§1 イントロダクション

〈微積分の基本定理〉

$f \in C^1(0.1) = \{ f : (0.1) \to \mathbb{R},\ C^1\text{級} \}$ に対して.

$$\int_0^1 f'(x)\,dx = f(1) - f(0)$$

が成り立つ.

〈部分積分公式〉

$f. g \in C^1(0.1)$ に対し.

$$\int_0^1 f'(x) g(x)\,dx = f(1)g(1) - f(0)g(0) - \int_0^1 f(x) g'(x)\,dx$$

が成り立つ. とくに. $g(0) = g(1) = 0$ ならば.

$$\int_0^1 f'(x) g(x)\,dx = -\int_0^1 f(x) g'(x)\,dx. \qquad \cancel{(1.1)} \tag{1.1}$$

が成り立つ.

~~注意 1.1~~

~~(1.1) で 左辺は $f \in C^1(0.1)$ でなければいけないが~~.

この事実の応用を考える.

〈熱方程式〉

$$(1.2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, & t>0,\quad 0<x<1. \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0, & t>0,\quad 0<x<1 \\[2mm] u(0,x) = \phi(x) & \end{cases}$$

~~$u:(0,\infty)\times[0,1]\to$~~

$u:(0,\infty)\times(0,1)\to\mathbb{R}$　未知関数

$\phi:\quad(0,1)\to\mathbb{R}$　既知関数

※時刻 $t=0$ で温度分布 $\phi(x)$ の金属棒の 時刻 t で

温度分布が $u(t,x)$ になる.

定理 1.1（エネルギー評価）

u が (1.2) の滑らかな解ならば $^\forall T>0$ に対して.

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (u(T,x))^2dx+\int_0^T\int_0^1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dxdt=\frac{1}{2}\int_0^1(\phi(x))^2dx.$$

が成り立つ.

証明

1. {(1.2) の第1式} $\times u(t,x)$ は

$$u\frac{\partial u}{\partial t}-u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

となる. $u\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial(u^2)}{\partial t}$ に注意して. 両辺 $0<x<1$ で

積分すると.

$$(*)\quad \frac{1}{2}\int_0^1\frac{\partial(u^2)}{\partial t}dx-\int_0^1 u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx=0$$

となる.

2.

(*)の左辺第2項は，部分積分~~により~~と(1.2)の第2式より)

$$-\int_0^1 u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx \underset{\text{部分積分}}{=} -\left\{\underbrace{u(t,1)\frac{\partial^2 u}{\partial x}(t,1)-u(t,0)\frac{\partial u}{\partial x}(t,0)}_{\text{[illegible]}=0} - \int_0^1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right\}$$

$$\underset{\text{(1.2)の第2式}}{=} \int_0^1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx.$$

だから，積分と微分を交換して，

$$(**)\quad \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 (u(t,x))^2 dx + \int_0^1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2(t,x)\,dx = 0$$

が得られる．(**)を $0\le t\le T$ で積分すると，(1.2)の第3式より

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (u(T,x))^2 dx + \int_0^T\int_0^1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2(t,x)\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \underbrace{(\phi(x))^2}_{=(u(0,x))^2} dx$$

が得られる $\square$

一次元
微積分の基本定理 $\rightsquigarrow$ 一次元熱方程式の
エネルギー評価．

~~講義の目標~~

<u>講義の目標</u> 一次元微積分の基本定理を多次元に拡張する

§2 3次元ベクトルの演算

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

とかく.

注意 2.1

ベクトルの記号で矢印を使うのは一般的ではない.
ベクトルとスカラーは. しばしば区別されずに書かれる.

§§2.1 ベクトルの内積.

定義 2.1 (ベクトルの内積)

$\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し. 内積を

$$\vec{x}\cdot\vec{y} := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

で定義する. また. $\vec{x}$ のノルムを

$$|\vec{x}| := \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

で定める.

注意 2.2

$\vec{x}$ と $\vec{y}$ のなす角を ~~θとおく~~. $0 \leq \theta \leq \pi$ で表すと

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta$$

となる. 特に

$$\cos\theta = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}$$

である.

命題 2.1 (内積の性質)

$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して、次が成り立つ：

(1) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$

(2) $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$

(3) $(\lambda \vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (\lambda \vec{y}) = \lambda (\vec{x} \cdot \vec{y})$.

問題 2.1

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ に対し、

$$(\vec{x} \text{ と } \vec{y} \text{ から作られる平行四辺形の面積})^2$$

$$= |\vec{x}|^2 |\vec{y}|^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2$$

を示せ (ヒント：$\vec{x}$ と $\vec{y}$ から作られる三角形の面積は $\frac{1}{2} |\vec{x}||\vec{y}| \sin\theta$ となることを使う。ここで $0 \leq \theta \leq \pi$ は $\vec{x}$ と $\vec{y}$ のなす角。

問題 2.2

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ に対し中線定理

$$\frac{|\vec{x}+\vec{y}|^2 + |\vec{x}-\vec{y}|^2}{2} = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2$$

を示せ。さらに、

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \frac{1}{4} \left(|\vec{x}+\vec{y}|^2 - |\vec{x}-\vec{y}|^2 \right)$$

を示せ。

4/10

§§2.2. ベクトルの外積

~~$\vec{x} = (x_1,$~~

定義 2.2 （ベクトルの外積）

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し.

外積を

$$\vec{x} \times \vec{y} := (x_2 y_3 - x_3 y_2)\vec{e}_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\vec{e}_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{e}_3$$

で定義する

注意 2.3

形式的に.

$$\vec{x} \times \vec{y} := \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

とかける.

命題 2.2

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ に対し. 次が成り立つ

(1) $\vec{x} \cdot (\vec{x} \times \vec{y}) = 0$

(2) $\vec{y} \cdot (\vec{x} \times \vec{y}) = 0$

(3) $|\vec{x} \times \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 |\vec{y}|^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2$

証明 $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$, $\vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$ とかく.

(1) $\vec{x}\cdot(\vec{x}\times\vec{y})=x_1(x_2y_3-x_3y_2)+x_2(x_3y_1-x_1y_3)$

$+x_3(x_1y_2-x_2y_1)$

(2) (1)と同様.

(3) $|\vec{x}\times\vec{y}|^2=(x_2y_3-x_3y_2)^2+(x_3y_1-x_1y_3)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2$

$=x_2^2y_3^2+x_3^2y_2^2+x_3^2y_1^2+x_1^2y_3^2+x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2$

$-2x_2x_3y_2y_3-2x_1x_3y_1y_3-2x_1x_2y_1y_2$

$+x_1^2y_1^2+x_2^2y_2^2+x_3^2y_3^2-x_1^2y_1^2-x_2^2y_2^2-x_3^2y_3^2$

$=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2)$

$-(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2$

$=|\vec{x}|^2|\vec{y}|^2-(\vec{x}\cdot\vec{y})^2$ □

注意 2.4

命題 2.2 の (1), (2) $\Longrightarrow$ $\vec{x}\times\vec{y}$ は $\vec{x}$ と $\vec{y}$ に直交する.

〃 (3) $\Longrightarrow$ $|\vec{x}\times\vec{y}|$ は $\vec{x}$ と $\vec{y}$ から作られる平行四辺形の面積.

定義 2.3（右手系）

$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, \vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}, \vec{z}=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$

$\{\vec{x},\vec{y},\vec{z}\}$ が右手系

$$\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \quad \det\begin{pmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\x_2 & y_2 & z_2\\x_3 & y_3 & z_3\end{pmatrix}>0.$$

注意 2.5.

右手の親指　x 軸.

人差し指　y 軸.

$\{\vec{x},\vec{y},\vec{z}\}$ が右手系 $\Longrightarrow$ z 軸は中指.

命題 2.3（外積の性質）

$\vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\mathbb{R}^3$ と $\lambda\in\mathbb{R}$ に対して. 次が成り立つ.

(1) $\vec{x}\times\vec{x}=\vec{0}$

(2) $\vec{x}\times\vec{y}=-\vec{y}\times\vec{x}$

(3) $\vec{x}\times(\vec{y}+\vec{z})=\vec{x}\times\vec{y}+\vec{x}\times\vec{z}$

(4) $(\lambda\vec{x})\times\vec{y}=\vec{x}\times(\lambda\vec{y})=\lambda(\vec{x}\times\vec{y})$

(5) $\{\vec{x},\vec{y},\vec{x}\times\vec{y}\}$ は右手系

命題 2.4 (ベクトルの三重積)

$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ について、次が成り立つ。

(1) $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = \det(\vec{x}\ \vec{y}\ \vec{z})$

(2) $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z}$ 逆

(3) $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{y} \cdot \vec{z})\vec{x}$.

とくに、一般的に $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} \neq \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z})$.

§2.3 ベクトル値関数

$I \subset \mathbb{R}$ 開区間. $\vec{x} = \vec{x}(t) : I \to \mathbb{R}^3$ (ベクトル値関数)

$$\frac{d\vec{x}}{dt}(t) \cancel{= \vec{x}'(t)} := \lim_{h \to 0} \frac{\vec{x}(t+h) - \vec{x}(t)}{h}.$$

命題 2.5 (ベクトル値関数の微分)

$I \subset \mathbb{R}$ は開区間, $\vec{x} = \vec{x}(t), \vec{y} = \vec{y}(t) : I \to \mathbb{R}^3$ は C^1 級とする

($\vec{x}, \vec{y} \in C^1(I; \mathbb{R}^3)$ とかく). このとき、次が成り立つ。

(1) $\displaystyle \frac{d}{dt}(\vec{x} \cdot \vec{y}) = \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \frac{d\vec{y}}{dt}$

(2) $\displaystyle \frac{d}{dt}(\vec{x} \times \vec{y}) = \frac{d\vec{x}}{dt} \times \vec{y} + \vec{x} \times \frac{d\vec{y}}{dt}$.

§3 曲線と曲面

§§3.1 曲線

定義 3.1 (曲線) $n = 2$ or 3, $\vec{p} : (a.b) \to \mathbb{R}^n$ とする.

$C : \vec{p} = \vec{p}(t) \quad (a \leq t \leq b)$ が曲線

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $^\forall t \in (a.b)$ に対して

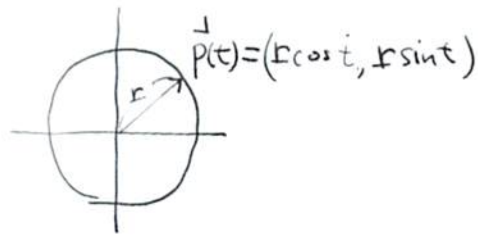
$$\dot{\vec{p}}(t) = \frac{d}{dt}\vec{p}(t) \neq 0.$$

$\vec{p}$ は C^1 級で

例 3.1

$r > 0$, $0 < t < 2\pi$ に対し

$$\vec{p}(t) := (r\cos t, r\sin t)$$



とおくと $\vec{p}$ は原点中心, 半径 r の円.

4/17

命題 3.1

$\vec{p} : (a.b) \to \mathbb{R}^2$ を 曲線とすると

ある変数変換 $t = t(s)$ が存在して

$$\vec{e}_1(s) := \vec{p}'(s) = \frac{d}{ds}\vec{p}(t(s))$$

とかいたときに $|\vec{e}_1(s)| \equiv 1$ となる.

注意 3.1

命題3.1で主張していること.

「平面曲線は、適当な変数変換で、速度ベクトルを常に1とできる」.

このパラメータ s を弧長パラメータという.

具体的な問題に対する弧長パラメータを求めることは難しいが、理論的な話では、弧長パラメータを使った方がみとおしがよい.

§§3.2 曲面

定義 3.3 (曲面)

$D \subset \mathbb{R}^2$ を領域, $\vec{p}: D \to \mathbb{R}^3$ とする.

$S: \vec{p} = \vec{p}(u, v) \quad ((u, v) \in D)$ が曲面.

$\underset{\text{定義}}{\iff}$ $\vec{p}$ は D 上 C^1 級で $^\forall(u, v) \in D$ に対して,

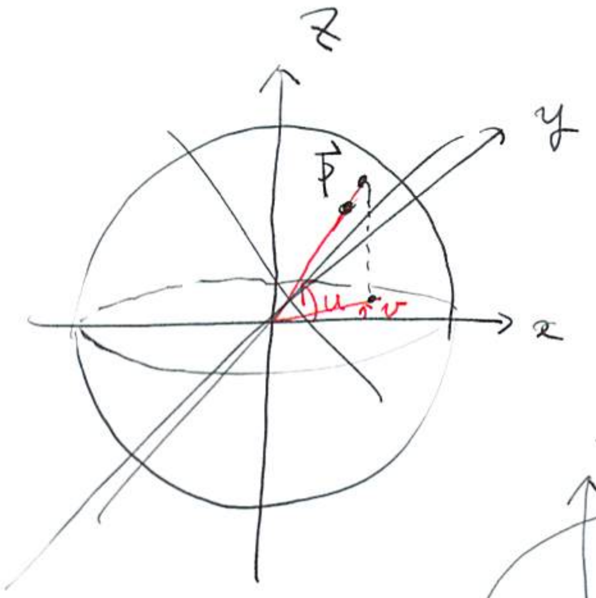
$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v} \neq \vec{0}$$

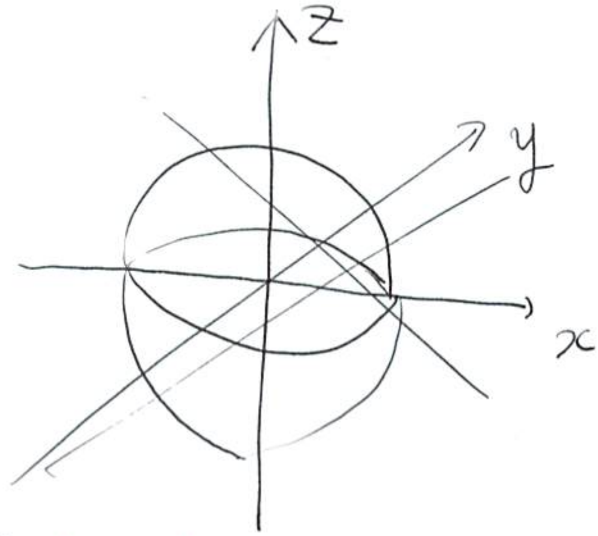
例 3.2.

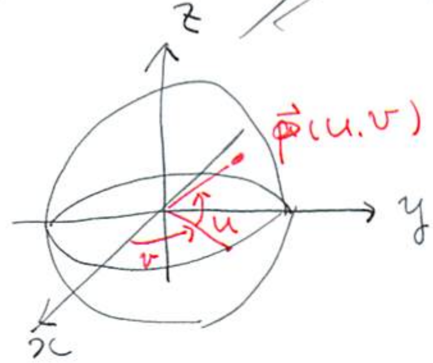
$$D = \{(u, v) : -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, \ -\pi < v < \pi\}$$

$$\vec{p}(u, v) := (r\cos u \cos v, r\cos u \sin v, r\sin u)$$

とおくと $\vec{p}$ は半径 r, 原点中心の球面の一部







命題3.2

$D \subset \mathbb{R}^2$は領域, $\vec{p}: D \to \mathbb{R}^3$ は曲面とする.

このとき、次が成り立つ.

(1) $\dfrac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{p}}{\partial v}(u,v)$ は点 $\vec{p}(u,v)$ における曲面の法線ベクトル

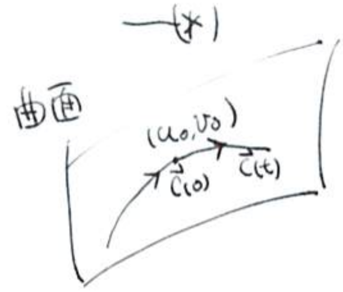
(2) $\vec{p}$ が単射ならば S を曲面 $\vec{p}$ の面積としたときに

$$S = \iint_D \left| \frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v} \right| du\,dv$$

証明の概略

(1) $\forall (u_0, v_0) \in D$ に対し. $\vec{c}(t) := \vec{p}(u(t), v(t))$ を $\vec{c}(0) = (u_0, v_0)$ となる曲面 $\vec{p}$ 上の任意の曲線とするとき.

$$\frac{d\vec{c}}{dt} \cdot \left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v}(u_0, v_0) \right) \Bigg|_{t=0} = 0 \quad \text{—}(*)$$

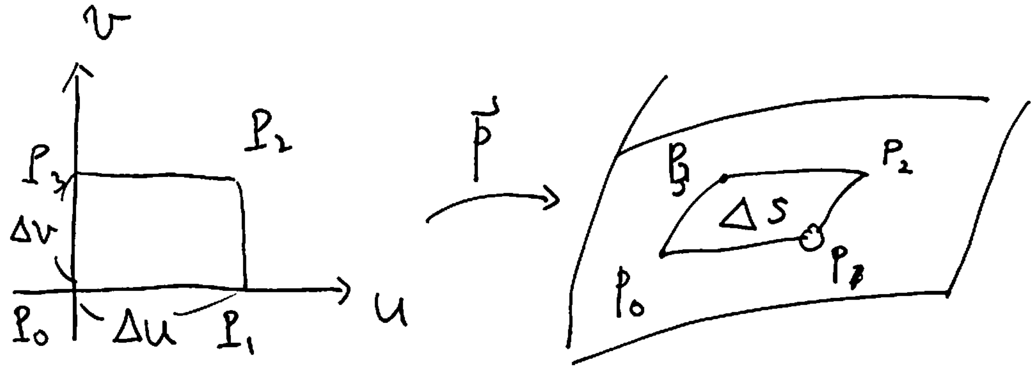


を示せばよい

$$\left.\frac{d\vec{c}}{dt}\right|_{t=0} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial u}(u_0, v_0)\frac{du}{dt}(0) + \frac{\partial \vec{p}}{\partial v}(u_0, v_0)\frac{dv}{dt}(0)$$

から ※1 が従う.

(2)



$$\Delta S \approx \left|(P_1 - P_0) \times (P_3 - P_0)\right|$$

ΔSは平行四辺形

$$\approx \left|\left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial u}(P_0)\Delta u\right) \times \left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial v}(P_0)\Delta v\right)\right|$$

平均値定理

$$= \left|\frac{\partial \vec{p}}{\partial u}(P_0) \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v}(P_0)\right| \Delta u \Delta v.$$

分割の極限をとると

$$S = \iint_D \left|\frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v}\right| du\, dv \qquad \square$$

§4 スカラー場とベクトル場

この節では $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を領域とする.

(開集合, 連結)

定義 4.1 (スカラー場, ベクトル場)

関数 $f: \Omega \to \mathbb{R}$ を Ω 上のスカラー場,

ベクトル値関数 $\vec{F}: \Omega \to \mathbb{R}^3$ を Ω 上のベクトル場

という. 特に

$$\mathfrak{X}(\Omega) := \{\vec{F} : \Omega\text{上のベクトル場, 滑らか}\}$$

注意 4.1

この講義では, スカラー場, ベクトル場は常に滑らかとする.

定義 4.2. (等位面)

f を Ω 上のスカラー場, $c \in \mathbb{R}$ とするとき,

$\{x \in \Omega : f(x) = c\}$ を f の高さ c に対する等位面

という.

命題 4.1

f: Ω 上のスカラー場, $x_0 \in \Omega$, $f(x_0) = c$ が

$$\nabla f(x_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0)\right) \neq \vec{0}$$

ならば

① $\nabla f(x_0)$ は $\{x \in \Omega : f(x) = c\}$ の x_0 における法線ベクトル.

② $\nabla f(x_0)$ は, スカラー場 f が x_0 において増加が最大となる方向

24. Apr. 2012

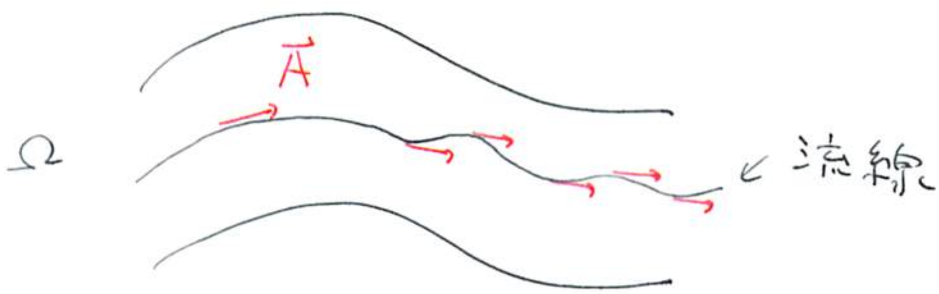
定義 4.3 (流線, 積分曲線)

$\vec{A} \in \mathfrak{X}(\Omega)$. ~~$C : \vec{r} = \vec{r}(t)$ が 流系~~

Ω上の曲線 $C : \vec{r} = \vec{r}(t) : (-T, T) \to \Omega$ が $\vec{A}$ の 流線(積分曲線)

$$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = A(\vec{r}(t)) \qquad -T < t < T.$$

気分(気分)



命題 4.2

$\vec{A} \in \mathfrak{X}(\Omega)$. $x_0 \in \Omega$ に対し.

x_0を通る $\vec{A}$ の流線が ただ一つ存在する. i.e.

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{r}}{dt}(t) = \vec{A}(\vec{r}(t)) & -T < t < T. \\ \vec{r}(0) = x_0 \end{cases}$$

をみたす 解 $\vec{r}$ が ただ一つ存在する.

§§4.2 微分演算子

定義 4.4 （勾配，ナブラ）

$$\nabla := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

と形式的に定義する．スカラー場 f に対して

$$\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x_0) \end{pmatrix}$$

とかく．

命題 4.3

f, g : Ω 上のスカラー場，$c \in \mathbb{R}$，$\phi \in C^1(\mathbb{R})$

(1) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

(2) $\nabla(cf) = c\nabla f$

(3) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$

(4) $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$ （$g(x) \neq 0$ なる点 x において）

(5) $\nabla(\phi(f)) = \phi'(f)\nabla f$.

定義 4.5 (スカラーポテンシャル)

$\vec{F} \in \mathfrak{X}(\Omega)$. f: Ω 上のスカラー場

f は $\vec{F}$ のスカラーポテンシャル

$$\underset{\text{定義}}{\iff} \quad \vec{F} = -\nabla f$$

定義 4.6 (発散. ダイバージェンス)

$\vec{F} \in \mathfrak{X}(\Omega)$. $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$

$$\operatorname{div} \vec{F} := \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

で定める. 形式的には $\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$ とかける.

命題 4.4

$\vec{F}, \vec{G} \in \mathfrak{X}(\Omega)$. f: Ω 上のスカラー場. $c \in \mathbb{R}$

(1) $\operatorname{div}(\vec{F} + \vec{G}) = \operatorname{div} \vec{F} + \operatorname{div} \vec{G}$

(2) $\operatorname{div}(c\vec{F}) = c \operatorname{div} \vec{F}$

(3) $\operatorname{div}(f\vec{F}) = f \operatorname{div} \vec{F} + \nabla f \cdot \vec{F}$

証明 (3) のみ示す. $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ とかく.

$$\operatorname{div}(f\vec{F}) = \frac{\partial (fF_1)}{\partial x} + \frac{\partial (fF_2)}{\partial y} + \frac{\partial (fF_3)}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} F_1 + \frac{\partial f}{\partial y} F_2 + \frac{\partial f}{\partial z} F_3$$

$$+ f\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) = \nabla f \cdot \vec{F} + f \operatorname{div} \vec{F}$$

□

定義4.7（ラプラシアン）

f：Ω 上のスカラー場

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

と定める．形式的には $\nabla \cdot \nabla$ であり．

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \mathrm{div}(\nabla f)$$

である．

ラプラシアンは微分方程式で最も基礎的な微分作用素

定義 4.8（回転．ローテーション．カール）

$\vec{F} \in \mathfrak{X}(\Omega)$．$\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$．

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} := \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z},\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x},\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

形式的には $\nabla \times \vec{F} = \mathrm{rot}\,\vec{F}$．

命題4.5

$\vec{F}, \vec{G} \in \mathfrak{X}(\Omega)$．$f$：$\Omega$ 上のスカラー場．$c \in \mathbb{R}$．

(1) $\mathrm{rot}(\vec{F} + \vec{G}) = \mathrm{rot}\,\vec{F} + \mathrm{rot}\,\vec{G}$

(2) $\mathrm{rot}(c\vec{F}) = c\,\mathrm{rot}\,\vec{F}$

(3) $\mathrm{rot}(f\vec{F}) = f\,\mathrm{rot}\,\vec{F} + \nabla f \times \vec{F}$.

7. Mar. 2012

定義 4.9（ベクトルポテンシャル）

$\vec{F} \in \mathfrak{X}(\Omega)$.　$\vec{f} \in \mathfrak{X}(\Omega)$.

$\vec{f}$ が $\vec{F}$ のベクトルポテンシャル

$$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \quad \vec{F} = \mathrm{rot}\, \vec{f}.$$

命題 4.6

$\vec{F} \in \mathfrak{X}(\Omega)$

(1) $\vec{F}$ がスカラーポテンシャルを持つ $\Rightarrow \mathrm{rot}\, \vec{F} = 0$

(2) $\vec{F}$ がベクトル 〃 $\Rightarrow \mathrm{div}\, \vec{F} = 0$

証明の概略

(1) $\vec{F} = -\nabla f$ となるスカラー場 f がとれれば

$$\mathrm{rot}\, \vec{F} = -\mathrm{rot}\,(\nabla f) \underset{\text{各自.}}{=} \vec{0}$$

(2) $\vec{F} = \mathrm{rot}\, \vec{f}$ となる ~~スカラー場~~ $\vec{f} \in \mathfrak{X}(\Omega)$ が
とれれば

$$\mathrm{div}\, \vec{F} = \mathrm{div}(\mathrm{rot}\, \vec{f}) \overset{\text{各自.}}{=} 0$$

注意 4.2

命題 4.6 は逆も成立することが知られている.

定理 4.1 (Helmholtz 分解)

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ は領域, $\partial\Omega$ は滑らか. $\vec{F} \in \mathfrak{X}(\Omega)$

$\Longrightarrow$ $^\exists \vec{F_1}, \vec{F_2} \in \mathfrak{X}(\Omega)$ が存在して, 次が成り立つ.

(1) $\vec{F_1}$ はスカラーポテンシャルを持つ. とくに $\mathrm{rot}\,\vec{F_1} = \vec{0}$.

(2) $\vec{F_2}$ はベクトルポテンシャルを持つ. とくに $\mathrm{div}\,\vec{F_2} = 0$.

(3) $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$.

§§5 線積分と面積分

§§5.1 線積分

$C : \vec{r} = \vec{r}(s) : [0.L] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ 空間曲線

sは弧長パラメータ (i.e. $\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| \equiv 1$).

$\vec{r}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix}$.

$f : C \to \mathbb{R}$ 連続.

<u>定義5.1</u> (線積分)

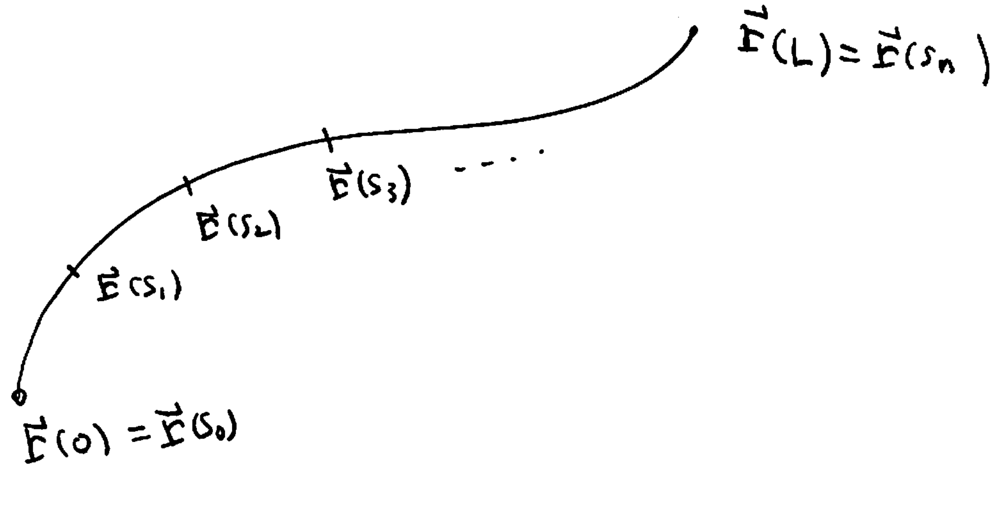
$\Delta : 0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = L$, $[0.L]$の分割.

$$\int_C f\,ds := \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\vec{r}(s_i))(s_i - s_{i-1})$$

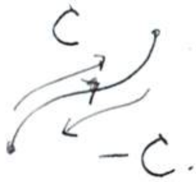
$$\int_C f\,dx := \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\vec{r}(s_i))(x(s_i) - x(s_{i-1}))$$

$$\int_C f\,dy := \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\vec{r}(s_i))(y(s_i) - y(s_{i-1}))$$

$$\int_C f\,dz := \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\vec{r}(s_i))(z(s_i) - z(s_{i-1}))$$

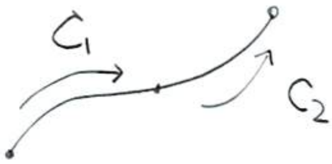


$-C$: Cの向きを逆さにした曲線



$$\Rightarrow \int_{-C} f\,ds = -\int_{C} f\,ds$$

$C = C_1 + C_2$



$$\Rightarrow \int_{C} f\,ds = \int_{C_1+C_2} f\,ds$$

$$= \int_{C_1} f\,ds + \int_{C_2} f\,ds.$$

これらは

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{-1} f(x)\,dx, \quad \int_{0}^{1} f(x)\,dx = \int_{0}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx$$

と同じ.

定義 5.2 (ベクトル場の線積分)

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$は領域　$C \subset \Omega$, $\vec{A} \in \mathfrak{X}(\Omega)$.

Δ : 定義5.1と同じ.

$$\int_{C} \vec{A} \cdot d\vec{r} := \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{A}(\vec{r}(s_i)) \cdot \left(\vec{r}(s_i) - \vec{r}(s_{i-1})\right).$$

14. May. 2012

〈具体的な計算〉

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. $a \leq t \leq b$, $t = t(s)$. $0 \leq s \leq L$.

t: 弧長パラメータとは限らない. s: 弧長パラメータ.

$$\int_C f\,ds = \int_0^L f(\vec{r}(t(s)))\,ds$$

$$= \int_a^b f(\vec{r}(t)) \left| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right| dt \quad \left(\begin{array}{l} t = t(s) \\ \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| dt = ds \end{array} \right)$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t)\,dt$$

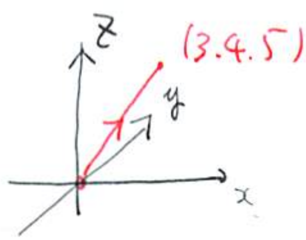
(理由)

$$\frac{d\vec{r}(t(s))}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt}(t(s)) \frac{dt}{ds} \text{ より } \left| \frac{d\vec{r}(t(s))}{ds} \right| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right| \frac{dt}{ds}$$

s は弧長パラメータより $\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| \equiv 1$. $\therefore\ ds = \left| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right| dt$.

また同様に

$$\int_C f\,dx = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \frac{dx}{dt}\,dt$$



例 5.1

$$C: \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 4t^2 \\ 5t^2 \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

曲線は右図

$$\int_C (x+y+z)\,ds \quad \text{を求める}$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \left|\begin{pmatrix}6t\\8t\\10t\end{pmatrix}\right| = 2t\left|\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}\right| = 2t\sqrt{9+16+25}$$

$$= 10\sqrt{2}\,t$$

より

$$\int_C (x+y+z)\,ds = \int_0^1 (3t^2+4t^2+5t^2)(10\sqrt{2}\,t)\,dt$$

$$= 120\sqrt{2}\int_0^1 t^3\,dt = 30\sqrt{2}$$

例 5.2

$$C : \vec{r}(t) = \begin{pmatrix}2\cos t\\2\sin t\\t\end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq \pi) \quad \text{円柱らせん.}$$

$$\int_C \begin{pmatrix}y\\-z\\x\end{pmatrix}\cdot d\vec{r} \quad \text{を求める.}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix}-2\sin t\\2\cos t\\1\end{pmatrix}.$$

だから

$$\int_C \begin{pmatrix}y\\-z\\x\end{pmatrix}\cdot d\vec{r} = \int_0^\pi \begin{pmatrix}2\sin t\\-t\\2\cos t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\sin t\\2\cos t\\1\end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^\pi (-4\sin^2 t - 2t\cos t + 2\cos t)\,dt$$

$$= \cdots = 4 - 2\pi.$$

§§ 5.2 面積分

曲面 S : $\vec{p} = \vec{p}(u,v)$, $(u,v) \in D$.

$f : S \to \mathbb{R}$ 連続

$\Delta = \{ \overset{D_1}{\cancel{S_1}}, \cdots, \overset{D_N}{\cancel{S_N}} \}$ $\underset{D}{\cancel{S}}$の分割.

$|\underset{\vec{p}(D_i)}{\cancel{S_i}}| = \underset{\vec{p}(D_i)}{\cancel{S_i}}$ の面積

定義 5.3 (面積分)

$$\int_S f \, dS := \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(Q_i) |\overset{\vec{p}(D_i)}{\cancel{S_i}}|$$

ただし $Q_i \in \underset{\vec{p}(D_i)}{\cancel{S_i}}$ は任意とする. (fの一様連続性から右辺はQ_iのとりかたに依らない)

特に. $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 領域, $S \subset \Omega$, $\vec{A} \in \mathfrak{X}(\Omega)$.

$\vec{n} = \vec{n}(P)$: $P \in S$ に対する単位法線ベクトル.

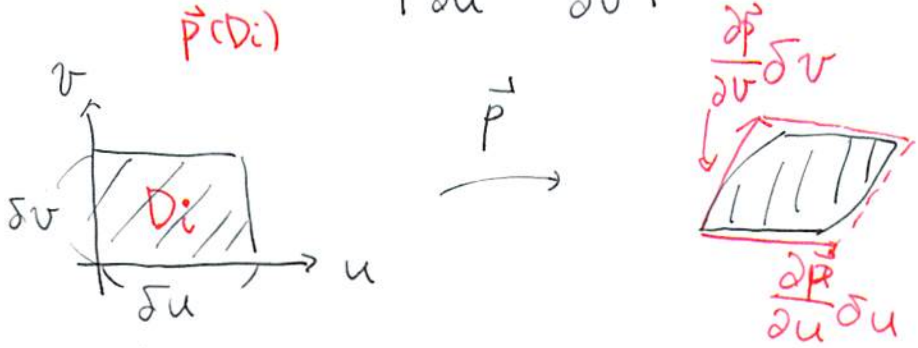
$$\int_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, dS$$

が重要.

〈具体的な計算〉

$\underset{D_i}{\cancel{S_i}} \in \Delta$ とすると

$$|\underset{\vec{p}(D_i)}{\cancel{S_i}}| \approx \left|\frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v}\right| \delta u \delta v$$



$$|\Delta| \to 0 \quad \Rightarrow \quad dS = \left|\frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v}\right| du\,dv$$

より

$$\int_S f\,dS = \iint_D f(\vec{p}(u,v)) \left|\frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v}\right| du\,dv.$$

また $\quad \vec{n} = \dfrac{\dfrac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{p}}{\partial v}}{\left|\dfrac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \vec{p}}{\partial v}\right|}$ とおくと

$\vec{n}$ は S の単位法線ベクトルとなり

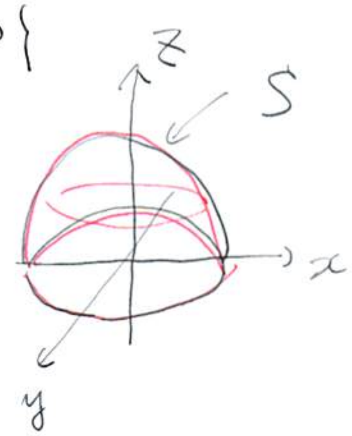
$$\int_S \vec{A} \cdot \vec{n}\,dS = \iint_D \vec{A}(\vec{p}(u,v)) \cdot \frac{\frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v}\right|} \left|\frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v}\right| du\,dv$$

$$= \iint_D \vec{A}(\vec{p}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v}\right) du\,dv.$$

22. May 2012

例 5.3

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=4,\ z \geq 0\}$$



$$\int_S (2x^2+2y^2-z^2)\,dS$$

を求める.

$$S : \vec{p}(u,v) = \begin{pmatrix} 2\cos u \cos v \\ 2\cos u \sin v \\ 2\sin u \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \times (-\pi, \pi)$$

より

$$\left|\frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v}\right| = 4\left|\begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos u \sin v \\ \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}\right|$$

$$\underset{(各自)}{=} 4\cos u$$

だから

$$\int_S (2x^2+2y^2-z^2)\,dS$$

$$= \iint_{(0,\frac{\pi}{2})\times(-\pi,\pi)} \left(2(2\cos u\cos v)^2 + 2(2\cos u \sin v)^2 - (2\sin u)^2\right)(4\cos u)\,du\,dv$$

$$= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} du \int_{-\pi}^{\pi} (2\cos^2 u - \sin^2 u)(\cos u)\,dv = \cdots = 32\pi$$

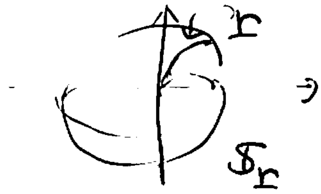
(各自)

例 5.4

$r>0$. $\quad S_r := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=r^2\}$

$\vec{n}$：外向き法線ベクトル

（囲まれている側が内向き）



$$\int_{S_r} \frac{(x,y,z)}{|(x,y,z)|^3}\cdot\vec{n}\,dS(x,y,z) \left(= \int_{S_r}\frac{x}{|x|^3}\cdot\vec{n}\,dS(x) \right)$$

とかく

を求める. $(x,y,z)\in S_r$ に対し

$$\vec{n} = \frac{(x,y,z)}{r}$$

より S_r 上で

$$\frac{(x,y,z)}{|(x,y,z)|^3}\cdot\vec{n} = \frac{(x,y,z)}{r^3}\cdot\frac{(x,y,z)}{r}$$

$$= \frac{1}{r^4}(x^2+y^2+z^2) = \frac{1}{r^2}$$

となる（i.e. 被積分関数は (x,y,z) に依らない）

従って

$$\int_{S_r}\frac{(x,y,z)}{|(x,y,z)|^3}\cdot\vec{n}\,dS = \int_{S_r}\frac{1}{r^2}\,dS = \frac{1}{r^2}\times|S_r| = 4\pi.$$

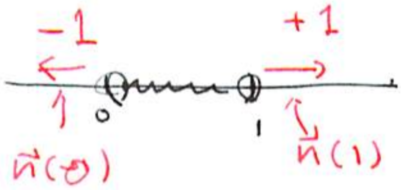
§6 積分定理

$f:(0,1)\to\mathbb{R}$ C^1級

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{df}{dx}\,dx = f(1)-f(0).$$

$\vec{n}=\vec{n}(x)$: $(0,1)$ 区間の境界 $x=0,1$ の
外向単位法線 i.e.

$\vec{n}(0)=-1,\ \vec{n}(1)=1$



$$\therefore \underbrace{\int_0^1 \frac{df}{dx}\,dx}_{1次元積分} = \underbrace{\sum_{x\in\partial(0,1)} f(x)\,\vec{n}(x)}_{0次元積分}$$

§§6.1 Gaussの発散定理

<u>定理 6.1</u> (Gaussの発散定理)

$\Omega\subset\mathbb{R}^3$: 有界領域, $\partial\Omega$ は滑らか, $\vec{F}\in\mathfrak{X}(\overline{\Omega})$.

$$\Rightarrow \underbrace{\iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz}_{3次元} = \underbrace{\iint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS}_{2次元}$$

ただし, $\vec{n}$ は $\partial\Omega$ の外向単位法線ベクトル

系6.1

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 有界領域, $\partial\Omega$は滑らか. $f : \Omega$上のスカラー場

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial\Omega} f n_x \, dS$$

ただし $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ は $\partial\Omega$ の外向単位法線.

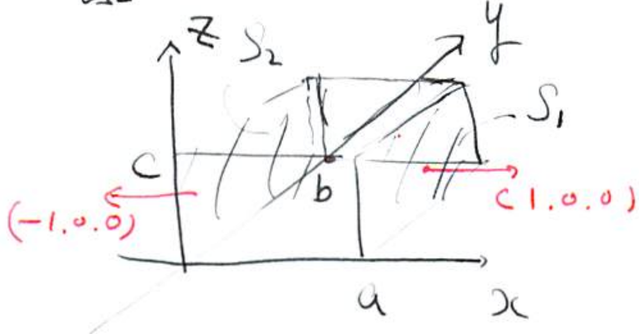
y, z についても同様.

証明
~~理由~~

$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ として. $\Omega = (0,a)\times(0,b)\times(0,c)$

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial F_x}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint_{\partial\Omega} f n_x \, dS$$

を示す.



このとき.右図で

S_1, S_2 以外の面は

$n_x = 0$ だから

$$\iint_{\partial\Omega} f n_x \, dS = \iint_{S_1} f \, dS - \iint_{S_2} f \, dS$$

$$S_1 = \{(a, y, z) : 0 < y < b,\ 0 < z < c\}$$
$$S_2 = \{(0, y, z) : 0 < y < b,\ 0 < z < c\}$$

より

$$\iint_{S_1} f \, dS - \iint_{S_2} f \, dS = \iint_{(0,b)\times(0,c)} f(a,y,z)\, dy\, dz - \iint_{(0,b)\times(0,c)} f(0,y,z)\, dy\, dz$$

$$= \iint_{(0,b)\times(0,c)} dy\,dz \int_0^a \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,dx$$

$$= \iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy\,dz \qquad \square$$

系6.1は定理6.1で $\vec{F}=(f,0,0)$ とおけばよい。

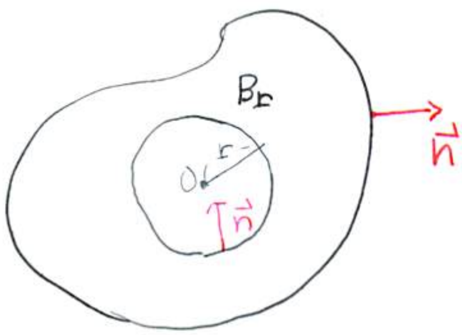
5. Jun. 2012

<u>例6.1</u>

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 有界領域，$\partial\Omega$は滑らか．$0\in\Omega$．

$$\Rightarrow -\iint_{\partial\Omega} \nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right)\cdot\vec{n}\,dS = 4\pi.$$

ただし．$\vec{n}$は$\partial\Omega$の外向単位法線ベクトル．



∵) $\vec{x}\neq 0$ で

$\Delta\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right)=0$ だったから

$B_r = B_r(0) = \{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 : |\vec{x}|<r\}$

とおくと．$B_r\subset\Omega$ なる $r>0$ に対し．

$$-\iint_{\partial\Omega}\nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right)\cdot\vec{n}\,dS = -\iint_{\partial\Omega}\nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right)\cdot\vec{n}\,dS - \iint_{\partial B_r}\nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right)\cdot\vec{n}\,dS$$

とても正確にかくなら $\partial(\mathbb{R}^3\setminus B_r)$

$$+\iint_{\partial B_r}\nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right)\cdot\vec{n}\,dS$$

Gaussの発散定理

$$= -\iiint_{\Omega\setminus B_r}\mathrm{div}\left(\nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right)\right)dx\,dy\,dz + \iint_{\partial B_r}\nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right)\cdot\vec{n}\,dS$$

$$= \iint_{\partial B_r} \nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right)\cdot\vec{n}\, dS.$$

ここで $\nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right) = -\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$, $\vec{n} = -\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ より

B_rからみると、これは内向単位法線。

$$\iint_{\partial B_r} \nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right)\cdot\vec{n}\, dS = \iint_{\partial B_r} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}\cdot\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\, dS$$

$$= \iint_{\partial B_r} \frac{1}{r^2}\, dS$$

← $\vec{x}$に依らない

$$= \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$$

$\partial B_r = S_r$ の面積

が得られる.

<u>注意 6.1</u>

この計算は複素関数論におけるCauchyの積分定理とCauchyの積分公式（留数定理）にだいたい対応している. 調和関数と正則関数がだいたい同じようなものと思ってみるとよい.

系6.2

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\vec{n}$; 定理6.1と同じ. fはΩ上のスカラー場

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} \Delta f\, dxdydz = \iint_{\partial\Omega} \nabla f \cdot \vec{n}\, dS.$$

$\Delta f = \mathrm{div}\,(\nabla f)$ に定理6.1を使う

問6.1 (平均値の定理, 難)

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ は有界領域. $\partial\Omega$は滑らか. $u \in C^2(\Omega)$

u は調和関数 $\Longrightarrow$ ${}^\forall x \in \Omega$, $B_r(x) \subset \Omega$ なる ${}^\forall r > 0$
i.e. $-\Delta u = 0$ in Ω に対し

$$\frac{1}{|S_r(x)|} \iint_{S_r(x)} u\, dS = u(x).$$

を示せ. ただし $S_r(x) := \{ Y \in \mathbb{R}^3 : |x - Y| = r \}$.

注意6.2

Gaussの発散定理は, 3次元でなくとも成り立つ.

つまり $\Omega \subset \mathbb{R}^n$: 有界領域, $\partial\Omega$: 滑らか. $F \in \mathfrak{X}(\Omega)$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \mathrm{div}\, F\, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu\, d\sigma$$

ただし, ν: $\partial\Omega$の外向単位法線. $d\sigma$は面素.

§§6.2 Greenの定理

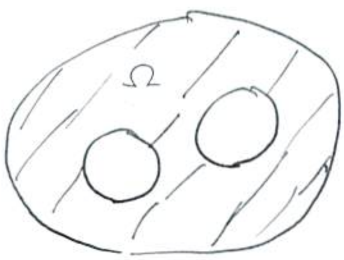
$\mathbb{R}^2$においてもGaussの発散定理は成立するが別の形でかくこともできる.

単純閉曲線 : 自己交差のない閉曲線

定理 6.2 (Greenの定理)

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$: 有限個の単純閉曲線で囲まれた有界領域

P, Q : Ω上のスカラー場.



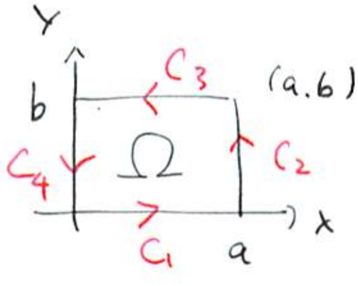
$$\Rightarrow \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial\Omega} (P\,dx + Q\,dy).$$

ただし. $\partial\Omega$の向きは. Ωを左手にみて進む向きとする.

12. Jun. 2012.

証明

$\Omega = (0, a) \times (0, b)$ のときに示す.



$\partial\Omega = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$

$C_1 : (t, 0) \quad t: 0 \to a$

$C_2 : (a, t) \quad t: 0 \to b$

$C_3 : (t, b) \quad t: a \to 0$

$C_4 : (0, t) \quad t: b \to 0$

$$\int_{\partial\Omega} P\,dx = \left(\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3}+\int_{C_4}\right) P\,dx$$

x成分が変化しないので 0.

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dt}{dt}=1$$

$$= \underbrace{\int_0^a P(t,0)\,dt}_{\int_{C_1} P\,dx} + \underbrace{\int_a^0 P(t,b)\,dt}_{\int_{C_3} P\,dx}$$

$$= -\int_0^a \underbrace{\big(P(t,b)-P(t,0)\big)}_{=\int_0^b \frac{\partial P}{\partial y}(t,y)\,dy}\,dt$$

$$= -\int_0^a\int_0^b \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dx\,dy.$$

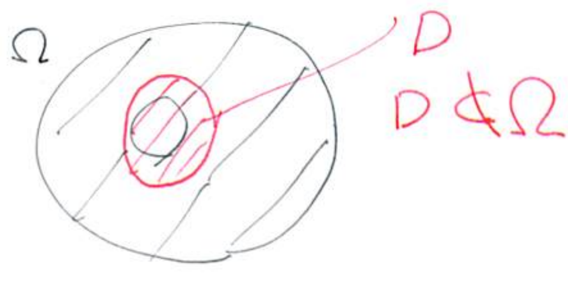
同様にして

$$\int_{\partial\Omega} Q\,dx = \int_0^a\int_0^b \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dx\,dy.$$

□

Ω が単連結 $\overset{}{\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}}$ Ω内の任意の単純閉曲線が囲う領域 D について $D \subset \Omega$.

単連結



単連結でない

系 6.3

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 単連結領域, P, Q : Ω 上のスカラー場

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{in } \Omega$$

$\Longrightarrow$ $^\exists f$: Ω 上のスカラー場 s.t.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q.$$

注意

これは $y = y(x)$ の微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y(x))}{Q(x, y(x))}$$

が完全形であるための必要十分条件を与えている

証明

$(x_0, y_0) \in D$ を固定し、${}^{\forall}(x, y) \in D$ に対し

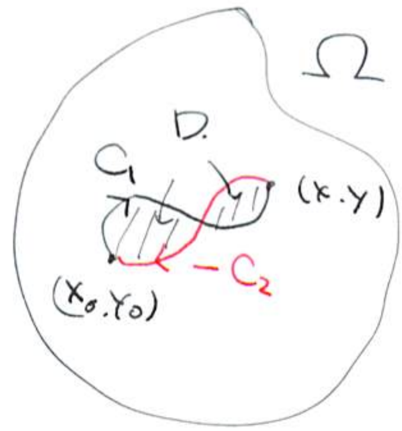
$$f(x, y) := \int_C \{P(\xi, \eta)\, d\xi + Q(\xi, \eta)\, d\eta\} \quad \text{—}(*)$$

と定義する。ここで C は、(x_0, y_0) から (x, y) へ向かう曲線とする。

$(*)$ の右辺が C の取り方に依らないことを示す。

C_1, C_2 がともに (x_0, y_0) から (x, y) へ向かう曲線とすると、$C_1 - C_2$ は閉曲線で

Ω が単連結より $C_1 - C_2$ の内部を D とすると $D \subset \Omega$



よって Green の定理より

$$0 = \iint_D \left\{ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\} dx\,dy$$

$$= \int_{C_1 - C_2} (P\,dx + Q\,dy) = \int_{C_1} (P\,dx + Q\,dy) - \int_{C_2} (P\,dx + Q\,dy).$$

よって $\displaystyle\int_{C_1} (P\,dx + Q\,dy) = \int_{C_2} (P\,dx + Q\,dy).$

十分小さな h に対し

$$\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \frac{1}{h}\int_{C_h}(P\,d\xi + Q\,d\eta) \quad \left(C_h : (x+h,y) \to (x,y)\right)$$

$$= \frac{1}{h}\int_{C_h} P\,d\xi$$

η成分が
変化しない

$h \to 0$ とすれば $\dfrac{\partial f}{\partial x} = P$. 同様にして $\dfrac{\partial f}{\partial y} = Q$

□.

19. Jun. 2012

定理 6.3 (Cauchy の積分定理)

$D \subset \mathbb{C}$: 単連結領域, f : D 上正則関数.

(簡単のため)

$C \subset D$: 単純閉曲線

$$\Longrightarrow \int_C f(z)\,dz = 0$$

略証

$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, $z = x+iy$ とおくと

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u(x,y)+iv(x,y))(dx+idy)$$

$$= \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (v\,dx + u\,dy). \quad —(*)$$

それぞれに Green の定理を使うと.

$$\int_C (u\,dx - v\,dy) = \iint_\Omega \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$i\int_C (v\,dx + u\,dy) = \iint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy$$

ただし Ω は C で囲われた領域.

f は正則だから. Cauchy-Riemannの関係式より

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

より(*)の右辺は 0 となる　□

§§6.3 Stokesの定理.

<u>定理6.4</u> (Stokesの定理)

$S \subset \mathbb{R}^3$: 曲面. 連続な単位法線ベクトル場 $\hat{n}$ が存在.

C: 曲面を囲う曲線.

$\vec{F}$: $S \subset \Omega$ をみたす $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 上のベクトル場

$$\Longrightarrow \iint_S \mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad \text{—(*1)}$$

<u>証明</u> $\vec{F} = (F^1, F^2, F^3)$

$\vec{n} = (n^1, n^2, n^3)$ として. (*)を成分でかくと

$$\iint_S \left\{ (F^3_y - F^2_z) n^1 + (F^1_z - F^3_x) n^2 + (F^2_x - F^1_y) n^3 \right\} dS$$

$$= \int_C (F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz)$$

$$\iint_S (F^1_z n^2 - F^1_y n^3)\, dS = \int_C F^1 dx \quad \text{—(*1)}$$

を

$$S : \vec{r} = \vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \quad (u,v) \in D.$$

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|}$$ のときに示す.

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(y_u z_v - z_u y_v,\ z_u x_v - x_u z_v,\ x_u y_v - y_u z_v \right)$$

より

$$n^2 dS = (z_u x_v - x_u z_v)\, du\, dv, \quad n^3 dS = (x_u y_v - y_u z_v)\, du\, dv.$$

合成関数の微分より

$$\frac{\partial F^1}{\partial u} = F^1_x x_u + F^1_y y_u + F^1_z z_u.$$

$$\frac{\partial F^1}{\partial v} = F^1_x x_v + F^1_y y_v + F^1_z z_v$$

より

$$(*1\text{の左辺} = \iint_D \left(\frac{\partial F^1}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial F^1}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) du\, dv$$

$$= \iint_D \left\{ \frac{\partial}{\partial u}\left(F^1 \frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(F^1 \frac{\partial x}{\partial u}\right) \right\} du\, dv$$

$$= \int_{\partial D} F^1 \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right)$$

Greenの定理

$$= \int_C F^1 dx \qquad \square$$

§7 微分形式と積分定理 (発展)

cf. 小林 昭七 「曲面と曲線の微分幾何」 裳華房 1995

§2.5. §4.1

村上 信吾 「多様体」 共立出版 1989.

$$\int_\Omega f\, \underline{dx\,dy\,dz}, \quad \int_C f\, \underline{dx}, \quad \int_C f\, \underline{dz}$$

これらに意味を与えたい

以下 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ は領域とする.

§§7.1 微分形式.

定義

Ω 上の微分形式とは. Ω 上の関数 f と微分 dx, dy, dz を加えたり. 外積 $\wedge$ をしたり したもの. ここで 外積は.

$$dx\wedge dx = dy\wedge dy = dz\wedge dz = 0.$$

$$dx\wedge dy = -dy\wedge dx \quad \text{etc}.$$

に従うものとする.

例

0-形式 Ω 上のスカラー場 f

1-形式 $f\,dx + g\,dy + h\,dz$

2-形式 $f\,dy\wedge dz + g\,dz\wedge dx + h\,dx\wedge dy$

3-形式 $f\,dx\wedge dy\wedge dz$.

ここで f, g, h は Ω 上のスカラー場

26. Jun. 2012

例　α, β を1-形式で

$$\alpha = \alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_3 dz,\quad \beta = \beta_1 dx + \beta_2 dy + \beta_3 dz$$

とかくと．$\alpha \wedge \beta$ は 2-形式で

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge \beta &= (\alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_3 dz) \wedge (\beta_1 dx + \beta_2 dy + \beta_3 dz) \\
&= \alpha_1 \beta_1 \underbrace{dx \wedge dx}_{=0} + \alpha_1 \beta_2 dx \wedge dy + \alpha_1 \beta_3 \underbrace{dx \wedge dz}_{-dz \wedge dx} \\
&\quad + \alpha_2 \beta_1 \underbrace{dy \wedge dx}_{-dx \wedge dy} + \alpha_2 \beta_2 \underbrace{dy \wedge dy}_{=0} + \alpha_2 \beta_3 dy \wedge dz \\
&\quad + \alpha_3 \beta_1 dz \wedge dx + \alpha_3 \beta_2 \underbrace{dz \wedge dy}_{-dy \wedge dz} + \alpha_3 \beta_3 \underbrace{dz \wedge dz}_{=0} \\
&= (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) dy \wedge dz + (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) dz \wedge dx \\
&\qquad + (\alpha_2 \beta_2 - \alpha_3 \beta_2) dy \wedge dz .
\end{aligned}$$

となる．

§§7.2　外微分．

定義

0-形式 f に対する外微分 df を

$$df := \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

で定める．

1-形式 $\omega = f dx + g dy + h dz$ に対する外微分 $d\omega$ を

$$d\omega := df \wedge dx + df \wedge dy + df \wedge dz$$

で定める．

例.

~~ω~~ f を0-形式としたとき

$d(df)=0$ を示す.

$$df = f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz.$$

$$\begin{aligned}
d(df) &= df_x \wedge dx + df_y \wedge dy + df_z \wedge dz \\
&= (f_{xx}\,dx + f_{xy}\,dy + f_{xz}\,dz) \wedge dx \\
&\quad + (f_{xy}\,dx + f_{yy}\,dy + f_{yz}\,dz) \wedge dy \\
&\quad + (f_{xz}\,dx + f_{yz}\,dy + f_{zz}\,dz) \wedge dz \\
&\cancel{= -f_{xy}\,dx\wedge dy + f_{xz}\,dz\wedge dx} \\
&\quad \cancel{+ f_{xy}\,dx\wedge dy - f_{yz}\,dy\wedge dz} \\
&= f_{xy}\,dy\wedge dx + f_{xz}\,dz\wedge dx \\
&\quad + f_{xy}\,dx\wedge dy + f_{yz}\,dz\wedge dy \\
&\quad + f_{xz}\,dx\wedge dz + f_{yz}\,dy\wedge dz \\
&= (f_{yz} - f_{yz})\,dy\wedge dz \\
&\quad + (f_{xz} - f_{xz})\,dz\wedge dx \\
&\quad + (f_{xy} - f_{xy})\,dx\wedge dy \quad = 0.
\end{aligned}$$

2形式 $\omega = f\,dy\wedge dz + g\,dz\wedge dx + h\,dx\wedge dy$ に対する外微分 $d\omega$ を

$$d\omega = df\wedge dy\wedge dz + dg\wedge dz\wedge dx + dh\wedge dx\wedge dy$$

で定義する.

◎ 外微分をすると. 微分形式の次数が一つあがる.

§§7.3 微分形式と積分

定義

1-形式 $\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$ が曲線 C 上で定義されているとき. ω の積分を

$$\int_C \omega := \int_C (f\,dx + g\,dy + h\,dz)$$

で定義する.

2-形式 $\omega = f\,dy\wedge dz + g\,dz\wedge dx + h\,dx\wedge dy$ が曲面 S 上で定義されているとき. ω の積分を

$$\int_S \omega := \int_S (f n^1 + g n^2 + h n^3)\,dS$$

で定義する. ただし. $\vec{n} = (n^1, n^2, n^3)$ は S の(外向)単位法線ベクトル.

3-形式 $\omega = f\,dx\wedge dy\wedge dz$ が領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 上で定義されているとき. ω の積分を

$$\int_\Omega \omega := \int_\Omega f\,dxdydz$$

で定義する.

〈Gaussの発散定理〉

$\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) \in \mathcal{X}(\Omega)$ とおくと

$$\int_\Omega \operatorname{div} \vec{F}\, dxdydz = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \circ \vec{n}\, dS.$$

2-形式 $\omega = F^1 dy\wedge dz + F^2 dz\wedge dx + F^3 dx\wedge dy$

とおくと

$$\begin{aligned} d\omega &= (F^1_x + F^2_y + F^3_z)\, dx\wedge dy\wedge dz \\ &= (\operatorname{div} \vec{F})\, dx\wedge dy\wedge dz \end{aligned}$$

より

$$\int_\Omega \operatorname{div} \vec{F}\, dxdydz = \int_\Omega d\omega$$

また

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \vec{F} \circ \vec{n}\, dS &= \int_{\partial\Omega} (F^1 n^1 + F^2 n^2 + F^3 n^3)\, dS \\ &= \int_{\partial\Omega} \omega \end{aligned}$$

より

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega \tag{17.1}$$

が得られる.

3. Jul. 2012.

〈Green の定理〉

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$: 有界領域, P, Q: Ω 上のスカラー場

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \int_{\partial\Omega} (P\,dx + Q\,dy)$$

1-形式 ω を

$$\omega = P\,dx + Q\,dy$$

と定めると.

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy$$

$$= (P_x \underbrace{dx) + P_y\,dy) \wedge dx}_{0} + (Q_x\,dx + \underbrace{Q_y\,dy) \wedge dy}_{0}$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy$$

だから (17.1) と同じ式

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$$

が わかる.

〈Stokesの定理〉

$S \subset \mathbb{R}^3$：曲面，　$C = \partial S$：曲面を囲う曲線．

$\vec{F} = (F^1, F^2, F^3)$：ベクトル場

$$\iint_S \mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \int_{\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\partial S} (F^1dx + F^2dy + F^3dz)$$

これも1-形式 $\omega = F^1dx + F^2dy + F^3dz$

とおくと．（計算は省略するが）

$$\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega$$

が得られる．つまり3つの積分定理は

すべて(7.1)の形をしている．

<u>定理</u>　（Stokesの公式）

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 領域，$\partial\Omega$は滑らか．

ω：Ω上のk次微分形式．

$S = S^{k+1}$：向き付け可能な境界を持つ．

コンパクトな$(k+1)$次元曲面

$$\Rightarrow \int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega.$$

§8 偏微分方程式とベクトル解析(発展)

§8.1 熱方程式のエネルギー評価

〈熱方程式の初期値境界値問題〉

$$
(\mathrm{H})\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)-\Delta u(t,x)=0 & t>0,\quad x\in\Omega \\
\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}(t,x)=0 & t>0,\quad x\in\partial\Omega \\
u(0,x)=\phi(x). & x\in\Omega
\end{cases}
$$

$u=u(t,x):\ (0,\infty)\times\Omega\to\mathbb{R}$ 未知.

$\phi=\phi(x):\ \Omega\to\mathbb{R}$ 既知.

$\Omega\subset\mathbb{R}^3$：有界領域，$\partial\Omega$：滑らか.

$\vec{n}$ ：$\partial\Omega$上の外向単位法線ベクトル.

$\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}(t,x)=\nabla u(t,x)\cdot\vec{n}$ ：$\vec{n}$方向への方向微分.

定理1.1を3次元に拡張してみよう.

定理（エネルギー評価）

u を(H)の滑らかな解とすると $T>0$ に対して

$$
\frac{1}{2}\int_\Omega (u(T,x))^2\,dx+\int_0^T\int_\Omega |\nabla u(t,x)|^2\,dx\,dt
=\frac{1}{2}\int_\Omega (\phi(x))^2\,dx.
$$

が成立する.

証明

(H)の第1式に $u(t,x)$ をかけて Ω 上で積分すると

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\, u(t,x)\, dx - \int_\Omega \Delta u(t,x)\, u(t,x)\, dx = 0 \quad \text{—(*1)}$$

$$((*1)\text{の左辺第1項}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left((u(t,x))^2\right) dx.$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (u(t,x))^2\, dx.$$

$$((*1)\text{の左辺第2項}) = -\int_\Omega \operatorname{div}(\nabla u(t,x))\, u(t,x)\, dx$$

$$= -\int_\Omega \operatorname{div}(u(t,x)\nabla u(t,x))\, dx$$

各自.

$$+\int_\Omega |\nabla u(t,x)|^2\, dx$$

$$\underset{\substack{\text{Gauss の}\\\text{発散定理}}}{=} -\int_{\partial\Omega} u(t,x)\, \underbrace{\nabla u(t,x)\cdot\vec{n}}_{\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(t,x) = 0\ ((H)\text{の第2式})}\, dS$$

$$+\int_\Omega |\nabla u(t,x)|^2\, dx$$

$$= \int_\Omega |\nabla u(t,x)|^2\, dx.$$

従って ※1から

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (u(t,x))^2 dx + \int_\Omega |\nabla u(t,x)|^2 dx = 0$$

となるので両辺 $0 \leq t \leq T$ について積分すると

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (u(T,x))^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (\underbrace{u(0,x)}_{=\phi(x)})^2 dx + \int_0^T\int_\Omega |\nabla u(t,x)|^2 dx\, dt = 0.$$

(H1の第3式

より エネルギー評価が得られる □.

この証明 で でてきた

$$-\int_\Omega \Delta u(t,x)\, u(t,x)\, dx = -\int_{\partial\Omega} u(t,x)\, \nabla u(t,x)\cdot\vec{n}\, dS + \int_\Omega |\nabla u(t,x)|^2 dx$$

は非常によく使う公式なのであらためて定理として述べる

定理（多変数の部分積分）

f, g を Ω 上のスカラー場とすると

$$-\int_\Omega \Delta f(x) g(x)\, dx = -\int_{\partial\Omega} g(x)\nabla f(x)\cdot\vec{n}\, d\sigma + \int_\Omega \nabla f(x)\cdot\nabla g(x)\, dx$$

が成り立つ.

問 熱方程式の境界条件 $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(t,x)=0$ を $u(t,x)=0$ にかえたらどうなるか考えよ.

問 波動方程式の初期値境界値問題

$$
(W) \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - \Delta u(t,x) = 0, & t>0,\ x\in\Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(t,x)=0, & t>0,\ x\in\partial\Omega \\ u(0,x)=\phi(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=\psi(x), & x\in\Omega \end{cases}
$$

を考える. ただし u は未知. ϕ と ψ は既知とする. このとき

エネルギー等式

$$
\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t,x)\right)^2 + |\nabla u(t,x)|^2 dx
$$
$$
= \int_\Omega (\psi(x))^2 + |\nabla\phi(x)|^2 dx
$$

を導け (ヒント: $\frac{\partial u}{\partial t}$ を (W) の第1式にかけて積分してみよ)