式.

5.1–5.3, 5.5–5.9 **5.1–5.11, 5.16–5.18**

ただし, 5.1 は置換の符号を求める問題として考えよ.

線形空間と線形写像.

7.2, 7.3, 7.5 **7.1**

基底と次元.

3.2, 3.5–3.7 **3.1, 3.6–3.11**

基底の取り替え.

7.9 **7.2, 7.11**

線形部分空間.

3.1, 3.3, 3.4, 3.8–3.11, 7.10 **3.2–3.5, 3.12, 3.13, 7.7, 7.9**

像と逆像.

7.1, 7.4 **7.8**