代数学幾何学 B 期末試験問題

2014 年 1 月 16 日 第 2 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1 は全員が答えよ. 問題 2 以降については, 3 題以上答えよ.
以下, $P_2(\mathbb{C})$ を複素係数 2 次多項式全体のなす集合, $i=\sqrt{-1}$ とする.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, 答えのみを書くこと.

(1) 6 文字の置換 $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&2&6&1&5&3\end{pmatrix}$ の符号を求めよ.

(2) $\det\begin{pmatrix}2&6&-1&5\\1&1&-1&0\\3&7&0&4\\1&-1&2&1\end{pmatrix}$ の値を求めよ.

(3) $\det\left(\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-6&0&-2\\0&3&0\\12&0&4\end{pmatrix}\right)$ を λ について因数分解せよ.

(4) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ を $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ に対して, $T\boldsymbol{x}=x_1+x_2+x_3$ で定める. T が線形写像になるか否かを答えよ.

(5) 線形写像 $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ が $T(\boldsymbol{e}_1)=2,\ T(\boldsymbol{e}_2)=-5,\ T(\boldsymbol{e}_3)=4$ をみたすとする. $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}3\\3\\4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ に対して, $T(\boldsymbol{x})$ を求めよ.

ただし, $\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ とする.

(6) 次のベクトルの組は線形独立かどうか調べよ.

$$\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}-6\\-4\\0\\-1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{a}_4=\begin{pmatrix}6\\4\\2\\3\end{pmatrix}$$

(7) 次の $\mathbb{R}^3$ の基底 E, F について, 基底の取り替え $E \to F$ の行列を求めよ.

$$E = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad F = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(8) 次の集合は $\mathbb{R}^4$ の部分空間になるかどうか答えよ.

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0 \right\}$$

(9) 次の線形部分空間の次元を求めよ.

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0,\ z + w = 0 \right\}$$

(10) $\mathbb{R}^3$ 上の次の線形部分空間 W_1, W_2 が直和になるかどうか答えよ.

$$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle$$

問題 2.

次の各問いに答えよ.

(1) V, W を $\mathbb{C}$ 上の線形空間とする. このとき, $T : V \to W$ が線形写像であることの定義を答えよ.

(2) $T : P_2(\mathbb{C}) \to P_2(\mathbb{C})$ を $f(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in P_2(\mathbb{C})$ に対して

$$T(f(X)) := a_1 + 2a_2 X$$

により定義する. T が線形写像であることを示せ.

問題 3.

次の各問いに答えよ.

(1) V を $\mathbb{C}$ 上の線形空間とする. このとき, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \in V$ が線形独立であることの定義を答えよ.

(2) V を $\mathbb{C}$ 上の線形空間とする. このとき, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \in V$ が線形従属であることの定義を答えよ.

(3) 次の多項式の組が $P_2(\mathbb{C})$ 上で線形独立になるか否かを判定し, 定義に基づいて証明を与えよ.

(a) $4X + 3i$, $-3iX + 2$, $3X^2$

(b) $8X - 4i$, $4iX + 2$, $X^2 + 1$

問題 4.

次の各問いに答えよ.

(1) V を $\mathbb{C}$ 上の線形空間, $W \subset V$ を V の部分集合とする. W が V の線形部分空間になることを示すには, 何を示せばよいか答えよ.

(2) $W \subset P_2(\mathbb{C})$ を

$$W := \{f(X) \in P_2(\mathbb{C}) : f(i) = 0\}$$

とおく. W が $P_2(\mathbb{C})$ 上の線形部分空間になることを示せ.

問題 5.

V, W を $\mathbb{C}$ 上の線形空間, $T : V \to W$ を線形写像とする.

(1) $\operatorname{Im} T$ の定義を答えよ.

(2) $\operatorname{Ker} T$ の定義を答えよ.

(3) $\operatorname{Ker} T$ が線形部分空間になることを示せ.

問題 6.

$M_3(\mathbb{R})$ を実数係数 3 次正方行列のなす集合,

$$W_1 := \{X \in M_n(\mathbb{R}) : {}^tX = X\}$$
$$W_2 := \{X \in M_n(\mathbb{R}) : {}^tX = -X\}$$

とおく. ただし, $X \in M_3(\mathbb{R})$ に対して, ${}^tX$ は X の転置行列を表す.

(1) $W_1 \oplus W_2$ の定義を答えよ.

(2) $W_1 \oplus W_2$ となることを証明せよ. なお, W_1 と W_2 が線形部分空間になることは認めてよい.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

代数学幾何学 B 追試験問題

担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1 は全員が答えよ. 問題 2 以降については, 3 題以上答えよ.
以下, $P_2(\mathbb{C})$ を複素係数 2 次多項式全体のなす集合, $i = \sqrt{-1}$ とする.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, 答えのみを書くこと.

(1) 5 文字の置換 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ の符号を求めよ.

(2) $\det \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ の値を求めよ.

(3) $\det \left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 12 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right)$ を λ について因数分解せよ.

(4) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して, $T\boldsymbol{x} = 2x_1 + 3x_2 - x_3$ で定める. T が線形写像になるか否かを答えよ.

(5) 線形写像 $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ が $T(\boldsymbol{e}_1) = 1,\ T(\boldsymbol{e}_2) = -1,\ T(\boldsymbol{e}_3) = 1$ をみたすとする. $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対して, $T(\boldsymbol{x})$ を求めよ.

ただし, $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする.

(6) 次のベクトルの組は線形独立かどうか調べよ.

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(7) 次の $\mathbb{R}^3$ の基底 E, F について, 基底の取り替え $E \to F$ の行列を求めよ.

$$E = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad F = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(8) 次の集合は $\mathbb{R}^4$ の部分空間になるかどうか答えよ.

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \right\}$$

(9) 次の線形部分空間の次元を求めよ.

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x + y + z = 0 \right\}$$

(10) $\mathbb{R}^3$ 上の次の線形部分空間 W_1, W_2 が直和になるかどうか答えよ.

$$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle$$

問題 2.

次の各問いに答えよ.

(1) V, W を $\mathbb{C}$ 上の線形空間とする. このとき, $T : V \to W$ が線形写像であることの定義を答えよ.

(2) $T : P_2(\mathbb{C}) \to P_2(\mathbb{C})$ を $f(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in P_2(\mathbb{C})$ に対して

$$T(f(X)) := 3a_1 + a_2 X$$

により定義する. T が線形写像であることを示せ.

問題 3.

次の各問いに答えよ.

(1) V を $\mathbb{C}$ 上の線形空間とする. このとき, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \in V$ が線形独立であることの定義を答えよ.

(2) V を $\mathbb{C}$ 上の線形空間とする. このとき, $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \in V$ が線形従属であることの定義を答えよ.

(3) 次の多項式の組が $P_2(\mathbb{C})$ 上で線形独立になるか否かを判定し, 定義に基づいて証明を与えよ.

(a) $4X + i$, $-2iX + 1$, $2X^2$

(b) $4X - 2i$, $2iX + 1$, $X^2 - 1$

問題 4.

次の各問いに答えよ.

(1) V を $\mathbb{C}$ 上の線形空間, $W \subset V$ を V の部分集合とする. W が V の線形部分空間になることを示すには, 何を示せばよいか答えよ.

(2) $W \subset P_2(\mathbb{C})$ を

$$W := \{f(X) \in P_2(\mathbb{C}) : f(1+i) = 0\}$$

とおく. W が $P_2(\mathbb{C})$ 上の線形部分空間になることを示せ.

問題 5.

V, W を $\mathbb{C}$ 上の線形空間, $T : V \to W$ を線形写像とする.

(1) $\operatorname{Im} T$ の定義を答えよ.

(2) $\operatorname{Ker} T$ の定義を答えよ.

(3) $\operatorname{Im} T$ が線形部分空間になることを示せ.

問題 6.

$n \in \mathbb{N}$ に対して, $M_n(\mathbb{R})$ を実数係数 n 次正方行列のなす集合,

$$W_1 := \{X \in M_n(\mathbb{R}) : {}^tX = X\}$$

$$W_2 := \{X \in M_n(\mathbb{R}) : {}^tX = -X\}$$

とおく. ただし, $X \in M_n(\mathbb{R})$ に対して, ${}^tX$ は X の転置行列を表す. なお, W_1 と W_2 が線形部分空間になることは認めてよい.

(1) $W_1 \oplus W_2$ の定義を答えよ.

(2) $M_n(X) = W_1 + W_2$ となることを示せ.

(3) $W_1 \oplus W_2$ となることを証明せよ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.