# 現代解析学III 演習問題　(2012年4月10日)

学籍番号　　　　　　名前

**問題 1.1.**

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$(\vec{x}\text{と}\vec{y}\text{から作られる平行四辺形の面積})^2 = |\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 - (\vec{x}\cdot\vec{y})^2$$

を示せ (ヒント: $\vec{x}$ と $\vec{y}$ から作られる三角形の面積は $\frac{1}{2}|\vec{x}||\vec{y}|\sin\theta$ となることを使う)

**問題 1.2.**

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ に対して, 中線定理

$$\frac{|\vec{x}+\vec{y}|^2 + |\vec{x}-\vec{y}|^2}{2} = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2$$

を示せ. また,

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = \frac{1}{4}(|\vec{x}+\vec{y}|^2 - |\vec{x}-\vec{y}|^2)$$

を示せ.

# 現代解析学 III 演習問題　(2012 年 4 月 17 日)

学籍番号　　　　　　名前

**問題 2.1.**

$\vec{x} = (2, -3, -1)$, $\vec{y} = (1, 4, -2)$ のとき $\vec{x} \times \vec{y}$, $\vec{y} \times \vec{x}$ を計算せよ.

**問題 2.2.**

$\vec{x} = (1, 2, 1)$, $\vec{y} = (2, 1, 1)$, $\vec{z} = (-1, 1, 2)$ のとき, $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z}$ と $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z})$ を求めよ.

**問題 2.3.**

$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ が $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = \vec{0}$ をみたすとき, $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{y} \times \vec{z} = \vec{z} \times \vec{x}$ を示せ.

**問題 2.4.**

$\vec{r} = \vec{r}(t) \in C^1((0,1); \mathbb{R}^3)$ は $0 < t < 1$ に対して, $|\vec{r}(t)| > 0$ をみたすとする. このとき, 次の関数を微分せよ:

$$\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t), \qquad \frac{\vec{r}(t)}{|\vec{r}(t)|}$$

# 現代解析学 III 演習問題　(2012 年 4 月 24 日)

学籍番号　　　　　　名前

**問題 3.1.**

$r > 0,\ 0 < s < 2\pi r$ に対して,

$$\vec{p}(s) := \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right)$$

とおくと, $\vec{p}$ は半径 $r$, 原点中心の円を定める.

(1) $\dfrac{d\vec{p}}{ds}(s)$ を求め, $\left|\dfrac{d\vec{p}}{ds}(s)\right| \equiv 1$ となることを示せ.

(2) $\vec{e_1}(s) := \dfrac{d\vec{p}}{ds}(s)$ とおく. このとき,

$$\vec{e_1}(s)\cdot\vec{e_2}(s) \equiv 0, \quad |\vec{e_2}(s)| \equiv 1, \quad \text{かつ}\ \det(\vec{e_1}(s)\ \vec{e_2}(s)) \equiv 1$$

となる 2 次元ベクトル $\vec{e_2}(s)$ を求めよ (ヒント: $\vec{e_2}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\vec{e_1}(s)$ とおいてみよ. これは, $\vec{e_1}(s)$ を $\frac{\pi}{2}$ 回転させる変換である)

(3) $\dfrac{d\vec{p}}{ds}(s)$ と $\dfrac{d^2\vec{p}}{ds^2}(s)$ が直交することを示せ (ヒント: $\left|\dfrac{d\vec{p}}{ds}(s)\right|^2$ は定数である. $s$ について微分してみよ)

(4) $\dfrac{d\vec{p}}{ds}(s)$ と $\dfrac{d^2\vec{p}}{ds^2}(s)$ が直交するから,

$$\frac{d^2\vec{p}}{ds^2}(s) = \kappa(s)\vec{e_2}(s)$$

と書くことができる. この $\kappa(s)$ を求めよ. この $\kappa(s)$ は曲率といい, 曲線の曲がり具合を定量的に表している.

# 現代解析学 III レポート問題 　(2012 年 4 月 24 日)

この問題は, 講義ノートの命題 4.2 をスカラーの場合で考えたものである．なお, 本問題における証明はベクトル場の場合においてもそのまま使える.

**問題 3.2** (常微分方程式の解の一意存在定理).

$x = x(t)$ は $t$ を変数とする一変数関数, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は Lipschitz 連続関数とする．すなわち, ある $L \geq 0$ が存在して

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad (\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R})$$

をみたすとする．このときに, 実数 $x_0 \in \mathbb{R}$ に対して, 常微分方程式の初期値問題

$$\text{(IVP)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x) & t > 0, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

を考える.

(1) $x \in C([0,T])$ が

$$\text{(3.1)} \qquad x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))\,ds \quad (0 \leq t \leq T)$$

をみたせば, (IVP) の解となることを示せ (ヒント: 両辺を $t$ で微分してみよ).

(2) $x \in C([0,T])$ に対して

$$\|x\|_{C([0,T])} := \sup_{0 \leq t \leq T} |x(t)|$$

とおくと, $\|x\|_{C([0,T])}$ は実数における絶対値と同じような働きをする．特に, $C([0,T])$ には距離

$$d(x,y) := \|x - y\|_{C([0,T])} = \sup_{0 \leq t \leq T} |x(t) - y(t)| \quad (x, y \in C([0,T]))$$

が入り, 完備距離空間になる (このことはとりあえず認めるが, 一様収束と完備距離空間の性質を知っていれば証明はそれ程難しくない．詳しいことは現代解析学 IV で説明する) さて, $T, M > 0$ に対して $X_{T,M} \subset C([0,T])$ を

$$X_{T,M} := \{x \in C([0,T]) : \|x\|_{C([0,T])} \leq M\}$$

とおく．このとき, $X_{T,M}$ は距離 $d$ における閉集合になることを示せ(ヒント: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_{T,M}$ を距離 $d$ に関する収束列としたときに, 極限関数が $X_{T,M}$ に属することを示せばよい).

(3) 完備距離空間における Cauchy の不動点定理を用いて (3.1) の解を構成しよう．$X_{T,M}$ 上の写像 $\Phi$ を $x \in X_{T,M}$ に対して

$$\Phi(x)(t) := x_0 + \int_0^t f(x(s))\,ds \quad (t > 0)$$

とおく．このとき, $x_0, L$ に依存する十分大きな $M > 0$ と十分小さな $T > 0$ が存在して, $\Phi : X_{T,M} \to X_{T,M}$ となることを示せ (ヒント: $|\Phi(x)(t)|$ を $x_0, L, T, M$ で評価し, $|\Phi(x)(t)| \leq M$ をみたすように $T, M$ を定めよ).

(4) $M, T > 0$ をさらに取り直せば, 先の $\Phi$ が縮小写像になる, すなわち,

$$d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq \frac{1}{2} d(x, y) \quad (\forall x, y \in X_{M,T})$$

となることを示せ. 以上により, $\Phi$ が完備距離空間 $X_{M,T}$ 上の縮小写像になることがわかり, Cauchy の不動点定理によって $X_{M,T}$ 上に不動点を持つ. すなわち, (3.1) の解が $0 \leq t \leq T$ の範囲で存在することがわかる.

(5) (余力があれば) (IVP) の解 $x \in C^1([0, T])$ は一意であることを示せ (ヒント: Gronwall の不等式を調べてみよ).

# 現代解析学III 演習問題 (2012年5月8日)

学籍番号　　　　　　名前

**問題 4.1.**
$\mathbb{R}^3$ のベクトル場 $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ を

$$\vec{F}(x, y, z) := (x^2 y, -2xz, 2yz)$$

とおいたとき, $\operatorname{div} \vec{F}$, $\operatorname{rot} \vec{F}$, $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F})$ を求めよ.

**問題 4.2.**
$x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ に対して, $-\Delta \left( \dfrac{1}{|x|} \right)$ を計算せよ.

**問題 4.3** (余力がある人向け)**.**
$\mathbb{R}^3$ 上のスカラー場 $f$ は $x \in \mathbb{R}^3$ に対して $r = |x|$ にのみ依存するとする. すなわち, ある関数 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在して, $f(x) = g(r)$ と書けたとする. このとき, $\Delta f$ を $g$ で表せ.

# 現代解析学 III 演習問題　(2012 年 5 月 15 日)

学籍番号　　　　　　名前

**問題 5.1.**

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を領域とする.

(1) $f, g$ を $\Omega$ 上のスカラー場とするとき, $f\Delta g - \Delta(fg)$ を計算せよ.

(2) $f$ を $\Omega$ 上のスカラー場, $\phi \in C^2(\mathbb{R})$ とするとき, $\Delta(\phi(f))$ を計算せよ (ヒント: 合成関数の微分を計算する. 難しかったら, $\phi(y) = \log y$ で計算してもよい).

**問題 5.2.**

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を領域とする.

(1) $f$ を $\Omega$ 上のスカラー場とするとき, $\mathrm{rot}(\nabla f) = 0$ を示せ.

(2) $\vec{f} \in \mathscr{X}(\Omega)$ とするとき, $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{f}) = 0$ を示せ.

**問題 5.1 の解答.**

(1) $-g\Delta f - 2\nabla f \cdot \nabla g$.

(2) $\phi'(f)\Delta f + \phi''(f)|\nabla f|^2$.

□

**問題 5.3** (問題 5.1 の類題)**.**

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を領域とする.

(1) $f, g$ を $\Omega$ 上のスカラー場とするとき, $f\Delta g + g\Delta f - \Delta(fg)$ を計算せよ.

(2) $f$ を $\Omega$ 上のスカラー場, $\vec{F} \in \mathscr{X}(\Omega)$ とするとき, $\mathrm{div}(f\vec{F})$, $\mathrm{rot}(f\vec{F})$ を計算せよ.

(3) $f, g$ を $\Omega$ 上のスカラー場とするとき, $(f\nabla g) \cdot (\mathrm{rot}(f\nabla g))$ を計算せよ.

# 現代解析学 III 演習問題　(2012 年 5 月 22 日)

学籍番号　　　　　　　名前

**問題 6.1.**

$C : \vec{r}(t) = (3t, 4t, 5t)$ $(0 \le t \le 1)$ としても例 5.1(講義ノート参照) と同じ曲線を定める. このときに

$$\int_C (x + y + z)\, ds$$

を計算せよ. 答えは $30\sqrt{2}$ になる. 余裕があれば, 曲線 $C$ に他のパラメータを考えて, 同様の計算をしてみよ.

**問題 6.2.**

$C : \vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ $0 \le t \le 1$ としたときに

$$\int_C (3x^2 + 6y, -14yz, 20xz^2) \cdot d\vec{r}$$

を求めよ.

# 現代解析学 III 演習問題　(2012 年 6 月 5 日)

学籍番号　　　　　名前

**問題 7.1.**

$C$ を $xy$ 平面上の原点を中心とする半径 3 の左回りの円とするとき

$$\int_C (2x - y + z, x + y - z^2, 3x - 2y + 4) \cdot d\vec{r}$$

を求めよ (ヒント: まず曲線 $C$ の表示を求めよ).

**問題 7.2.**

$\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |(x, y, z)| = 1\}$ とするとき,

$$\int_S \frac{x + y + z}{|(x, y, z)|}\, dS$$

を求めよ (ヒント: 例 5.3 に注意して, 曲面 $\mathbb{S}^2$ の表示を求める. 計算する積分はやや複雑ではあるが, 関数の性質をうまく使うとわりと簡単に計算できる).

# 現代解析学 III 演習問題　(2012 年 6 月 12 日)

学籍番号　　　　　名前

**問題 8.1.**

$\mathbb{S}^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |(x,y,z)| = 1\}$ とするとき,

$$\int_S \frac{x+y+z}{|(x,y,z)|}\, dS$$

を求めよ (ヒント: 先週と同じ問題である. Gauss の発散定理を使ってみよ).

**問題 8.2.**

$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |(x,y,z)| < 2\}$ とする. $\Omega$ 上のベクトル場 $\vec{F}$ を $\vec{F}(x,y,z) = (2x, 2y, -z)$ とおいて

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{F}\, dxdydz = \iint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS$$

を確かめよ. (ヒント: 講義ノートの例 5.3 を使ってよい. $z$ に関して偶関数になっていることをうまく使ってみよ)

# 現代解析学 III 演習問題　(2012 年 6 月 19 日)

学籍番号　　　　　　名前

**問題 9.1.**

Green の定理において, $\Omega$ が長方形のときに

$$\iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy = \int_{\partial\Omega} Q\,dy$$

を示せ.

**問題 9.2.**

$C$ を原点を中心とする半径 2 の円とするとき

$$\int_C (xy(x-y)\,dx + x^2y\,dy)$$

を求めよ (ヒント: Green の定理を使ったあとに, 極座標変換せよ).

# 現代解析学 III 演習問題　(2012 年 6 月 26 日)

学籍番号　　　　　　　名前

**問題 10.1.**

$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=9,\ z \geq 0\}$, $C := \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=9\}$ とおくとき,

$$\iint_S \mathrm{rot}(2x-y+z, x+y-z^2, 3x-2y+4)\cdot\vec{n}\,dS = \int_C (2x-y+z, x+y-z^2, 3x-2y+4)\cdot d\vec{r}$$

を確かめよ.

# 現代解析学III 演習問題　(2012年7月3日)

学籍番号　　　　　　名前

**問題 11.1.**

1-形式 $\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$ の外微分 $d\omega$ を計算して, $dy \wedge dz$ と $dz \wedge dx$ と $dx \wedge dy$ の和で表せ. また, 2-形式 $\omega = f\,dy \wedge dz + g\,dz \wedge dx + h\,dx \wedge dy$ の外微分 $d\omega$ を計算して, $dx \wedge dy \wedge dz$ の形で表せ.

# 現代解析学 **III** 演習問題　(2012 年 7 月 9 日)

学籍番号　　　　　名前

**問題 12.1** (Green の第一公式)**.**

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を有界領域とし, $\partial\Omega$ は滑らかとする. $f, g$ を $\Omega$ 上のスカラー場とするとき,

$$-\int_\Omega \Delta f(x) g(x)\, dx = -\int_{\partial\Omega} g(x) \nabla f(x) \cdot \vec{n}(x)\, d\sigma + \int_\Omega \nabla f(x) \cdot \nabla g(x)\, dx$$

が成り立つことを示せ.

**問題 12.2** (Green の第二公式)**.**

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を有界領域とし, $\partial\Omega$ は滑らかとする. $f, g$ を $\Omega$ 上のスカラー場とするとき,

$$\int_\Omega f(x)\Delta g(x)\, dx - \int_\Omega g(x)\Delta f(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \left(f(x)(\nabla g(x) \cdot \vec{n}(x)) - g(\nabla f(x) \cdot \vec{n}(x))\right)\, dS.$$

が成り立つことを示せ (ヒント: 問題 12.1 の $f$ と $g$ を入れかえて, 辺々引き算してみよ)

# 現代解析学 III 定期試験問題

平成 24 年 7 月 24 日 第 2 時限施行　担当 水野 将司

**注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を許す**

問題 1, 2, 3 は全問必答. 問題 4, 5 のどちらかを選択して答えよ. また, 計算過程は省略せずに書くこと.

**問題 1.**

$x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ に対して, $\nabla \left( \dfrac{1}{|x|} \right)$ と $\Delta \left( \dfrac{1}{|x|} \right)$ を計算せよ.

**問題 2.**

$r > 0$ に対して, $\mathbb{S}_r^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = r\}$ とおく. このとき

$$\int_{\mathbb{S}_r^2} \nabla \left( \frac{1}{|x|} \right) \cdot \vec{n} \, dS$$

を計算せよ. ただし, $\vec{n} = \dfrac{x}{|x|}$ とする.

**問題 3.**

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を有界領域, $\partial\Omega$ は滑らか, $\vec{n}$ を $\partial\Omega$ 上の外向単位法線ベクトル場とし, $0 \in \Omega$ とする. このとき,

$$\int_{\partial\Omega} \nabla \left( \frac{1}{|x|} \right) \cdot \vec{n} \, dS$$

を求めよ.

**問題 4.**

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を有界領域とする. $\Omega$ 上の 1 次微分形式 $\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$ に対して $d(d\omega) = 0$ を示せ.

**問題 5.**

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を滑らかな境界を持つ領域とし, 3 次元の波動方程式の初期値境界値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - \Delta u(t,x) = 0, \quad t > 0, \ x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(t,x) = 0, \quad t > 0, \ x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = \phi(x), \quad x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x), \quad x \in \Omega \end{cases}$$

を考える. この波動方程式の滑らかな解 $u$ と $T > 0$ に対して, エネルギー保存則

$$\int_\Omega \left( \frac{\partial u}{\partial t}(T,x) \right)^2 dx + \int_\Omega |\nabla u(T,x)|^2 \, dx = \int_\Omega (\psi(x))^2 \, dx + \int_\Omega |\nabla \phi(x)|^2 \, dx$$

が成り立つことを示せ (ヒント: 両辺に $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ をかけて $x$ 変数について積分してみよ).