

現代解析学 III 講義ノート -ベクトル解析-

1. イントロダクション

1 変数関数に対する微積分の基本定理を思い出してみる.

微積分の基本定理 $f \in C^1(0, 1) = \{f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, C^1\text{級}\}$ に対して

$$\int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0)$$

が成り立つ.

これを使えば, 様々な積分が計算できることはよく知っている. 例えば, 部分積分公式は, 微積分の基本定理から導くことができる.

部分積分公式 $f, g \in C^1(0, 1)$ に対して

$$\int_0^1 f'(x)g(x) dx = f(1)g(1) - f(0)g(0) - \int_0^1 f(x)g'(x) dx$$

が成り立つ. とくに, $g(0) = g(1) = 0$ ならば

$$(1.1) \quad \int_0^1 f'(x)g(x) dx = - \int_0^1 f(x)g'(x) dx$$

が成り立つ.

注意.

(1.1) は解析学, 特に偏微分方程式の解析をするうえで非常に重要な式である. 左辺は f が微分可能でなければ定義できないが, 右辺は f が微分可能でなくても定義できることに注意して欲しい.

この二つの事実だけで, 偏微分方程式の解の性質を調べることができる. ここでは, 熱方程式について調べてみる.

$$(1.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, & t > 0, 0 < x < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = 0, & t > 0, x = 0, 1, \\ u(0, x) = \phi(x), & 0 < x < 1 \end{cases}$$

なる方程式を熱方程式という. ここで $u = u(t, x) : (0, \infty) \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ は未知関数, $\phi = \phi(x) : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ は既知関数である. この方程式は時刻 $t = 0$ で温度分布 $\phi(x)$ の金属棒があったときに, どのような温度分布を示すかを表している. この方程式の解があったとすると, 次がわかる.

定理 1.1 (エネルギー評価).

u が (1.2) の滑らかな解ならば, $T > 0$ に対して,

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (u(T, x))^2 dx + \int_0^T \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (\phi(x))^2 dx$$

が成り立つ.

微積分の基本定理は非常に重要であるが, これらはすべて1次元の話である. 微積分の基本定理は多次元ではどのように理解すればよいだろうか? これに対する答えは次の Gauss の発散定理で与えられる.

定理 1.2 (Gauss の発散定理).

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を有界領域とし, $\partial\Omega$ は C^1 級とする. $\vec{F} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ を境界まで込めて C^1 級とすると

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) dx dy dz = \int_{\partial\Omega} \vec{F}(x, y, z) \cdot \nu d\sigma$$

が成り立つ. ここで, ν は $\partial\Omega$ 上の外向き単位法線ベクトル, $d\sigma$ は面積要素である.

なにやら見慣れない言葉がでてきているだろう. 例えば, div とは? 面積要素とは? 右辺はいったい何者なのか? とかとか. これらを一つ一つ定義していくことが講義の目標である.

2. 3次元ベクトルの演算

以下, $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ とする. 講義では縦ベクトルを用いて書くが, このノートでは横ベクトルで書くことにする.

注意 2.1.

ベクトルの記号として矢印を使うが, この記法は一般的ではない. ベクトルとスカラーを区別するために使っているが, 普通は文脈からわかるため, 区別しないで書くことが多い.

2.1. ベクトルの内積.

定義 2.1 (ベクトルの内積).

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して, \vec{x} と \vec{y} の内積 $\vec{x} \cdot \vec{y}$ を

$$\vec{x} \cdot \vec{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

により定める. また, \vec{x} のノルム $|\vec{x}|$ を

$$|\vec{x}| := \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

により定める.

注意 2.2.

\vec{x} と \vec{y} のなす角を $0 \leq \theta \leq \pi$ で表すと

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| |\vec{y}| \cos \theta$$

が成り立つ. 特に,

$$\cos \theta = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}$$

が成り立つ. この関係を用いて, 二つのベクトルのなす角を定めることができる. さらに, \vec{x} と \vec{y} から作られる平行四辺形の面積は $|\vec{x}||\vec{y}| \sin \theta$ だったから,

$$(\vec{x} \text{ と } \vec{y} \text{ から作られる平行四辺形の面積})^2 = |\vec{x}|^2 |\vec{y}|^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2$$

がわかる.

命題 2.1 (内積の性質).

$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, 次が成り立つ:

- (1) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$;
- (2) $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$;
- (3) $(\lambda \vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (\lambda \vec{y}) = \lambda(\vec{x} \cdot \vec{y})$.

問題 2.1.

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ に対して, 中線定理

$$\frac{|\vec{x} + \vec{y}|^2 + |\vec{x} - \vec{y}|^2}{2} = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2$$

を示せ. また,

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \frac{1}{4}(|\vec{x} + \vec{y}|^2 - |\vec{x} - \vec{y}|^2)$$

を示せ.

2.2. ベクトルの外積.

定義 2.2 (ベクトルの外積).

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して, \vec{x} と \vec{y} の外積 $\vec{x} \times \vec{y}$ を

$$\vec{x} \times \vec{y} := (x_2 y_3 - x_3 y_2) \vec{e}_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \vec{e}_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{e}_3$$

により定める.

注意 2.3.

形式的に

$$\vec{x} \times \vec{y} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

とかける.

命題 2.2.

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して, 次が成り立つ:

- (1) $\vec{x} \cdot (\vec{x} \times \vec{y}) = 0$
- (2) $\vec{y} \cdot (\vec{x} \times \vec{y}) = 0$
- (3) $|\vec{x} \times \vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2 |\vec{y}|^2 - \vec{x} \cdot \vec{y}$

注意 2.4.

命題 2.2 の (1) と (2) から, $\vec{x} \times \vec{y}$ は \vec{x} と \vec{y} に垂直であることがわかる. さらに, 命題 2.2 の (3) から, $|\vec{x} \times \vec{y}|$ の大きさが, \vec{x} と \vec{y} から作られる平行四辺形の面積と一致することがわかる.

定義 2.3 (右手系).

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3), \vec{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$ が右手系をなすとは

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} > 0$$

となることをいう.

注意 2.5.

右手系であるとは, 右手の親指を x 軸, 人差し指を y 軸としたときに, 中指が z 軸となっていることである.

問題 2.2.

$\vec{x} = (2, -3, -1), \vec{y} = (1, 4, -2)$ のとき $\vec{x} \times \vec{y}, \vec{y} \times \vec{x}$ を計算せよ.

命題 2.3 (外積の性質).

$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, 次が成り立つ:

- (1) $\vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}$;
- (2) $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$;
- (3) $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}$;
- (4) $(\lambda \vec{x}) \times \vec{y} = \vec{x} \times (\lambda \vec{y}) = \lambda(\vec{x} \times \vec{y})$.

問題 2.3.

$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ が $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = \vec{0}$ をみたすとき,

$$\vec{x} \times \vec{y} = \vec{y} \times \vec{z} = \vec{z} \times \vec{x}$$

を示せ.

命題 2.4 (ベクトルの三重積).

$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ に対して, 次が成り立つ:

- (1) $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = \det(\vec{x} \ \vec{y} \ \vec{z})$;
- (2) $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{y} \cdot \vec{z})\vec{x}$;
- (3) $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z}$;

とくに, 一般には $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} \neq \vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z})$.

問題 2.4.

$\vec{x} = (1, 2, 1), \vec{y} = (2, 1, 1), \vec{z} = (-1, 1, 2)$ のとき, $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z}$ と $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z})$ を求めよ (括弧の位置に注意せよ).

2.3. ベクトル値関数. 開区間 $I \subset \mathbb{R}$ に対し, $\vec{x} = \vec{x}(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ をベクトル値関数ということがある. \vec{x} の微分可能性は微積分の講義でやったとおりである. すなわち

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{x}(t+h) - \vec{x}(t)}{h}$$

が存在するとき, \vec{x} は点 t で微分可能であるといい, $\frac{d\vec{x}}{dt}(t)$ や $\frac{d}{dt}\vec{x}(t)$, \vec{x}' と書く.

命題 2.5 (ベクトル値関数の微分).

開区間 $I \subset \mathbb{R}$ に対し, $\vec{x} = \vec{x}(t), \vec{y} = \vec{y}(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ は C^1 級とする (このとき, $\vec{x}, \vec{y} \in C^1(I; \mathbb{R}^3)$ と書く). このとき, 次が成り立つ:

- (1) $\frac{d}{dt}(\vec{x} \cdot \vec{y}) = \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \frac{d\vec{y}}{dt}$.
- (2) $\frac{d}{dt}(\vec{x} \times \vec{y}) = \frac{d\vec{x}}{dt} \times \vec{y} + \vec{x} \times \frac{d\vec{y}}{dt}$.

問題 2.5.

$\vec{r} = \vec{r}(t) \in C^1((0, 1); \mathbb{R}^3)$ は $0 < t < 1$ に対して, $|\vec{r}(t)| > 0$ をみたすとする. このとき, 次の関数を微分せよ

- (1) $\frac{\vec{r}(t)}{|\vec{r}(t)|}$
- (2) $\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t)$.

3. 曲線と曲面

この節に関して, より発展的なことは小林昭七「曲線と曲面の微分幾何」の §1.2, §2.2 を参考にして欲しい.

3.1. 平面曲線.

定義 3.1 (平面曲線).

$\vec{p} = \vec{p}(t) = (x(t), y(t)) : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ が平面曲線であるとは, \vec{p} は C^1 級であり, $a < \forall t < b$ に対して

$$\dot{\vec{p}}(t) = \frac{d}{dt}\vec{p}(t) \neq 0$$

が成り立つときをいう.

例 3.1.

$r > 0, 0 \leq t \leq 2\pi$ に対して, $\vec{p}(t) := (r \cos t, r \sin t)$ とおくと, \vec{p} は半径 r で原点中心の円を定める.

命題 3.1.

$\vec{p} = \vec{p}(t)$ を平面曲線とすると, ある変数変換 $t = t(s)$ が存在して

$$\vec{e}_1(s) := \vec{p}'(s) = \frac{d}{ds}\vec{p}(t(s))$$

と書いたときに $|\vec{e}_1(s)| \equiv 1$ となる.

注意 3.1.

命題 3.1 で主張していることは、平面曲線に対して、適当な変数変換のもとに、速度ベクトルが常に 1 とできることを意味している。この s を弧長パラメータという。具体的な問題に対する弧長パラメータを求めることは (積分が求積できるかという意味で) 難しいが、理論的な話では、弧長パラメータを用いた方が見通しがよい。

問題 3.1.

$r > 0, 0 \leq s \leq 2\pi r$ に対して、 $\vec{p}(s) = (r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r})$ は半径 r で原点中心の円を定めるが、 $|\vec{p}'(s)| \equiv 1$ となることを示せ。

3.2. 曲面.

定義 3.2 (曲面).

$D \subset \mathbb{R}^2$ を領域とするとき、 $\vec{p} = \vec{p}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ が曲面であるとは、 $\vec{p} \in C^1(D; \mathbb{R}^3)$ であって、 $\forall (u, v) \in D$ に対して

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v} \neq \vec{0}$$

が成り立つことをいう。

例 3.2.

$D = \{(u, v) : -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, -\pi < v < \pi\} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times (-\pi, \pi)$ に対して、 $\vec{p}(u, v) = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, r \sin u)$ と定めると半径 r 、原点中心の球面 (の一部) になる。

命題 3.2.

$\vec{p}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ を領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された曲面とする。このとき、次が成り立つ:

- (1) $\frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v}$ は点 $\vec{p}(u, v)$ における曲面の法線ベクトルになる。
- (2) 曲面 $\vec{p}(u, v)$ の面積を S とおき、 \vec{p} は単射であるとする。このとき、

$$S = \iint_D \left| \frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v} \right| du dv$$

となる。

4. スカラー場とベクトル場

この節では、 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を領域とする。領域とは、開集合かつ連結な集合のことであった。連結を大雑把に言えば、「つながっている集合」である。

4.1. スカラー場とベクトル場.

定義 4.1.

関数 $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を Ω 上のスカラー場という。また、ベクトル値関数 $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ を Ω 上のベクトル場という。特に

$$\mathcal{X}(\Omega) := \{\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{滑らか}\}$$

と書くことがある。

この表現はどちらかというところ、物理の用語からの転用である。別にわざわざスカラー場やベクトル場と呼ばずに関数とか写像と呼んでもよいのであるが、ベクトル解析や多様体論ではしばしばスカラー場やベクトル場と呼ぶ。

注意 4.1.

この講義では、以下話を簡単にするために、ベクトル場やスカラー場はすべて滑らかなもののみを考える。

定義 4.2.

Ω のスカラー場 f と、 $c \in \mathbb{R}$ に対して、集合 $\{x \in \Omega : f(x) = c\}$ を f の高さ c に対する等位面 (等高面) という。

例えば、 Ω が地図で、 $x \in \Omega$ に対して $f(x)$ が標高を対応させると考えてみて欲しい。このときに、 $c \in \mathbb{R}$ を与えたときに、 $f(x) = c$ をみたす線を等高線というが、これを数学用語として使っていると思っていればよい。

命題 4.1.

f を Ω 上のスカラー場、 $c \in \mathbb{R}$ 、 $x_0 \in \Omega$ 、 $f(x_0) = c$ とし、

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) \right) \neq \vec{0}$$

とする。このとき、 $(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0))$ は高さ c の等高面 $\{x \in \Omega : f(x) = c\}$ の x_0 における法線ベクトルになる。とくに、 $(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0))$ はスカラー場 f が x_0 において増加が最大となる方向に一致する。

定義 4.3.

A を Ω 内のベクトル場とする。このとき、

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t) = A(\vec{r}(t))$$

をみたす Ω 内の曲線 $\vec{r} = \vec{r}(t)$ をベクトル場 A の流線 (または積分曲線) という。

気分だけ説明すると、 Ω を川として、ベクトル場 A がその川の流れの強さ (流速) を表すと思ってみて欲しい。このときに、水にうくもの、例えばゴム製のあひるちゃんみたいなものをその川に流したときに、あひるちゃんが動く軌跡が流線、ないしは積分曲線である。

命題 4.2.

A を Ω 内のベクトル場、 $x_0 \in \Omega$ に対し、 x_0 を通る、ベクトル場 A の流線がただ一つ存在する。すなわち、微分方程式

$$\begin{cases} \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = A(\vec{r}(t)) \\ \vec{r}(0) = x_0 \end{cases}$$

をみたす解 \vec{r} がただ一つ存在する。

4.2. 微分演算子.

定義 4.4 (勾配, ナブラ).

形式的な微分記号のベクトル

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

をナブラという. スカラー場 f に対して

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0) \right)$$

と書く.

問題 4.1.

$\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して, $f(\vec{x}) = |\vec{x}|$ により, \mathbb{R}^3 のスカラー場を定めたとき, ∇f を求めよ. ただし, 原点は除いてよい.

命題 4.3.

f, g を Ω 上のスカラー場, $c \in \mathbb{R}$, $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ とするとき, 次が成り立つ:

- (1) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$;
- (2) $\nabla(cf) = c\nabla f$;
- (3) $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g)$;
- (4) $\nabla \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{(\nabla f)g - f(\nabla g)}{g^2}$;
- (5) $\nabla(\phi(f)) = \phi'(f)\nabla f$.

定義 4.5 (スカラーポテンシャル).

Ω 上のベクトル場 \vec{F} に対し

$$\vec{F} = -\nabla f$$

なるスカラー場 f が存在するとき, ベクトル場 \vec{F} はポテンシャルを持つといい, f を \vec{F} のスカラーポテンシャルという.

定義 4.6 (発散, ダイバージェンス).

Ω 上のベクトル場 $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ に対し, \vec{F} の発散 $\operatorname{div} \vec{F}$ を

$$\operatorname{div} \vec{F} := \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

で定める. これは, 形式的には ∇ と \vec{F} の内積 $\nabla \cdot \vec{F}$ と書くことができる.

問題 4.2.

$\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して,

$$\operatorname{div} \left(\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3} \right)$$

を計算せよ,

命題 4.4.

\vec{F}, \vec{G} を Ω 上のベクトル場, f を Ω 上のスカラー場, $c \in \mathbb{R}$ とするとき, 次が成り立つ:

- (1) $\operatorname{div}(\vec{F} + \vec{G}) = \operatorname{div} \vec{F} + \operatorname{div} \vec{G}$;

- (2) $\operatorname{div}(c\vec{F}) = c \operatorname{div} \vec{F}$;
 (3) $\operatorname{div}(f\vec{F}) = f \operatorname{div} \vec{F} + \nabla f \cdot \vec{F}$.

定義 4.7 (ラプラシアン).

Ω 上のスカラー場 f に対し, f のラプラシアン Δf を

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

で定める. f のラプラシアンは ∇f の発散と同じである. すなわち

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$$

である. 工学では $\nabla^2 = \Delta$ と書くこともある.

問題 4.3.

$\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ に対して,

$$\Delta \left(\frac{1}{|\vec{x}|} \right)$$

を計算せよ.

定義 4.8 (回転, ローテーション, カール).

Ω 上のベクトル場 $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ に対し, \vec{F} の発散 $\operatorname{rot} \vec{F}$ を

$$\operatorname{rot} \vec{F} := \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

で定める. これは, 形式的には ∇ と \vec{F} の外積 $\nabla \times \vec{F}$ と書くことができる.

問題 4.4.

\mathbb{R}^3 のベクトル場 $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ を

$$\vec{F}(x, y, z) := (x^2y, -2xz, 2yz)$$

とおいたとき, $\operatorname{div} \vec{F}$, $\operatorname{rot} \vec{F}$, $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F})$ を求めよ.

命題 4.5.

\vec{F}, \vec{G} を Ω 上のベクトル場, f を Ω 上のスカラー場, $c \in \mathbb{R}$ とするとき, 次が成り立つ:

- (1) $\operatorname{rot}(\vec{F} + \vec{G}) = \operatorname{rot} \vec{F} + \operatorname{rot} \vec{G}$;
 (2) $\operatorname{rot}(c\vec{F}) = c \operatorname{rot} \vec{F}$;
 (3) $\operatorname{rot}(f\vec{F}) = f \operatorname{rot} \vec{F} + (\nabla f) \times \vec{F}$.

定義 4.9 (ベクトルポテンシャル).

Ω 上のベクトル場 \vec{F} に対し

$$\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{f}$$

なるベクトル場 \vec{f} が存在するとき, ベクトル場 \vec{F} はベクトルポテンシャルを持つといい, \vec{f} を \vec{F} のベクトルポテンシャルという.

命題 4.6.

\vec{F} を Ω 上のベクトル場とすると, 次が成り立つ.

- (1) \vec{F} がスカラーポテンシャルをもてば, $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$.

(2) \vec{F} がベクトルポテンシャルをもてば, $\operatorname{div} \vec{F} = 0$.

注意 4.2.

実は, 命題 4.6 は逆も成立する. すなわち, $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$ が成り立てば, \vec{F} はスカラーポテンシャルを持つ. また, $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ なら, \vec{F} はベクトルポテンシャルを持つことが知られている.

最後に, 任意のベクトル場をベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルに分解できることを紹介する. これは Helmholtz 分解と呼ばれている.

定理 4.1 (Helmholtz 分解).

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ は領域とし, (簡単のため) $\partial\Omega$ は十分に滑らかとする. \vec{F} を Ω 上のベクトル場とすると, Ω 上のベクトル場 \vec{F}_1, \vec{F}_2 が存在して, 次が成り立つ:

- (1) \vec{F}_1 はスカラーポテンシャルをもつ. とくに $\operatorname{rot} \vec{F}_1 = \vec{0}$.
- (2) \vec{F}_2 はベクトルポテンシャルをもつ. とくに $\operatorname{div} \vec{F}_2 = 0$.
- (3) $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ が成り立つ.

問題 4.5 (やや難しい).

- $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ を \mathbb{R}^3 上のベクトル場. ベクトル場のラプラシアンを

$$\Delta \vec{v} = (\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3)$$

で定める. このとき,

$$-\Delta \vec{v} = \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{v}) - \nabla(\operatorname{div} \vec{v})$$

を示せ.

- $\vec{u} = \vec{u}(t, x) : (0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を t に依存する \mathbb{R}^n のベクトル場, $p = p(t, x) : (0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ を t に依存する \mathbb{R}^n のスカラー場とする. ベクトルの共変微分 $(\vec{u}, \nabla)\vec{u}$ を

$$(\vec{u}, \nabla)\vec{u} = u_1 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} + u_3 \frac{\partial \vec{u}}{\partial z}$$

と定めると, 流体力学の基礎方程式である (非圧縮性) Navier-Stokes 方程式は

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}, \nabla)\vec{u} - \Delta \vec{u} + \nabla p = \vec{0} & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 & \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

とかける. このとき, \vec{u} と p は十分に滑らかと仮定して, $\omega = \operatorname{rot} \vec{u}$ とおいたときに渦度方程式

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{u}, \nabla)\omega - \omega \operatorname{div} \vec{u} - \Delta \omega = 0 \quad \text{in } (0, \infty) \times \mathbb{R}^3$$

となることを示せ.

5. 線積分と面積分

曲線の長さ (弧長) や曲面の面積はどのように定義すればよいだろうか? グラフ表示できるときは Riemann 積分で定義すればよいが, グラフ表示できるかわからない, もしくは, グラフ表示が一通りでないときには, グラフ表示を使わない方法で弧長や面積を定義しなければならない. スマートな方法は Hausdorff 測度を用いて測度の積分を使うのがよいが, ここでは, Riemann 積分の拡張として, 弧長や面積の計算方法を考える.

閉集合上の連続関数の Riemann 積分は, 閉集合上の一様連続性を用いることで Riemann 和の分割の極限で与えられた. 厳密に定義するには, 上積分と下積分を定義して, 極限が一致することで定義するが, そこまで厳密性にこだわらずに, Riemann 積分の拡張として, 線積分と面積分を定義する.

5.1. 線積分. $C: \vec{r} = \vec{r}(s)$ ($0 \leq s \leq L$) を \mathbb{R}^3 内の曲線とする. ここで, s は弧長パラメータ, すなわち, $\left| \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \right| \equiv 1$ とする. また, $\vec{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$ と成分表示する. また, $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ は連続とする.

定義 5.1 (線積分).

$\Delta: 0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = L$ を $[0, L]$ 区間の分割とする. このとき f の C 上の線積分を

$$\int_C f ds := \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\vec{r}(s_i))(s_i - s_{i-1})$$

で定義する. ここで, $\lim_{|\Delta| \rightarrow 0}$ は分割 $|\Delta|$ の極限である. 同様にして,

$$\int_C f dx := \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\vec{r}(s_i))(x(s_i) - x(s_{i-1}))$$

$$\int_C f dy := \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\vec{r}(s_i))(y(s_i) - y(s_{i-1}))$$

$$\int_C f dz := \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\vec{r}(s_i))(z(s_i) - z(s_{i-1}))$$

と定義する.

この定義は, 1 変数関数における積分の拡張になっており, 1 変数関数における積分特有の性質をもっている. 例えば

- $-C$ を C の向きを逆にした曲線としたときに

$$\int_{-C} f ds = - \int_C f ds$$

- $C = C_1 + C_2$ と分割すると

$$\int_{C_1+C_2} f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds$$

が成り立つ。これらは f を 1 変数関数としたときに

$$\int_b^a f dx = - \int_a^b f dx, \quad \int_b^a f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$$

が成り立つことを思い出せば、なんとなく想像がつくだろう。

次にベクトル場における線積分を定義する。

定義 5.2 (ベクトル場の線積分).

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ は領域で $C \subset \Omega$, $\vec{A} \in \mathcal{X}(\Omega)$, すなわち $\vec{A}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ は滑らかとする。また, Δ は定義 5.1 と同じとする。このとき, ベクトル場の線積分を

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} := \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \vec{A}(\vec{r}(s_i)) \cdot (\vec{r}(s_i) - \vec{r}(s_{i-1}))$$

で定義する。

具体的な計算手法を説明する。 $\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ($a \leq t \leq b$) は弧長パラメータではないとする。 $t = t(s)$ $0 \leq s \leq L$ と弧長パラメータ表示したときに

$$\int_C f ds = \int_0^L f(\vec{r}(t(s))) ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \left| \frac{d\vec{r}}{dt}(t) \right| dt$$

となり,

$$(5.1) \quad \int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{A}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t) dt$$

が成り立つ。なぜなら, s は弧長パラメータだったから, $t(s)$ は s について単調増加となり,

$$\frac{d\vec{r}(t(s))}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt}(t(s)) \frac{dt}{ds}(s), \quad 1 = \left| \frac{d\vec{r}(t(s))}{ds} \right| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt}(t(s)) \right| \frac{dt}{ds}(s)$$

から, (形式的に) 両辺 ds をかけると

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt, \quad ds = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| dt$$

となるからである。

例 5.1.

$C: \vec{r}(t) = (3t^2, 4t^2, 5t^2)$ ($0 \leq t \leq 1$) として,

$$\int_C (x + y + z) ds$$

を求めてみよう。

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = |(6t, 8t, 10t)| = 2t|(3, 4, 5)| = 10\sqrt{2}t$$

となるから

$$\int_C (x + y + z) ds = \int_0^1 (3t^2 + 4t^2 + 5t^2)(10\sqrt{2}t) dt = 30\sqrt{2}$$

が得られる。

問題 5.1.

$C : \vec{r}(t) = (3t, 4t, 5t) \ (0 \leq t \leq 1)$ としても例 5.1 と同じ曲線を定める. このときに

$$\int_C (x + y + z) ds$$

を求めよ. 答えは $30\sqrt{2}$ になる.

線積分は曲線のパラメータ表示に依らない. これは (5.1) で変数変換 $t = t(\zeta)$ を考えたときに,

$$\frac{d\vec{r}}{d\zeta} = \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{dt}{d\zeta}, \quad dt = \frac{dt}{d\zeta} d\zeta$$

であることを用いて示される.

例 5.2.

$C : \vec{r}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, t) \ 0 \leq t \leq \pi$ は円柱ら線を表す. ここで,

$$\int_C (y, -z, x) \cdot d\vec{r}$$

を求めてみよう.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (-2 \sin t, 2 \cos t, 1)$$

だから,

$$\begin{aligned} \int_C (y, -z, x) \cdot d\vec{r} &= \int_0^\pi (2 \sin t, -t, 2 \cos t) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t, 1) dt \\ &= \int_0^\pi (-4 \sin^2 t - 2t \cos t + 2 \cos t) dt \\ &= 4 - 2\pi \end{aligned}$$

となる.

問題 5.2.

$C : \vec{r}(t) = (t, t^2, t^3) \ 0 \leq t \leq 1$ としたときに

$$\int_C (3x^2 + 6y, -14yz, 20xz^2) \cdot d\vec{r}$$

を求めよ.

問題 5.3.

C を xy 平面上の原点を中心とする半径 3 の左回りの円とするとき

$$\int_C (2x - y + z, x + y - z^2, 3x - 2y + 4) \cdot d\vec{r}$$

を求めよ (ヒント: まず曲線 C の表示を求めよ).

5.2. 面積分. 曲面 $S : \vec{p} = \vec{p}(u, v)$, $(u, v) \in D$ に対して $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とする. $\Delta = \{D_1, \dots, D_N\}$ を D の分割とし, $|\vec{p}(D_i)|$ を $\vec{p}(D_i)$ の面積とする.

定義 5.3 (面積分).

f の S 上の面積分を

$$\int_S f dS := \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(Q_i) |\vec{p}(D_i)|$$

で定義する. ただし, $Q_i \in \vec{p}(D_i)$ は任意とする (f の一様連続性から, 右辺は Q_i の取り方によらない).

注意.

面積分の定義では, 曲面のパラメータ表示を用いて定義しているが, 実際には曲面のパラメータ表示 \vec{p} に依らずに定まる.

特に $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を領域, $S \subset \Omega$, $\vec{A} \in \mathcal{X}(\Omega)$ に対して, $\vec{n} = \vec{n}(P)$ を $P \in S$ に対する単位法線ベクトルとしたときに

$$\int_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

が重要である.

さて, 具体的な計算方法を説明する. $D_i \in \Delta$ とすると

$$|\vec{p}(D_i)| \approx \left| \frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v} \right| \delta u \delta v$$

が成立する. ここで, δu と δv はそれぞれ D_i の u 方向, v 方向の長さである (詳しくは講義中に説明する). ここで, 分割の極限をとると

$$dS = \left| \frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v} \right| dudv$$

が成り立ち,

$$\int_S f dS = \iint_D f(\vec{p}(u, v)) \left| \frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v} \right| dudv$$

となる. また,

$$\vec{n} := \frac{\frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v} \right|}$$

とおくと, これはたしかに S の単位法線ベクトルになっており,

$$\begin{aligned} \int_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS &= \iint_D \vec{A}(\vec{p}(u, v)) \cdot \frac{\frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v} \right|} \left| \frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v} \right| dudv \\ &= \iint_D \vec{A}(\vec{p}(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v} \right) dudv \end{aligned}$$

が成り立つ.

例 5.3.

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0\}$ とおき,

$$\int_S (2x^2 + 2y^2 - z^2) dS$$

を求める. 曲面 S は

$$S : \vec{p}(u, v) = (2 \cos u \cos v, 2 \cos u \sin v, 2 \sin u) \quad \left((u, v) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times (-\pi, \pi) \right)$$

とかけるから

$$\left| \frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v} \right| = 4 |(-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u) \times (-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0)| = 4 \cos u$$

となり, 求める積分は

$$\begin{aligned} & \int_S (2x^2 + 2y^2 - z^2) dS \\ &= \iint_{(0, \frac{\pi}{2}) \times (-\pi, \pi)} (2(2 \cos u \cos v)^2 + 2(2 \cos u \sin v)^2 - (2 \sin u)^2) (4 \cos u) du dv \\ &= 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} du \int_{-\pi}^{\pi} (2 \cos^2 u - \sin^2 u) (\cos u) dv = \dots = 32\pi \end{aligned}$$

となる.

例 5.4.

$r > 0$ に対して, $\mathbb{S}_r := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ とおく. このとき, \vec{n} を外向き法線ベクトル (囲まれている側を内向きとする) としたときに

$$\int_{\mathbb{S}_r} \frac{(x, y, z)}{|(x, y, z)|^3} \cdot \vec{n} dS$$

を求める. 点 $(x, y, z) \in \mathbb{S}_r$ における外向き法線ベクトルは $\vec{n} = \frac{(x, y, z)}{r}$ となるから, \mathbb{S}_r 上で

$$\frac{(x, y, z)}{|(x, y, z)|^3} \cdot \vec{n} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^4} = \frac{1}{r^2}$$

となる (つまり, 被積分関数は (x, y, z) に依らない). 従って,

$$\int_{\mathbb{S}_r} \frac{(x, y, z)}{|(x, y, z)|^3} \cdot \vec{n} dS = \int_{\mathbb{S}_r} \frac{1}{r^2} dS = \frac{1}{r^2} \times |\mathbb{S}_r| = 4\pi$$

となる.

問題 5.4.

$\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ とするとき,

$$\int_S \frac{x + y + z}{|(x, y, z)|} dS$$

を求めよ (ヒント: 計算する積分はやや複雑ではあるが, 関数の性質をうまく使うとわりと簡単に計算できる).

6. 積分定理

さて、1変数関数における微積分の基本定理の多変数版を説明する。そのために、1変数関数における微積分の基本定理をもう一度考え直してみる。 $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ が C^1 級であるとき

$$(6.1) \quad \int_0^1 \frac{df}{dx} dx = f(1) - f(0)$$

であった。ここで、 $(0, 1)$ 区間における境界 $x = 0, 1$ の外向き単位法線ベクトル (といても、この場合はスカラーであるが) を $\vec{n}(x)$ とおくと、

$$\vec{n}(x) = 1 \quad (x = 1), \quad \vec{n}(x) = -1 \quad (x = 0)$$

となるから、(6.1) の右辺は

$$\sum_{x=0,1} f(x)\vec{n}(x)$$

とかける。このことは左辺の1次元積分が右辺の0次元積分 (この場合は和) に等しいということを表している。この事情は Hausdorff 測度による積分を定義するとよりすっきりと説明できるが、今は気分として、点は0次元であり、線は1次元だからとっておけばよい。とにかく、導関数を積分すると、一つ次元の低い積分に書きかえられるという感覚がわかってもらえればよい。このことを多次元に一般化したものが、次の Gauss の発散定理である。

6.1. Gauss の発散定理.

定理 6.1 (Gauss の発散定理).

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を有界で境界が滑らかな領域とし、 $F \in \mathcal{X}(\Omega)$ とする。このとき、

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

が成り立つ。ただし、 \vec{n} は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルである。

このことから、すぐにわかることとして、

系 6.1.

Ω を有界で境界が滑らかな領域とし、 f を Ω 上のスカラー場とすると、

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy dz &= \iint_{\partial\Omega} f n_x dS, \\ \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} dx dy dz &= \iint_{\partial\Omega} f n_y dS, \\ \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial z} dx dy dz &= \iint_{\partial\Omega} f n_z dS \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし、 $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルである。

例 6.1.

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ は有界領域で、 $\partial\Omega$ は滑らかとし、 $0 \in \Omega$ とする。このとき、

$$-\iint_{\partial\Omega} \nabla \left(\frac{1}{|\vec{x}|} \right) \cdot \vec{n} dS = 4\pi$$

となる. ただし, \vec{n} は Ω の外向き単位法線ベクトル.

なぜなら, $B_r = B_r(0) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^3 : |\vec{y}| < r\}$ として, $r > 0$ を $B_r \subset \Omega$ をみたすようにとると, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ に対して, $\Delta\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right) = 0$ だから, Gauss の発散定理により,

$$\begin{aligned} - \iint_{\partial\Omega} \nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right) \cdot \vec{n} \, dS &= - \iiint_{\Omega \setminus B_r} \Delta\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right) \, dx dy dz + \iint_{\partial B_r} \left(\nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right) \cdot \vec{n}\right) \, dS \\ &= \iint_{\partial B_r} \left(\nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right) \cdot \vec{n}\right) \, dS \end{aligned}$$

となる. ここで,

$$\nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right) = -\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}, \quad \vec{n} = -\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$$

だから (外向きと内向きが通常考えるものとひっくりかえっていることに注意),

$$\begin{aligned} \iint_{\partial B_r} \nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right) \cdot \vec{n} \, dS &= - \iint_{\partial B_r} \frac{|\vec{x}|^2}{|\vec{x}|^4} \, dS \\ &= - \iint_{\partial B_r} \frac{1}{r^2} \, dS = -\frac{4\pi r^2}{r^2} = -4\pi \end{aligned}$$

となる (例 5.4 も参照).

注意 6.1.

例 6.1 の計算は, 複素関数論における Cauchy の積分定理と Cauchy の積分公式 (留数定理) にだいたい対応している. 調和関数と正則関数がだいたい同じようなものだと思ってみるとよい.

系 6.2.

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$, \vec{n} は定理 6.1 の仮定と同じとし, f を Ω 上のスカラー場とする. このとき,

$$\iiint_{\Omega} \Delta f \, dx dy dz = \iint_{\partial\Omega} (\nabla f \cdot \vec{n}) \, dS$$

が成り立つ.

問題 6.1 (平均値の定理, 難).

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ は有界領域とし, $\partial\Omega$ は滑らか, $u \in C^2(\Omega)$ とする. このとき, u が調和関数, すなわち $-\Delta u = 0$ を Ω 上でみたすならば, 任意の $x \in \Omega$ と $B_r(x) \subset \Omega$ をみたす任意の $r > 0$ に対して

$$\frac{1}{|\mathbb{S}_r(x)|} \iint_{\mathbb{S}_r(x)} u \, dS = u(x)$$

となることを示せ. ただし, $\mathbb{S}_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^3 : |x - y| = r\}$ である.

注意 6.2.

Gauss の発散定理はすべての次元について成立する. つまり, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ のかわりに $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ で考えても, 同様の結果が成立する. ただし, 当然ながら, 右辺の積分は $n - 1$ 次元の面積分として定義しなければならない.

6.2. **Green の定理.** さて, 空間次元が2次元のときは, 各変数における線積分を用いて微積分の基本定理を拡張することもできる. 定理を述べるために, 言葉を一つ定義する. 単純閉曲線とは, 自己交差のない閉曲線のことである.

定理 6.2 (Green の定理).

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を有限個の単純閉曲線で囲まれた有界領域とする. P, Q を Ω 上のスカラー場とすると

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial\Omega} (P dx + Q dy)$$

が成り立つ. ただし, 右辺において, $\partial\Omega$ の向きは Ω を左手にみて進む向きとする (自然な向きという).

領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ が単連結であるとは, Ω 内の任意の単純閉曲線が囲う領域 D について $D \subset \Omega$ が成り立つことをいう. これは, 穴があいていない領域だと思えばよい.

系 6.3.

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を単連結領域とする. Ω 上のスカラー場 P, Q が $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ をみたすならば, Ω 上のスカラー場 f が存在して

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q$$

となる.

Green の定理から, 複素関数論で有名な Cauchy の積分定理が得られる.

定理 6.3 (Cauchy の積分定理).

$D \subset \mathbb{C}$ を単連結領域, f を D 上正則とする. $C \subset D$ を単純閉曲線とすると

$$\int_C f(z) dz = 0$$

が成り立つ.

6.3. **Stokes の定理.** 次に, ベクトル場の線積分を用いた積分定理を考える. これは面積分と線積分を繋ぐ積分定理である.

定理 6.4 (Stokes の定理).

S を \mathbb{R}^3 内の曲面で, S の連続な単位法線ベクトル場 \vec{n} が存在するとし, この曲面を囲う曲線を C とする. このとき, $S \subset \Omega$ をみたす領域 Ω 上のベクトル場 \vec{F} について

$$\iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

が成り立つ.

7. 微分形式と積分定理 (発展的内容)

Ω 上のスカラー場 f に対して,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

と書いた. これらの記号はよく積分の後ろの記号として使っている. そこで, これらに (天下降的ではあるが), 演算と積分を定義して, 積分定理をみなおしてみる.

7.1. 微分形式. Ω 上の微分形式とは, Ω 上の関数と微分 dx, dy, dz を加えたり掛けたりしてできるものであるが, 掛け算は外積 \wedge と呼ばれ

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0, \quad dy \wedge dx = -dx \wedge dy \quad \text{etc}$$

に従うものとする. 具体的には

$$\begin{array}{ll} 0\text{-形式 (0-form)} & \Omega \text{ 上のスカラー場 } f \\ 1\text{-形式 (1-form)} & f dx + g dy + h dz \\ 2\text{-形式 (2-form)} & f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy \\ 3\text{-形式 (3-form)} & f dx \wedge dy \wedge dz \end{array}$$

である. ここで, f, g, h は Ω 上のスカラー場である.

α, β を 1-形式で

$$\alpha = \alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_3 dz, \quad \beta = \beta_1 dx + \beta_2 dy + \beta_3 dz$$

とかくと, $\alpha \wedge \beta$ は 2-形式となり

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= (\alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_3 dz) \wedge (\beta_1 dx + \beta_2 dy + \beta_3 dz) \\ &= \alpha_1 \beta_1 dx \wedge dx + \alpha_1 \beta_2 dx \wedge dy + \alpha_1 \beta_3 dx \wedge dz \\ &\quad + \alpha_2 \beta_1 dy \wedge dx + \alpha_2 \beta_2 dy \wedge dy + \alpha_2 \beta_3 dy \wedge dz \\ &\quad + \alpha_3 \beta_1 dz \wedge dx + \alpha_3 \beta_2 dz \wedge dy + \alpha_3 \beta_3 dz \wedge dz \\ &= \alpha_1 \beta_2 dx \wedge dy + \alpha_1 \beta_3 dx \wedge dz \\ &\quad - \alpha_2 \beta_1 dx \wedge dy + \alpha_2 \beta_3 dy \wedge dz \\ &\quad - \alpha_3 \beta_1 dx \wedge dz + \alpha_3 \beta_2 dy \wedge dz \\ &= (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) dx \wedge dy + (\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1) dx \wedge dz + (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) dy \wedge dz \end{aligned}$$

となる.

7.2. 外微分. 微分形式に対する外微分を定義する. 0-形式 f に対しては, 外微分 df を

$$df := \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

で定義し, 1-形式 $\omega = f dx + g dy + h dz$ に対しては, 外微分 $d\omega$ を

$$\begin{aligned} d\omega &:= df \wedge dx + dg \wedge dy + dh \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

で定義し, 2-形式 $\omega = f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy$ に対しては, 外微分 $d\omega$ を

$$\begin{aligned} d\omega &:= df \wedge dy \wedge dz + dg \wedge dz \wedge dx + dh \wedge dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

で定義する. 外微分は微分形式の次数を 1 つあげることに注意しよう.

問題 7.1.

一般に外微分を 2 回作用させると 0 になる. つまり $d^2 = 0$ となる. このことを確かめよ.

7.3. 微分形式と積分. さて, 微分形式から積分を定義する. 1-形式 $\omega = f dx + g dy + h dz$ が曲線 C 上で定義されているとき, ω の積分は

$$\int_C \omega := \int_C f dx + g dy + h dz$$

で定義する. 2-形式 $\omega = f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy$ が曲面 S 上で定義されているときに, ω の積分は

$$\int_S \omega := \int_S (fn_x + gn_y + hn_z) dS$$

で定義する. ただし, $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ は外向き単位法線ベクトルである. 3-形式 $\omega = f dx \wedge dy \wedge dz$ が有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 上で定義されているとき, ω の積分は

$$\int_\Omega \omega := \int_\Omega f dx dy dz$$

で定義する.

さて, $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) \in \mathcal{X}(\Omega)$ とおくと, Gauss の発散定理は

$$\int_\Omega \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

であった. ここで, 2-形式 ω を

$$\omega := F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy$$

とおくと,

$$d\omega = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz = (\operatorname{div} \vec{F}) dx \wedge dy \wedge dz$$

となる. また,

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\partial\Omega} (F_1 n_x + F_2 n_y + F_3 n_z) dS = \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

だったことから

$$(7.1) \quad \int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$$

が得られる. また, $D \subset \mathbb{R}^2$ を有界な領域, P, Q を D 上のスカラー場とすると, Green の定理は

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} (P dx + Q dy)$$

であったが, これも $\omega = P dx + Q dy$ と定めると (7.1) と同様な等式

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$$

が得られる. さらに, S を \mathbb{R}^3 内の曲面で, 曲面を囲う曲線を $C = \partial S$ とおくと, $S \subset \Omega$ をみたす領域 Ω 上のベクトル場 $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ について Stokes の定理

$$\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

が成り立つが, これも 1-形式 $\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ とおくと (7.1) と同様な等式

$$\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega$$

が得られる. つまり, 3つの積分定理は微分形式を用いると, すべて (7.1) の形をしていることがわかる. 従って, (7.1) さえ証明できてしまえば, 3つの積分定理はすべて証明できることになる. これ以上深くは立ち入らないが, この微分形式はより一般に多様体の上で定義することができ, 多様体の上での積分定理が成り立つ. \mathbb{R}^n の場合で (話を簡単にするために) 少し制限の強い形で紹介する.

定理 7.1 (Stokes の公式).

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域, $\partial\Omega$ は滑らかとする. ω を Ω 上の k 次微分形式とすると, 向き付け可能な境界をもつ, コンパクトな $(k+1)$ 次元曲面 $S = S^{k+1}$ に対して,

$$\int_S d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$$

が成り立つ.

より詳しいことについては,

- 小林 昭七, 「曲線と曲面の微分幾何」, 改訂版, 裳華房, 1995.
- 村上 信吾, 「多様体」, 第二版, 共立出版, 1989.

などを参考にしてほしい.

8. 偏微分方程式への応用 (発展的内容)

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を有界領域で, 境界は滑らかとする.

8.1. 3次元熱方程式に対するエネルギー評価. イントロダクションで説明した1次元熱方程式のエネルギー評価を3次元に拡張してみよう. 次の3次元熱方程式の初期値境界値問題を考える.

$$(8.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(t, x) = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega, \\ u(0, x) = \phi(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

$u = u(t, x) : (0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ は未知関数, $\phi = \phi(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ は既知関数である. また, $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ は \vec{n} 方向への方向微分である. この場合は, $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \nabla u \cdot \vec{n}$ である.

定理 8.1 (エネルギー評価).

u が (8.1) の滑らかな解ならば, $T > 0$ に対して,

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (u(T, x))^2 dx + \int_0^T \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dt = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\phi(x))^2 dx$$

が成り立つ.

エネルギー評価の証明をするまえに一つ準備として, 部分積分公式を導く.

定理 8.2 (多変数関数の積分に対する部分積分).

$f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を 2 回微分可能な関数とすると

$$(8.2) \quad \int_{\Omega} g \Delta f \, dx = \int_{\partial\Omega} g \nabla f \cdot \vec{n} \, dS - \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla g \, dx$$

が成り立つ. ただし, \vec{n} は $\partial\Omega$ 上の外向単位法線ベクトルである.

問題 8.1.

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を滑らかな境界を持つ領域とし, 3 次元の波動方程式の初期値境界値問題

$$(8.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = 0, & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(t, x) = 0, & t > 0, x \in \partial\Omega, \\ u(0, x) = \phi(x), & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = \psi(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

を考える. この波動方程式の滑らかな解 u と $T > 0$ に対して, エネルギー保存則

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t}(T, x) \right)^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u(T, x)|^2 dx = \int_{\Omega} (\psi(0, x))^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla \phi(0, x)|^2 dx$$

が成り立つことを示せ (ヒント: 両辺に $\frac{\partial u}{\partial t}$ をかけて x 変数について積分してみよ).