現代解析学 II –関数解析学序論–

イントロダクション: 固有値問題

1. ノルム空間と Banach 空間

1.1. 線形空間. X が $\mathbb{R}$ 上の線形空間であるとは, $x, y \in X$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, 和 $x+y \in X$ とスカラー倍 αx が定義できて, 次の 8 条件をみたすことをいう:

1. $(x+y)+z = x+(y+z) \quad (\forall x, y, z \in X)$,
2. $x+y = y+x \quad (\forall x, y \in X)$,
3. 零元 $0 \in X$ が存在して, $x+0 = 0+x = x \quad (\forall x \in X)$,
4. $\forall x \in X$ に対して, 逆元 $(-x) \in X$ が存在して, $x+(-x) = (-x)+x = 0$,
5. $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \quad (\forall x, y \in X,\ \alpha \in \mathbb{R})$,
6. $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x \quad (\forall x \in X,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R})$,
7. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) \quad (\forall x \in X,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R})$,
8. $1x = x \quad (\forall x \in X)$.

$\mathbb{C}$ 上の線形空間で扱うこともできるが, 話を簡単にするために本稿では, $\mathbb{R}$ 上の線形空間しか扱わない. ただし, Schrödinger 方程式や波動方程式を勉強するためには, $\mathbb{C}$ 上の線形空間が必要である.

例 1.1.

$$C([0,1]) := \{ f : [0,1] \to \mathbb{R},\ \text{連続} \}$$

は $f, g \in C([0,1])$, $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, $f+g$, αf を

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad (x \in [0,1])$$
$$(\alpha f)(x) := \alpha f(x) \quad (x \in [0,1])$$

と定めることにより, $\mathbb{R}$ 上の線形空間となる.

注意 1.1.
　線形空間の定義の x と例 1.1 の x の役割は異なる. 特に $f(x+y) = f(x) + f(y)$ となるわけではないことに注意すること.

注意 1.2.
　$f, g \in C([0,1])$ に対して

$$f = g \underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} f(x) = g(x) \quad (\forall x \in [0,1])$$

より, $f+g = g+f$ を示すには, $\forall x \in [0,1]$ に対して, $(f+g)(x) = (g+f)(x)$ を示さないといけない. 他も同様である. つまり, 書くことが多くなり, 証明をきっちり書ききるのは面倒であり, 省略されることが多い.

1.2. ノルム空間. $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ とおくと

(1) $\|x\| \geq 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$,
(2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$,
(3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R})$,
(4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (\forall x, y \in \mathbb{R}^n)$,

が成り立つ. これは, 線形空間の元の大きさを表している. このことを一般化する.

定義 1.1 (ノルム空間)**.**
　X を線形空間とする. $x \in X$ に対して, $\|x\|_X \in \mathbb{R}$ が定まり, 次の 4 条件をみたすとき, $\|x\|_X \in \mathbb{R}$ を x の**ノルム**という.

1. $\|x\|_X \geq 0 \quad (\forall x \in X)$,
2. $\|x\|_X = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (\forall x \in X)$,
3. $\|\alpha x\|_X = |\alpha| \|x\|_X \quad (\forall x \in X,\ \alpha \in \mathbb{R})$,
4. (三角不等式) $\|x+y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X \quad (\forall x, y \in X)$.

また, ノルムが定義されている空間を**ノルム空間**という.

　X をノルム空間とするとき

$$d(x,y) := \|x-y\|_X \quad (\forall x, y \in X)$$

と定めると, d は X 上の距離になる. すなわち, 次の 4 条件が成立する.

(1) $d(x,y) \geq 0 \quad (\forall x, y \in X)$,
(2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad (\forall x, y \in X)$,
(3) $d(x,y) = d(y,x) \quad (\forall x, y \in X)$,
(4) (三角不等式) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad (\forall x, y, z \in X)$.

従って, **ノルム空間は距離空間である.**

定義 1.2 (点列の収束)**.**
　X をノルム空間, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $x \in X$ とする. このとき $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が x に**収束**[1]するとは

$$d(x_n, x) = \|x_n - x\|_X \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となることをいう. つまり距離空間としての収束と同じである. このとき, X 上で収束することを強調するために, $x_n \to x$ in X $(n \to \infty)$ と書く.

命題 1.1.
　X をノルム空間, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ とする.

(1) $x_n \to x$ in X, $y_n \to y$ in $X \quad (n \to \infty)$ ならば $x_n + y_n \to x + y$ in $X \quad (n \to \infty)$.
(2) $x_n \to x$ in X, $\alpha_n \to \alpha$ in $\mathbb{R} \quad (n \to \infty)$ ならば $\alpha_n x_n \to \alpha x$ in $X \quad (n \to \infty)$.
(3) $x_n \to x$ in $X \quad (n \to \infty)$ ならば $\|x_n\|_X \to \|x\|_X$ in $\mathbb{R} \quad (n \to \infty)$.

例 1.2.
　$f \in C([0,1])$ に対して

$$\|f\|_{C([0,1])} := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

と定めると, $\|f\|_{C([0,1])}$ は f のノルムとなる.

[1]強収束するともいう.

注意 1.3.

例 1.2 の三角不等式を証明するときに $f, g \in C([0,1])$

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{C([0,1])} = \sup_{x\in[0,1]} |(f+g)(x)| &= \sup_{x\in[0,1]} |f(x)+g(x)| \\ &\le \sup_{x\in[0,1]} (|f(x)|+|g(x)|) \\ &\le \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |g(x)|\end{aligned}$$

とする証明があるが, これらの不等式は決して自明ではない. 例えば sup を inf に取りかえたらどうなるか考えてみよ. 実際に sup や inf のついた等式, 不等式を示すときに, sup や inf をつけたままで式変形をするのは間違いや自明でない式変形を犯しやすい (変数が増えるとなおさらである). これらの不等式を証明するには,「sup や inf のない等式や不等式を変形して, sup や inf をとる変数がでないようにする」のが間違いにくい方法である.

例 1.3 (数列空間)**.**

$1 \le p < \infty$ に対して,

$$l^p := \left\{ a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} : \|a\|_{l^p} < \infty \right\}$$

$$\|a\|_{l^p} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^p)$$

と定める. このとき, l^p は線形空間であり, $\|a\|_{l^p}$ は $a \in l^p$ のノルムとなる.

例 1.4 (Lebesgue 空間)**.**

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域とする. $1 \le p < \infty$ に対して,

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ \text{Lebesgue 可測},\ \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty \right\}$$

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (f \in L^p(\Omega))$$

と定める. このとき, $L^p(\Omega)$ は線形空間であり, $\|f\|_{L^p(\Omega)}$ は $f \in L^p(\Omega)$ のノルムとなる. ただし,

$$f = g \underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} f(x) = g(x) \quad \text{for almost all } x \in \Omega$$

である.

1.3. **Banach 空間.** $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ の違いをひとことでいうと, **Cauchy 列が収束するか否か**である. 常微分方程式の解の存在定理は, 通常, Cauchy 列が収束することを用いて示す. そのため, ノルム空間においても, **Cauchy 列が収束するか否か**は重要な問題である.

定義 1.3 (Cauchy 列)**.**

ノルム空間 X に対して, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ が **X 上の Cauchy 列**であるとは, $\forall \varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $\forall n.m \in \mathbb{N}$ に対して

$$n, m \ge N \Longrightarrow \|x_n - x_m\|_X < \varepsilon$$

とできるときをいう.

定義 1.4 (Banach 空間)**.**
ノルム空間 X が **Banach 空間**であるとは, 任意の X 上の Cauchy 列が収束することをいう.

これは, Banach 空間を距離空間とみたときに, **完備**であることと同じである.

例 1.5 (有限次元空間)**.**
$d \in \mathbb{N}$ と $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ に対して,

$$\|x\|_{\mathbb{R}^d} := \sqrt{(x_1)^2 + \cdots + (x_d)^2}$$

とおく. このとき, $\mathbb{R}^d$ は Banach 空間になる.

定理 1.1.
X を有限次元線形空間とし, $\|x\|_X$ を $x \in X$ のノルムとする. このとき, X は Banach 空間になる.

つまり, 有限次元の場合には, (係数体が $\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$ のときには) 常に Banach 空間となる. Banach 空間か否かは無限次元のときにはじめて問題になる.

命題 1.2.
X をノルム空間, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ を X 上の Cauchy 列とする. このとき, $\{\|x_n\|_X\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ 上の Cauchy 列となる. とくに, $\{\|x_n\|_X\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{R}$ 上の収束列となり, 有界である.

例 1.6.
$C([0,1])$ は Banach 空間である. 例 1.2 を参照せよ.

例 1.7.
$1 \leq p < \infty$ に対して, l^p は Banach 空間である. 例 1.3 を参照せよ.

例 1.8.
$1 \leq p < \infty$ に対して,

$$X := \{f : (-1,1) \to \mathbb{R}, \text{連続}, \|f\|_{L^p(-1,1)} < \infty\}$$

$$\|f\|_{L^p(-1,1)} := \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

とおくと, X は **Banach 空間でない**.

例 1.9.
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域とする. $1 \leq p < \infty$ に対して,

$$X := \{f : \Omega \to \mathbb{R}, \text{Lebesgue 可測}, \|f\|_{L^p(-1,1)} < \infty\}$$

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

とおくと, X は **Banach 空間となる**. 例 1.4 も参照せよ.

注意 1.4.
Lebesgue 積分が必要なのは, 例 1.8 の問題点を Riemann 積分では回避できないからである. これは, 連続を Riemann 積分可能にしてもうまくいかない. ただし, 理論的には完

備性のある Lebesgue 積分が有効であるが, 具体的な計算では Riemann 積分を使うことが多い.

2. Hilbert 空間

2.1. Hilbert 空間. $\mathbb{R}^n$ には内積がはいる:

$$(\vec{x}, \vec{y})_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{x_1y_1 + \cdots + x_ny_n} \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

この内積は次の 4 条件をみたす:

(i) $(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0 \quad (\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n)$

(ii) $(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Longleftrightarrow \vec{x} = 0 \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^n)$

(iii) $(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x}) \quad (\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n)$

(iv) $(\vec{x}_1 + \vec{x}_2, \vec{y}) = (\vec{x}_1, \vec{y}) + (\vec{x}_2, \vec{y}), \quad (\alpha\vec{x}, \vec{y}) = \alpha(\vec{x}, \vec{y}) \quad (\forall \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}).$

この性質を無限次元に拡張しよう.

定義 2.1 (内積)**.**
X を線形空間, $x, y \in X$ に対して, $(x, y)_X \in \mathbb{R}$ が x と y の内積であるとは, 次の 4 条件を満たすことをいう.

(i) $(x, x)_X \geq 0 \quad (\forall x \in X)$

(ii) $(x, x)_X = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad (x \in X)$

(iii) $(x, y)_X = (y, x)_X \quad (\forall x, y \in X)$

(iv) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y), \quad (\alpha x, y) = \alpha(x, y) \quad (\forall x_1, x_2, x, y \in X,\ \alpha \in \mathbb{R}).$

注意 2.1.
和とスカラー倍に関する定義について, 証明するときは, $(\alpha x_1 + x_2, y)_X$ だけやればよい. 実際, $\alpha = 1$ とすれば, $x_1 + x_2$ であり, $x_2 = 0$ とすれば, αx_1 となるから, これだけ確認しておけば, 実はすべての場合を網羅していることになっている.

$x \in X$ に対して, $\|x\|_X := \sqrt{(x, x)_X}$ とおく. このとき, $\|x\|_X$ が $x \in X$ のノルムになることを示したい. そのために, Schwarz の不等式を示す.

定理 2.1 (Schwarz の不等式)**.**
線形空間 X に内積 $(\cdot, \cdot)_X$ が定義されているとき

$$|(x, y)_X| \leq \|x\|_X \|y\|_X \quad (\forall x, y \in X)$$

が成り立つ.

証明.
$x.y \in X$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x + ty, x + ty)_X \\ &= (x, x)_X + (x, ty)_X + (ty, x)_X + (ty, ty)_X \\ &= \|x\|_X^2 + 2t(x, y)_X + t^2\|y\|_X^2 \end{aligned}$$

より, 二次方程式の判別式から

$$(x, y)_X^2 - \|x\|_X^2 \|y\|_X^2 \leq 0$$

となる. すなわち

$$(x, y)_X^2 \leq \|x\|_X^2 \|y\|_X^2$$

となる. 両辺平方根をとればよい. □

定理 2.2.
$x, y \in X$ に内積 $(\cdot,\cdot)_X$ が定義されているとき

$$\|x\|_X := \sqrt{(x,x)_X} \quad (\forall x \in X)$$

とおくと, $\|x\|_X$ は $x \in X$ のノルムになる.

証明.
三角不等式のみ示す. $x, y \in X$ に対して,

$$\begin{aligned}\|x+y\|_X^2 &= (x+y, x+y)_X \\ &= (x,x)_X + 2(x,y)_X + (y,y)_X \\ &\leq \|x\|_X^2 + 2\|x\|_X\|y\|_X + \|y\|_X^2 \quad (\because \text{Schwarz の不等式}) \\ &= (\|x\|_X + \|y\|_X)^2\end{aligned}$$

となるから, 両辺平方根を取ればよい. □

定義 2.2 (Hilbert 空間)**.**
H を線形空間とし, $(\cdot,\cdot)_H$ を内積とすると, 定理 2.2 により, H はノルム空間となるが, このノルム $\|\cdot\|_H$ に関して H が完備となるとき, H を Hilbert 空間という.

例 2.1.
$a = \{a_n\}_{n=1}^\infty, b = \{b_n\}_{n=1}^\infty \in l^2$ に対して,

$$(a,b)_{l^2} := \sum_{n=1}^\infty a_n b_n$$

と定めると, $(\cdot,\cdot)_{l^2}$ は l^2 の内積となり,

$$\|a\|_{l^2} = \sqrt{(a,a)_{l^2}} = \sqrt{\sum_{n=1}^\infty a_n^2}$$

となるから完備となる (例 1.7 を参照せよ). 従って l^2 は Hilbert 空間である.

例 2.2.
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域として, $f, g \in L^2(\Omega)$ に対し

$$(f,g)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega f(x)g(x)\,dx$$

とおくと, $(\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$ は内積となり,

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{(f,f)_{L^2(\Omega)}} = \sqrt{\int_\Omega |f(x)|^2\,dx}$$

となるので完備である (例 1.9). 従って, $L^2(\Omega)$ は Hilbert 空間である.

2.2. **直交分解定理.** $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ が直交することと, $(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ は同値であった．このことを無限次元に拡張しよう.

定義 2.3 (直交)**.**
H を Hilbert 空間, $x, y \in H$, $X, Y \subset H$ とする.

- $x \perp y$ であるとは $(x, y)_H = 0$ となることをいう.
- $X \perp Y$ であるとは任意の $x \in X$, $y \in Y$ に対して, $(x, y)_H = 0$ となることをいう.
- $X^\perp := \{y \in X : x \perp y \ (\forall x \in X)\}$ と書く．$X^\perp$ を X の直交補空間という.

$\mathbb{R}^n$ の線形部分空間 $W \subset \mathbb{R}^n$ に対して, $\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$ となることが知られている (直交分解定理). これを無限次元空間に一般化しよう.

定理 2.3 (直交分解定理)**.**
H を Hilbert 空間, $X \subset H$ を閉部分空間とする．このとき任意の $z \in H$ に対して, ただ一つの $x \in X$, $y \in X^\perp$ が存在して, $z = x + y$ とできる．すなわち, $H = W \oplus W^\perp$ となる.
このとき, $H \ni z \mapsto x \in X$ を**直交射影**といい, $P_X z := x$ とかく.

証明.
一意性は演習とする．$z = x + y = x' + y'$ $(x, x' \in X, \, y, y' \in X^\perp)$ と表示できたとして, $\|x - x'\|_H^2$ を計算することによって証明できる.
以下, $z \in H$ に対して, $x \in X$, $y \in X^\perp$ が存在して $z = x + y$ となること, つまり, x, y の存在を示す.
1. $\delta = \inf_{\xi \in X} \|z - \xi\|_H$ とおくと, $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ が存在して

$$\|z - \xi_n\|_H \to \delta \quad (n \to \infty)$$

とできる.
2. $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ が H 上の Cauchy 列であることを示す．中線定理より $n, m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\|(z - \xi_n) - (z - \xi_m)\|_H + \|(z - \xi_n) + (z - \xi_m)\|_H = 2\|z - \xi_n\|_H^2 + 2\|z - z_n\|_H^2 \tag{2.1}$$

となる．よって,

$$\|\xi_n - \xi_m\|_H^2 + \left\| 2\left(z - \frac{\xi_n + \xi_m}{2}\right) \right\|_H^2 = 2\|z - \xi_n\|_H^2 + 2\|z - z_n\|_H^2$$

となるが, X が部分空間だったことより, $\frac{\xi_n + \xi_m}{2} \in X$ となる．δ の定義から

$$\delta \leq \left\| \left(z - \frac{\xi_n + \xi_m}{2}\right) \right\|_H$$

となるので, (2.1) と組み合わせると

$$\|\xi_n - \xi_m\|_H^2 + 4\delta^2 \leq 2\|z - \xi_n\|_H^2 + 2\|z - z_n\|_H^2$$

となるので, $n, m \to \infty$ とすると

$$\|\xi_n - \xi_m\|_H^2 \leq -4\delta^2 + 2\|z - \xi_n\|_H^2 + 2\|z - z_n\|_H^2 \to 0 \quad (n, m \mp \infty)$$

となる．よって, $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ が H 上の Cauchy 列となるので収束する．$\xi_n \to x$ in X $(n \to \infty)$ とおくと, X は閉集合だから $x \in X$ となる．さらに

$$\|z - \xi_n\|_H \to \|z - x\|_H = \delta \quad (n \to \infty)$$

がわかる.

3. $y=z-x\in X^{\perp}$ を示す. $\|\xi\|_H=1$ となる $\xi\in X$ に対して, $\xi\perp y$ を示せばよい (なぜか？) そこで,

$$\varphi(t):=\|y-t(y,\xi)_H\xi\|_H^2 \quad (t\in\mathbb{R})$$

とおく. $y-t(y,\xi)_H\xi=z-(x+t(y,\xi)_H\xi)$ であり, $x+t(y,\xi)_H\xi\in X$ だから

$$\begin{aligned}\delta^2&=\varphi(0)\le\varphi(t)\\&=t^2(y,\xi)_H^2-2t(y,\xi)_H^2+\|y\|_H^2\\&=(y,\xi)_H^2(t-1)^2+\|y\|_H^2-(y,\xi)_H^2\end{aligned}$$

となる. もし, $(y,\xi)_H^2\neq 0$ ならば

$$\varphi(1)=\|y\|_H^2-(y,\xi)_H^2=\varphi(0)-(y,\xi)_H^2<\varphi(0)$$

となる, $t=0$ で φ が最小となることに矛盾する. よって, $(y,\xi)_H^2=0$ となるので, $y\in X^{\perp}$ がわかる. □

例 2.3.

Ω を有界領域とし,

$$X:=\left\{u\in L^2(\Omega):\int_\Omega u(x)\,dx=0\right\}$$

とおくと, X は $L^2(\Omega)$ 内の閉部分空間となる. X への射影 P_X は $u\in L^2(\Omega)$ に対して

$$(P_Xu)(x)=u(x)-\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(y)\,dy \quad (x\in\Omega)$$

で与えられる.

2.3. **正規直交系.** $\vec{e}_1=(1,0,\ldots,0)$, $\vec{e}_2=(0,1,0,\ldots,0)$,$\ldots\vec{e}_n=(0,0,\ldots,n)\in\mathbb{R}^n$ に対して

$$(\vec{e}_i,\vec{e}_j)=\delta_{ij} \quad (i,j=1,\ldots,n)$$

となる. つまり $\mathbb{R}^n$ の最も標準的な基底となる. これを無限次元で考える.

定義 2.4 (正規直交系)**.**

H を Hilbert 空間, $\{x_n\}\subset H$ をたかだか可算集合 (つまり, 有限集合か可算集合) とする. このとき, $\{x_n\}$ が正規直交系であるとは, 任意の添字 i,j に対して, $(x_i,x_j)_H=\delta_{ij}$ が成り立つことをいう.

例 2.4.

$L^2(0,\pi)$ において, $\left\{\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin(nx)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ は正規直交系となる.

以下, 話を簡単にするために, 正規直交系はつねに可算集合の場合のみを考えることにする. 有限集合の場合も, 少しだけ修正すれば同様のことが成立する.

命題 2.1 (Bessel の不等式)**.**
$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ を正規直交系とすると, Bessel の不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, x_k)_H|^2 \leq \|x\|_H^2 \quad (\forall x \in H)$$

が成り立つ.

証明.
$\alpha_k = (x, x_k)_H$ とおくと, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}
0 &\leq \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \right\|_H^2 \\
&= \|x\|_H^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x, x_k)_H + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \alpha_k \alpha_l (x_k, x_l)_H \\
&= \|x\|_H^2 - 2\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \quad (\because\ (x_k, x_l)_H = \delta_{ij}) \\
&= \|x\|_H^2 - \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2
\end{aligned}$$

となる. よって,

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \leq \|x\|_H^2$$

となるから, $n \to \infty$ とすれば Bessel の不等式が得られる. $\square$

$\{\vec{e}_j\}_{j=1}^{n}$ は $\mathbb{R}^n$ の基底となるから, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$x = \alpha_1 \vec{e}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{e}_n \tag{2.2}$$

と書けるが, このとき

$$(x, \vec{e}_j) = \alpha_1(\vec{e}_1, \vec{e}_j) + \cdots + \alpha_n(\vec{e}_n, \vec{e}_j) = \alpha_j$$

だから, (2.2) に代入すると

$$x = (x, \vec{e}_1)\vec{e}_1 + \cdots + (x, \vec{e}_n)\vec{e}_n$$

となる. この性質は無限次元でも成り立つのであろうか?実は常に成り立つとは限らないが, 成り立つための必要十分条件が得られている.

定理 2.4.
$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ を正規直交系とすると以下は同値となる.

(1) $H = \overline{\left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k : \alpha_k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}}^H$.

(2) $x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, x_k)_H x_k \quad (\forall x \in H)$

(3) (Perseval の等式) $\|x\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, x_k)_H|^2 \quad (\forall x \in H)$

(4) $\forall x \in H$, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して, $(x, x_n)_H = 0$ ならば, $x = 0$.

定義 2.5 (完全正規直交系)**.**
定理 2.4 の (1) から (4) のどれか (すなわち, すべて) をみたすとき, $\{x_n\}$ は H の完全正規直交系という.

定理 2.4 の証明は省略する (それほど難しくない). 例えば, 増田 [3] §2.4 を参照せよ.

例 2.5.
l^2 において

$$e_j = \{\delta_{ij}\}_{i=1}^{\infty} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$$

とおくと, $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ は l^2 における完全正規直交系となる.

3. 線形作用素

有限次元線形空間では線形写像が重要な写像であった. 線形空間を勉強するうえで, 線形空間の性質を調べるだけではダメで, 都合のよい線形写像を考えることで, 線形空間のより詳しい性質を調べることができた. この事情は無限次元であっても同様である. 本節では, ノルム空間における写像の中で, 最も行列に似た性質を持つ, 有界線形作用素の性質について述べる.

以下, X, Y は Banach 空間とする.

3.1. 有界線形作用素.

定義 3.1 (線形作用素)**.**
$D \subset X$ を線形部分空間, $T : D \to Y$ とする (以下, $T : D \subset X \to Y$ と書く). このとき, T が**線形作用素**であるとは, 次をみたすことをいう:
(1) 任意の $x_1, x_2 \in D$ に対して, $T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2$;
(2) 任意の $x \in D$, $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, $T(\alpha x) = \alpha Tx$;
このとき, D を線形作用素 T の定義域といい, $D(T)$ と書く.

例 3.1.
$X = Y = C([0,1])$ とする.

$$\begin{cases} D(T) := X = C([0,1]) \\ Tf(x) := \displaystyle\int_0^x f(y)\,dy \quad (f \in D(T),\ x \in [0,1]) \end{cases}$$

と定めたとき, T は線形作用素となる.

例 3.2.

$$\begin{cases} D(T) := C^1([0,1]) \subsetneq C([0,1]) \\ Tf(x) := f'(y) \quad (f \in D(T),\ x \in [0,1]) \end{cases}$$

と定めたとき, T は線形作用素となる.

定義 3.2 (連続作用素)**.**
$T : D(T) \subset X \to Y$ を線形作用素とする. このとき, T が連続であるとは, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(T)$, $x \in D(T)$ が

$$x_n \to x \text{ in } X \quad (n \to \infty)$$

ならば,

$$Tx_n \to Tx \text{ in } Y \quad (n \to \infty)$$

をみたすことをいう.

例 3.1 は連続であるが, 例 3.2 は連続ではない. このことを示すためには次の定理を用いればよい.

定理 3.1.
$T : D(T) \subset X \to Y$ を線形作用素とする. このとき, T が連続であることと, $M > 0$ が存在して, 任意の $x \in D(T)$ に対して, $\|Tx\|_Y \le M\|x\|_X$ が成立することは同値である.

証明.

($\Rightarrow$) 方針のみ述べる．背理法を用いると, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して, $x_n \in D(T)$ が存在して, $\|Tx_n\|_Y > n\|x_n\|_X$ とできる．$y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{x_n}{\|x_n\|_X} \in D(T)$ とおくと

1. $y_n \to 0$ in X $(n \to \infty)$
2. $\|Ty_n\|_Y \to \infty$ $(n \to \infty)$

となることから, 連続性に矛盾する．

($\Leftarrow$) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(T)$, $x \in D(T)$ が $x_n \to x$ in X $(n \to \infty)$ ならば

$$\begin{aligned}\|Tx_n - Tx\|_Y &= \|T(x_n - x)\|_Y \quad (\because\ T \text{ は線形}) \\ &= M\|x_n - x\|_Y \quad (\because\ \text{仮定}) \\ &\to 0 \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

となるから, $Tx_n \to Tx$ in Y $(n \to \infty)$ となる．よって T は連続となる． □

注意 3.1.

$\forall x \in X$ に対して $\|Tx\|_Y \leq \|T\|_{\mathscr{L}(X,Y)}\|x\|_X$ が成り立つ．

定義 3.3 (有界作用素)**.**

$T : D(T) \subset X \to Y$ を線形作用素とする．このとき, T が有界であるとは, $M > 0$ が存在して, 任意の $x \in D(T)$ に対して, $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$ とできることをいう．このとき

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(X,Y) &:= \{T : X \to Y,\ \text{有界線形作用素},\ D(T) = X\} \\ \mathscr{L}(X) &:= \mathscr{L}(X,X), \qquad X^* := \mathscr{L}(X,\mathbb{R}), \\ \|T\|_{\mathscr{L}(X,Y)} &:= \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \quad (T \in \mathscr{L}(X,Y))\end{aligned}$$

と書く．特に X^* は X の共役空間 (dual space) という．

$\mathscr{L}(X,Y)$ は自然に和とスカラー倍が定義できる．すなわち, $T, S \in \mathscr{L}(X,Y)$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}(T+S)x &:= Tx + Sx \quad (x \in X) \\ (\alpha T)x &:= \alpha Tx \quad (x \in X)\end{aligned}$$

により, $T + S$, αT が定義でき, $\mathscr{L}(X,Y)$ がノルム空間となることがわかる．

定理 3.2.

$\mathscr{L}(X,Y)$ は Banach 空間である．

証明.

完備性のみ示す．$\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{L}(X,Y)$ を $\mathscr{L}(X,Y)$ 上の Cauchy 列とする．すなわち, $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n, m \in \mathbb{N}$ に対して

$$n, m \geq N \Rightarrow \|T_n - T_m\|_{\mathscr{L}(X,Y)} < \varepsilon$$

とする．

1. 極限 $T : X \to Y$ が存在することを示す．$\forall x \in X$ と $\forall n, m \in \mathbb{N}$ に対して $n, m \geq N$ ならば

$$\|T_n x - T_m x\|_Y = \|(T_n - T_m)x\|_Y \leq \|(T_n - T_m)\|_{\mathscr{L}(X,Y)}\|x\|_X \leq \varepsilon\|x\|_X \tag{3.1}$$

となるので, $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$ は Y 上の Cauchy 列となる. よって, Y は Banach 空間ゆえ収束するから, $T : X \to Y$ を $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$ で定義する.

2. $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ を示す. T が線形写像となることは各自確かめよ. (3.1) において $m \to \infty$ とすると

$$n \geq N \Longrightarrow \|T_n x - Tx\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X \tag{3.2}$$

となるので, $n \geq N$ ならば

$$\|Tx\|_Y \leq \|Tx - T_n x\|_Y + \|T_n x\|_Y \leq (\varepsilon + \|T_n\|_{\mathscr{L}(X,Y)})\|x\|_X$$

となる. 命題 1.2 より $\|T_n\|_{\mathscr{L}(X,Y)}$ は有界だから, $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ がわかる.

3. $T_n \to T$ in $\mathscr{L}(X,Y)$ $(n \to \infty)$ を示す. (3.2) を $\|x\|_X$ でわると

$$\frac{\|(T_n - T)x\|_Y}{\|x\|_X} \leq \varepsilon$$

となるから, $x \neq 0$ となる $x \in X$ について上限をとると $n \geq N$ ならば

$$\|T_n - T\|_{\mathscr{L}(X,Y)} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|(T_n - T)x\|_Y}{\|x\|_X} \leq \varepsilon$$

となるので, $\|T_n - T\|_{\mathscr{L}(X,Y)} \to 0$ $(n \to \infty)$ がわかる. よって $T_n \to T$ in $\mathscr{L}(X,Y)$ $(n \to \infty)$ が示された. $\square$

例 3.3.

$\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^{\infty}$ とし, $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |\alpha_k| = \gamma$ とする. $1 \leq p \leq \infty$ に対して,

$$\begin{cases} D(T) := l^p \\ \quad Tx := (\alpha_1 \xi_1, \alpha_2 \xi_2, \ldots) \quad (x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^p) \end{cases}$$

と定めるとき, $T \in \mathscr{L}(l^p)$ で $\|T\|_{\mathscr{L}(l^p)} = \gamma$ となる.

例 3.4 (たたみ込み, convolution)**.**

$\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ にたいして,

$$\begin{cases} D(T) := L^p(\mathbb{R}^n) \\ Tf(x) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x-y) f(y)\, dy \quad (f \in L^p(\mathbb{R}^n),\ x \in \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

とおく. このとき $T \in \mathscr{L}(L^p(\mathbb{R}^n))$ となる. $Tf =: \rho * f$ と書き, ρ と f のたたみ込み (convolution) という.

注意 3.2.

$t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\rho_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

でたたみ込み $\rho_t * f$ を考えることが非常に重要である. 実際に $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対し, $u(t,x) = \rho_t * f(x)$ とおくと

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \Delta u(t,x), & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

となる, すなわち, 初期値 f に対する熱方程式の初期値問題の解となることが知られている.

例 3.4 の証明.

次の不等式

$$\|\rho * f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

を示せばよい. 方針のみ述べる. $1 < p < \infty$ の場合のみ示す. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ として

$$|\rho(x-y)f(y)| = |\rho(x-y)|^{\frac{1}{q}} (|\rho(x-y)|^{\frac{1}{p}} |f(y)|)$$

だから, Hölder の不等式より

$$|\rho * f(x)| \leq \|\rho\|^{f}_{L^1(\mathbb{R}^n)} rac1q \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\rho(x-y)||f(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

となる. 両辺 p 乗して積分すると, Fubini の定理により

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\rho * f(x)|^p \, dx \leq \|\rho\|^{f}_{L^1(\mathbb{R}^n)} racpq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\rho(x-y)||f(y)|^p \, dy \right) dx = \|\rho\|^p_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

となる. □

3.2. **逆作用素.** $f : X \to Y$ が全単射のとき, 逆写像 $g = f^{-1} : Y \to X$ が定義でき,

$$g \circ f(x) = x \quad (\forall x \in X), \quad f \circ g(y) = y \quad (\forall y \in Y) \tag{3.3}$$

であった. 逆に, (3.3) をみたす g があれば, f が全単射となることも示せた. このことを線形作用素で考える.

定義 3.4 (逆作用素)**.**

$T \in \mathscr{L}(X, Y)$ とする. 任意の $x \in X$ と $y \in Y$ に対して

$$STx = x, \qquad TSy = y$$

をみたす $S \in \mathscr{L}(Y, X)$ を T の逆作用素といい, $T^{-1} = S$ と書く.

命題 3.1.

$T, S \in \mathscr{L}(X)$ は逆作用素 $T^{-1}, S^{-1} \in \mathscr{L}(X)$ を持つとする. このとき, $TS \in \mathscr{L}(X)$ に対する逆作用素 $(TS)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$ が存在して $(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$ となる.

証明.

$x \in X$ に対して

$$(S^{-1}T^{-1})(TS)(x) = S^{-1}(T^{-1}T)(Sx) = S^{-1}(Sx) = (S^{-1}S)x = x$$

となる. $y \in Y$ に対して, $(TS)(S^{-1}T^{-1})y = y$ となることも同様である. □

定理 3.3.

$T \in \mathscr{L}(X)$ は $\|T\|_{\mathscr{L}(X)} < 1$ をみたすとする. このとき, 次が成り立つ:

- $(I - T)X = \{(I - T)x : x \in X\} = X$;
- $I - T$ の逆作用素 $(I - T)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$ が存在する;
- $(I - T)^{-1}$ は Neumann 級数表示ができる, すなわち

  $$(I - T)^{-1} = I + T + T^2 + T^3 + \cdots + T^n + \cdots$$

  とかける.

- $\|(I-T)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \dfrac{1}{1-\|T\|_{\mathscr{L}(X)}}$ が成り立つ.

注意 3.3.
$|x|<1$ に対して
$$(1-x)^{-1}=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots$$
が成り立つ. 定理 3.3 はこの x を T にかえられることを主張している.

証明.
最後の主張
$$(I-T)^{-1}=I+T+T^2+\cdots+T^n+\cdots$$
のみ示す.
$\|T\|_{\mathscr{L}(X)}<1$ より, $\sum_{n=0}^{\infty}\|T\|_{L(X)}^n<\infty$ である. また, $n\in\mathbb{N}$ に対して $\|T^n\|_{\mathscr{L}(X)}\leq\|T\|_{\mathscr{L}}(X)^n$ より, $m\geq n$ ならば
$$\left\|\sum_{k=0}^{m}T^k-\sum_{k=0}^{n}T^k\right\|_{\mathscr{L}(X)}=\left\|\sum_{k=n+1}^{m}T^k\right\|_{\mathscr{L}(X)}\leq\sum_{k=n+1}^{m}\|T\|_{\mathscr{L}(X)}^k$$
となる. よって, $\{\sum_{k=0}^{n}T^k\}_{n=0}^{\infty}$ は $\mathscr{L}(X)$ 上の Cauchy 列となるから収束する (定理 3.2). そこで, $S=\sum_{k=0}^{\infty}T^k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}T^k$ とおくと
$$ST=\sum_{k=0}^{\infty}T^{k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}T^k-I=S-I$$
$$TS=\sum_{k=0}^{\infty}T^{k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}T^k-I=S-I$$
より $S(I-T)=I$, $(I-T)S=I$ となるので, $S=(I-T)^{-1}$ となる. □

3.3. **閉作用素.** 熱方程式
$$\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=0\quad t>0,\ x\in\Omega$$
を $-\Delta=A$ として
$$\frac{\partial u}{\partial t}+Au=0\quad t>0$$
と変形し, 関数解析の結果を使いたいのだが, A は $C(\overline{\Omega})$ 上では定義ができない (微分ができないため). また $C^2(\overline{\Omega})$ にすると, 空間が狭すぎてしまう[2].

定義 3.5 (閉作用素)**.**
$T:D(T)\subset X\to Y$ を線形作用素とする. このとき
$$\|x\|_{D(T)}:=\|x\|_X+\|Tx\|_Y\quad(x\in D(T))$$
と定義すると, $x\in D(T)$ のノルムになる (グラフノルムという).
T が閉作用素であるとは, $D(T)$ がグラフノルム $\|\cdot\|_{D(T)}$ で閉集合になることをいう.

[2]理由はいろいろあるが, 二階微分まで一様収束することを示すのはとても難しいことと, 初期値を二階連続微分可能とするのは熱方程式が持つ性質からみても条件が強すぎることによる.

例 3.5.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域とする．このとき

$$\begin{cases} D(-\Delta) := C^2(\overline{\Omega}) \\ -\Delta u := -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \cdots - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \quad (u \in C^2(\overline{\Omega})) \end{cases}$$

とすると, $-\Delta$ は $C(\overline{\Omega})$ で閉作用素になる．

注意 3.4.

例 3.5 は偏微分方程式ではやや扱いにくい．より扱いやすい Hilbert 空間で扱うことが多い．興味があれば,「Sobolev 空間」,「弱微分」,「超関数」について調べてみよ．

定理 3.4.

$T : D(T) \subset X \to Y$ が閉作用素であることと次は同値である: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(T)$ がある $x \in X$, $y \in Y$ に対して,

$$x_n \to x \quad \text{in } X \quad (n \to \infty)$$
$$Tx_n \to y \quad \text{in } Y \quad (n \to \infty)$$

ならば, $x \in D(T)$ かつ $Tx = y$.

4. Hilbert 空間における共役空間

以下, H は Hilbert 空間とする.

4.1. Riesz の表現定理.

定理 4.1 (Riesz の表現定理)**.**
任意の $T \in H^*$, すなわち有界線形汎関数 T に対して, ある $u \in H$ が一意に存在して

$$Tx := (u, x)_H \quad (x \in H)$$

が成り立つ.

$H = \mathbb{R}^n$ に標準内積を入れた場合は, $\{\vec{e}_j\}_{j=1}^n$ を標準基底としたときに,

$$u = T(\vec{e}_1)\vec{e}_1 + \cdots + T(\vec{e}_n)\vec{e}_n$$

とすればよい. 証明はあとまわしにして, どういうことに役立つかを見てみる.

4.1.1. 固有値問題の可解性. 関数 $f \in L^2(0, \pi)$ に対して

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2} + u = f, \quad 0 < x < \pi \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

を考える. $u = u(x)$ について, (4.1) の可解性を考えたい. そこで, $\phi = \phi(x) \in C_0^1(0, \pi)$ を (4.1) に掛けて積分すると

$$-\int_0^\pi \frac{d^2u}{dx^2}\phi\,dx + \int_0^\pi u\phi\,dx = \int_0^\pi f\phi\,dx \tag{4.2}$$

が得られる. (4.2) の左辺の最初の積分について, 部分積分を実行すると, $\phi(0) = \phi(\pi) = 0$ に注意すれば

$$\int_0^\pi \frac{du}{dx}\frac{d\phi}{dx}\,dx + \int_0^\pi u\phi\,dx = \int_0^\pi f\phi\,dx$$

となる. $L^2(0, \pi)$ の内積を用いると

$$\left(\frac{du}{dx}, \frac{d\phi}{dx}\right)_{L^2(0,\pi)} + (u, \phi)_{L^2(0,\pi)} = (f, \phi)_{L^2(0,\pi)} \tag{4.3}$$

とかける. そこで, 任意の $\phi \in C_0^1(0, \pi)$ に対して, (4.3) をみたす $u = u(x)$ の存在を Riesz の表現定理を用いて示そう[3].

補題 4.1.
$T : C_0^1(0, \pi) \to \mathbb{R}$ を $\phi \in C_0^1(0, \pi)$ に対して

$$T\phi := (f, \phi)_{L^2(0,\pi)} = \int_0^\pi f(x)\phi(x)\,dx \tag{4.4}$$

で定める. このとき, 任意の $\phi \in C_0^1(0, \pi)$ に対して次の不等式が成り立つ.

$$|T\phi| \le \|f\|_{L^2(0,\pi)} \left(\|\phi\|_{L^2(0,\pi)} + \left\| \frac{d\phi}{dx} \right\|_{L^2(0,\pi)} \right) \tag{4.5}$$

[3] u がどの集合の元として考えるかは実は重要な問題であるが, ここではははっきり書かないことにする. 超関数や Sobolev 空間を必要とする.

証明はSchwarzの不等式を使うだけなので省略する. 次に (4.3) の右辺をノルムにするBanach空間を考える.

補題 4.2.
$u, v \in C_0^1(0,\pi)$ に対して

$$(u,v)_{H_0^1(0,\pi)} := \left(\frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}\right)_{L^2(0,\pi)} + (u,v)_{L^2(0,\pi)} = \int_0^\pi \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx + \int_0^\pi uv\,dx \tag{4.6}$$

と定めると, $(u,v)_{H_0^1(0,\pi)}$ は u, v の内積になる.

これも証明は簡単なので省略する. $u \in C_0^1(0,\pi)$ の $H_0^1(0,\pi)$ におけるノルムは

$$\|u\|^2_{H_0^1(0,\pi)} = \left(\frac{du}{dx}, \frac{du}{dx}\right)_{L^2(0,\pi)} + (u,u)_{L^2(0,\pi)} = \left\|\frac{du}{dx}\right\|^2_{L^2(0,\pi)} + \|u\|^2_{L^2(0,\pi)}$$

だったことから, (4.5) は T が $H_0^1(0,\pi)$ のノルムにおいて有界線形汎関数になっていることを主張している. そこで, $H_0^1(0,\pi) = \overline{C_0^1(0,\pi)}^{H_0^1(0,\pi)}$ と定義する. すなわち, $H_0^1(0,\pi)$ のノルムで $C_0^1(0,\pi)$ の完備化を考える. すると, $H_0^1(0,\pi)$ はHilbert空間となるので, Rieszの表現定理を $H = H_0^1(0,\pi)$ として適用できる. すなわち, 任意の $\phi \in C_0^1(0,\pi)$ に対して

$$T\phi = (u,\phi)_{H_0^1(0,\pi)} \tag{4.7}$$

をみたす $u \in H_0^1(0,\pi)$ が一意に存在する. (4.7) を (4.4), (4.6) の定義を用いてもとに戻してみると

$$\left(\frac{du}{dx}, \frac{d\phi}{dx}\right)_{L^2(0,\pi)} + (u,\phi)_{L^2(0,\pi)} = (f,\phi)_{L^2(0,\pi)}$$

となって, (4.3) をみたす u をみつけることができる.

この一連の方法は, おおまかにいって, 次のステップにわかれている.

1. 解の存在を示したい方程式を考える.
2. 積分を用いて, (4.3) のように (積分を用いた) 微分の階数が少ない式を導く. なお, (4.3) をみたす u を (4.1) の弱解ということがある[4].
3. Rieszの表現定理などを用いて, 弱解が存在することを証明する. 微分の階数が少なくなれば, 考える関数がたくさん増えることになるから, 存在を証明することは易しくなる.
4. 存在を示した解が一つしかないこと (一意性) や微分が実際にはもっとできること (正則性) を示す[5].

二次方程式の解の公式のように, 解を直接書き下すことが出来ればそれにこしたことはないのだが, 数理科学に表れる微分方程式 (例えば運動方程式, Maxwellの方程式, 熱方程式, Schrödinger 方程式...) では, 解を直接書けることは, めったにない. 特に非線形現象まで込めて問題を取り扱おうとするときは, 解を直接書くことはほとんどの場合, 期待できない. そのような問題を扱うときには, 関数解析の知識を用いて, 解の存在をとりあえず示しておき, その解の性質がどうなっているかを調べるという手法が使われることが多い.

[4]正確には, u がどの集合に属しているか？もきちんと明記する必要がある

[5]非圧縮性流体の基礎方程式になるNavier-Stokes 方程式では, この部分に未解決な問題があり, ミレニアム問題と呼ばれている (もし解けたら, クレイ研究所から100万ドルが贈呈される).

4.1.2. 定理 *4.1* の証明. さて, 定理 4.1(Riezs の表現定理) を証明しよう.

定理 4.1 の証明.

1. $u \in H$ の存在を示す. $T = 0$ のときは, $u = 0$ とすればよいので, $T \neq 0$ とする. このとき,

$$N := \{x \in H : Tx = 0\}$$

とおくと, $N \subset H$ は H 上の閉部分空間となる (各自). $N \neq H$ となるから, 直交分解定理 (定理 2.3) より, $H = N \oplus N^{\perp}$ とできる. そこで, $y_0 \neq 0$ となる $y_0 \in N^{\perp}$ を一つとると, 任意の $x \in H$ に対して,

$$T\Big(T(y_0)x - T(x)y_0\Big) = T(y_0)T(x) - T(x)T(y_0) = 0$$

だから, $T(y_0)x - T(x)y_0 \in N$ となる. 従って

$$(T(y_0)x - T(x)y_0, y_0)_H = 0$$

となるから

$$T(y_0)(x, y_0)_H = T(x)(y_0, y_0)_H$$

が得られる. 両辺 $\|y_0\|_H^2$ で割ることにより

$$T(x) = \left(x, \frac{T(y_0)y_0}{\|y_0\|_H^2}\right)_H$$

となる. 従って, $u = \frac{T(y_0)y_0}{\|y_0\|_H^2}$ とすれば, 定理の存在性が証明できた.

2. 一意性を示す. もし, u_1, $u_2 \in H$ が存在して, 任意の $x \in H$ に対して, $T(x) = (u_1, x)_H = (u_2, x)_H$ が成り立つならば,

$$(u_1 - u_2, x)_H = 0$$

となる. $x \in H$ は任意だったから, とくに $x = u_1 - u_2$ とおくと $\|u_1 - u_2\|_H^2 = 0$ となるので, $u_1 = u_2$ が成り立つ. よって, $u \in H$ は一意に存在する. □

4.2. **弱収束.** $\mathbb{R}^d$ 上の点列 $\{\vec{x}_n\}_{n=1} \subset \mathbb{R}^d$ について, $\vec{x}_n = (x_n^1, \ldots, x_n^d)$ と書く. このとき

$$\vec{x}_n \to \vec{x} = (x^1, \ldots, x^d) \iff x_n^k \to x^k \quad (\forall k = 1, \ldots, d) \tag{4.8}$$

であった. この右辺の**各成分が収束すること**を無限次元でどのように解釈すればよいかを考える. $\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\vec{e}_d = (0, 0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\begin{aligned} \vec{x} &= x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + \cdots + x^d\vec{e}_d \\ &= (\vec{x}, \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{x}, \vec{e}_2)\vec{e}_2 + \cdots + (\vec{x}, \vec{e}_d)\vec{e}_d \end{aligned}$$

と書けた. すなわち, $\phi_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を $\vec{x} \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\phi_j(\vec{x}) := (\vec{x}, \vec{e}_j)$$

と定めることにより, $\vec{x}$ の第 j 成分を表現することができる.

もっと一般に $\langle \vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_d \rangle$ を $\mathbb{R}^d$ の基底としたときに, $\vec{x} = y^1\vec{f}_1 + \cdots + y^d\vec{f}_d \in \mathbb{R}^d$ と書くとき,

$$\psi_j(\vec{x}) := y^j$$

により $\psi_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を定義することができる.

命題 4.1.
上記で定義した, ϕ_j, ψ_j はともに線形汎関数となる．さらに, $\langle \phi_1, \ldots, \phi_d \rangle$ と $\langle \psi_1, \ldots, \psi_d \rangle$ はともに $\mathbb{R}^d$ の双対空間

$$(\mathbb{R}^d)^* := \{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R},\ (\text{有界})\ \text{線形汎関数}\ \}$$

の基底となる．

このことから (4.8) の右側の各成分の収束は, 任意の $k = 1, \ldots, d$ に対して $\phi_k(\vec{x}) \to \phi_k(\vec{x})$ と同じである．また, 命題 4.1 より, $\langle \phi_1, \ldots, \phi_d \rangle$ が $(\mathbb{R}^d)^*$ の基底になるのだから, 任意の $\phi \in (\mathbb{R}^d)^*$ について $\phi(\vec{x}) \to \phi(\vec{x})$ とも同じになる．この最後の書き方は, **次元が無限であるか否かに関係がなく定義できる**．いいかえると, 基底を使っていない書き方をしているので, 無限次元であっても定義することができる．

定義 4.1 (弱収束)**.**
点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ が $x \in H$ に**弱収束**するとは, 任意の $T \in H^*$ に対して

$$T(x_n) \to Tx \quad (n \to \infty)$$

が成り立つことをいう．このとき,

$$x_k \rightharpoonup x \quad \text{in } H\ (n \to \infty)$$

とか

$$x_k \to x \quad \text{weakly in } H\ (n \to \infty)$$

書く．

注意 4.1.
弱収束の定義は Hilbert 空間 H を Banach 空間 X にかえてもそのまま定義することができる．もっというと, Banach 空間 X をノルム空間にかえてもそのまま定義することができる．

注意 4.2.
通常のノルム空間 X における収束のことを強収束ということがある．このことを強調したいときは

$$x_k \to x \quad \text{strongly in } X\ (n \to \infty)$$

と書く．

さて, Hilbert 空間では Riesz の表現定理より, 線形汎関数 $T \in H^*$ に対して $u \in H$ が存在して

$$Tx = (u, x)_H \quad (x \in H)$$

とできるのであった．証明は省略したが, 実は $\|T\|_{H^*} = \|u\|_H$ が成り立つ．このことから, $J : H \to H^*$ を $u \in H$ に対して

$$J(u)x := (u, x)_H \quad (x \in H)$$

と定めると, J は全単射, 線形, 等長をみたす．この事実により, H と H^* を同一視することができて, 弱収束に関する次の同値条件が得られる．

命題 4.2.
点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ が $x \in H$ に弱収束することは, 次と同値である: 任意の $u \in H$ に対して

$$(u, x_n)_H \to (u, x)_H \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ.

問題 4.1.
命題 4.2 を利用して, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ が $x \in H$ に強収束するならば, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ は $x \in H$ に弱収束することを示せ.

弱収束は強収束よりも弱い概念である. つまり, 強収束しないが弱収束する例がある.

例 4.1.
$L^2(-1,1)$ 上の点列 $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$g_n(x) := \begin{cases} n & |x| < \frac{1}{n^2} \\ 0 & |x| \geq \frac{1}{n^2} \end{cases}$$

と定めると, $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に弱収束する. 実際に任意の $u \in H$ に対して

$$\begin{aligned} |(u, g_n)_H| = \left| \int_{-1}^{1} u(x) g_n(x)\, dx \right| &= n \left| \int_{-\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{n^2}} u(x)\, dx \right| \\ &\leq \sqrt{2} \left(\int_{-\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{n^2}} |u(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\because \text{Hölder の不等式}) \\ &\to 0 \quad (n \to \infty) \end{aligned}$$

となるからである. しかし

$$\|g_n\|_{L^2(-1,1)}^2 = \int_{-\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{n^2}} n^2\, dx = 2$$

となるので, ノルムが 0 に収束しない. よって g_n は 0 に強収束しない.

最後に, 弱収束が何の役に立つのかを少しだけ説明する. 有限次元では, 有界閉集合と点列コンパクトが同値であった (Bolzano-Weierstrass の定理). しかし, 無限次元になると, この事実は同値にならない. 上記の例 4.1 は有界閉集合と点列コンパクトが同値にならないことを示している. 実際に $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $L^2(-1,1)$ で有界であるにもかかわらず, どのように部分列を取ったとしても強収束しないことがわかる[6]. では弱収束についてはどうであろうか？このことについては, 次の「弱収束のコンパクト性定理」が知られている.

定理 4.2 (弱収束のコンパクト性)**.**
$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ が H 上の有界列であったとする. このとき, ある部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して, $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は $x \in H$ に弱収束する. すなわち

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \quad \text{in } H \ (k \to \infty)$$

とできる.

[6]もし強収束する部分列があったとすると, ノルムが常に 0 にならないことから, 0 に弱収束することに矛盾してしまう.

Hilbert 空間であれば, Cauchy 列であることを示せば収束性は示せるのだが, 具体的な問題[7]で Cauchy 列を示すのは非常に難しい場合がある. このような問題で, 定理 4.2 は非常に有用である. なぜなら, Cauchy 列を示すことよりも, 有界性を示すことの方が簡単な場合が多いからである. 収束することがわかってしまえば, 弱収束が持つ性質をさらに詳しく調べることによって, 収束先の性質がよくわかる場合がある. また, 線形の微分方程式で解の近似列を作って, その収束極限によって, 非線形の微分方程式の解を構成する手法は現在でも非常に有用であるが, この収束性を議論するときにも, 弱収束を用いることが多い. また, 弱収束することを示してから, 別の議論[8]によって弱収束が強収束になることを示すという手法は, 現在よく使われている手法である.

なお, この議論は Hilbert 空間に限定して話を進めたが, Banach 空間に拡張しても, 条件を加えることでほぼ同様の結論を得ることができる. 詳しくは, 増田 [3] や藤田-黒田-伊藤 [2], 黒田 [1] を参照されたい.

参考文献

[1] 黒田 成俊, 「関数解析」共立数学講座 15, 共立出版, 1980.
[2] 藤田 宏, 黒田 成俊, 伊藤 清三「関数解析」岩波基礎数学選書, 岩波出版, 1991.
[3] 増田 久弥, 関数解析, 裳華房, 1994.

[7]特に非線形問題では, 関数の差を評価することは, たいてい難しい.
[8]一般に正則性の議論という.