現代解析学 II 演習問題 その 1　(2013 年 10 月 15 日)

解答用紙は何枚でも使ってよいので, 指数や添字がはっきりわかるように丁寧に書くこと (綺麗に書けというわけではなく, 丁寧に相手が読めるように書く). 特に, **指数や添字はとても重要なので, これらが読めない解答は採点できない.**

問題 1.1.

$C([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R},\ 連続\}$ とおく (ノートの例 1.1 を参照).

(1) $C([0,1])$ の零元は何か？

(2) $f \in C([0,1])$ に対する逆元 $-f$ は何か？

(3) 任意の $f, g \in C([0,1])$ に対して, $f + g = g + f$ を示せ.

(4) 任意の $f \in C([0,1])$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して, $(\alpha + \beta)f = \alpha f + \beta f$ を示せ.

問題 1.2.

X をノルム空間として, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ を $x, y \in X$ に対して

$$d(x, y) := \|x - y\|_X$$

と定める. $(X,\ d)$ が距離空間となることを示せ.

問題 1.3.

X をノルム空間, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $x \in X$ とする.

(1) $\big|\|x_n\|_X - \|x\|_X\big| \leq \|x_n - x\|_X$ を示せ.

(2) $x_n \to x \text{ in } X\ (n \to \infty)$ ならば, $\|x_n\|_X \to \|x\|_X\ (n \to \infty)$ を示せ. 従って, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ が収束列であれば, $\{\|x_n\|_X\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{R}$ 上の有界列となることを示せ.

問題 1.4.

次の問に答えよ (例 1.2 も見よ).

(1) $f \in C([0,1])$ に対して, $\|f\|_{C([0,1])} \geq 0$ を示せ.

(2) $f \in C([0,1])$, $a \in \mathbb{R}$ に対して, $\|\alpha f\|_{C([0,1])} = |\alpha| \|f\|_{C([0,1])}$ を示せ.

問題 1.5.

(X, d) を距離空間とする.

(1) 距離空間における閉包を用いて, $A \subset X$ が X で稠密であることの定義を述べよ.

(2) $A \subset X$ が稠密であることと次は同値であることを示せ: 任意の $x \in X$ に対して, ある A 上の点列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ が存在して, $a_n \to x$ in X as $n \to \infty$.

問題 1.6.

$1 \leq p < \infty$ に対して

$$l^p := \left\{a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} : \|a\|_{l^p} < \infty\right\}$$

$$\|a\|_{l^p}^p := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \quad (a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^p)$$

と定める. l^p について, 和とスカラー倍が定義できること, すなわち $a, b \in l^p$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ について, $a + b \in l^p$ と $\alpha a \in l^p$ を示せ.

問題 1.7 (Hölder の不等式)**.**

次の各問いに答えよ. 但し, 誘導に従わずに Hölder の不等式を示してもよい.

(1) $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ を $x\in(0,\infty)$ に対して, $f(x):=-\log x$ で定義する. $x\in(0,\infty)$ に対して $f''(x)\geq 0$ を示せ.

(2) $p\geq 1$ に対して, $\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}$ により, $q>1$ を定める. $x,y\geq 0$ に対して, 次の不等式を示せ:
$$xy\leq\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}y^q.$$

(3) $\lambda>0$ と $\{a_n\}_{n=1}^\infty,\{b_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb{R}$ に対して, 次の不等式を示せ:
$$\sum_{n=1}^\infty|a_nb_n|\leq\frac{\lambda^p}{p}\sum_{n=1}^\infty|a_n|^p+\frac{1}{q\lambda^q}\sum_{n=1}^\infty|b_n|^q.$$

(4) (3) で $\lambda=\dfrac{\|\{b_n\}_{n=1}^\infty\|_{l^q}^{\frac{1}{p}}}{\|\{a_n\}_{n=1}^\infty\|_{l^p}^{\frac{1}{q}}}$ とおく. このとき, Hölder の不等式を示せ:
$$\sum_{n=1}^\infty|a_nb_n|\leq\left(\sum_{n=1}^\infty|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^\infty|b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

問題 1.8 (Minkowski の不等式)**.**

$p>1$ に対して, $\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}$, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, $\{b_n\}_{n=1}^\infty\in l^p$ とする. なお, 誘導に従わずに Minkowski の不等式を示してもよい.

(1) 次の不等式
$$\sum_{n=1}^\infty|a_n+b_n|^p\leq\left(\sum_{n=1}^\infty|a_n+b_n|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\left(\sum_{n=1}^\infty|a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^\infty|b_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$
を示せ (ヒント: $|a_n+b_n|^p=|a_n+b_n|^{p-1}|a_n+b_n|\leq|a_n+b_n|^{p-1}(|a_n|+|b_n|)$ と Hölder の不等式)

(2) 次の Minkowski の不等式を示せ:
$$\|\{a_n+b_n\}_{n=1}^\infty\|_{l^p}\leq\|\{a_n\}_{n=1}^\infty\|_{l^p}+\|\{b_n\}_{n=1}^\infty\|_{l^p}.$$

問題 1.9.

$l^\infty:=\{\{a_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb{R}:\|\{a_n\}_{n=1}^\infty\|_{l^\infty}:=\sup_{n\in\mathbb{N}}|a_n|<\infty\}$ とおく. $\{a_n\}_{n=1}^\infty\in l^\infty$ に対して, $\|\{a_n\}_{n=1}^\infty\|_{l^\infty}$ がノルムになることを示せ.

問題 1.10 (難)**.**

$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ を領域として,
$$L^\infty(\Omega):=\{f:\Omega\to\mathbb{R},\ \text{Lebesgue 可測},\ \|f\|_{L^\infty(\Omega)}<\infty\},$$
$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)}:=\operatorname*{ess.sup}_{x\in\Omega}|f(x)|:=\inf\{\lambda>0:|f(x)|<\lambda\text{ for almost all }x\in\Omega\}$$
とおく. このとき, $\|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ は $f\in L^\infty(\Omega)$ のノルムとなることを示せ (注意: $\alpha\in\mathbb{R}$, $f\in L^\infty(\Omega)$ に対して, $\|\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)}=|\alpha|\|f\|_{L^\infty(\Omega)}$ を示すこともそれほど易しくない. 三角不等式も問題 1.9 とは違ったやりかたになるはず).

現代解析学 II 演習問題 その 2　(2013 年 11 月 5 日)

問題 2.1.
X を有限次元線形空間とし, $\|x\|_X$ を $x \in X$ のノルムとする. X の基底を $\{e_1, \dots, e_d\}$ とおき, $x = x^1 e_1 + \cdots + x^d e_d \in X$ と書き,

$$\|x\|_1 := |x^1| + |x^2| + \cdots + |x^d|$$

とおく.

(1) $\|x\|_1$ も $x \in X$ のノルムとなることを示せ.
(2) $C_1, C_2 > 0$ が存在して,

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_X \leq C_2 \|x\|_1 \qquad \forall x \in X$$

を示せ.
(3) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ が $\|\cdot\|_X$ に関して Cauchy 列, すなわち $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\exists N \in \mathbb{N}$ が存在して, $\forall n, m \in \mathbb{N}$ に対して

$$m, n \geq N \Longrightarrow \|x_n - x_m\|_X < \varepsilon$$

をみたすとき, $\|\cdot\|_1$ に関する Cauchy 列となることを示せ.
(4) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ が $\|\cdot\|_1$ に関して Cauchy 列であるとき, $\exists x \in X$ が存在して,

$$\|x_n - x\|_1 \to 0 \quad (n \to \infty)$$

を示せ.
(5) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ が $\|\cdot\|_X$ に関して Cauchy 列であるとき, $\|\cdot\|_X$ のノルムで収束列であることを示せ.

問題 2.2.
l^∞ が Banach 空間となることを示せ.

問題 2.3 (難)**.**
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域としたとき, $L^\infty(\Omega)$ が Banach 空間となることを示せ.

問題 2.4 (難)**.**
$C([0,1])$ の部分空間 $C^1([0,1])$ を

$$C^1([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R},\ C^1\text{級}, \|f\|_{C^1([0,1])} < \infty\}$$

$$\|f\|_{C^1([0,1])} := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{df}{dx}(x) \right|$$

とおく. $C^1([0,1])$ が Banach 空間であることを示せ (難しいのは, 極限関数が C^1 となること).

問題 2.5.
X を Banach 空間とし, $Y \subset X$ を閉部分空間とする. すなわち部分空間で閉集合とする. このとき, Y も X のノルムで Banach 空間となることを示せ.

問題 2.6.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界領域とする．$p \geq 1$ に対して $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$ とおく．問題 1.7 を参考にして, Hölder の不等式

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$$

を f, g が連続関数のときに示せ.

問題 2.7.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界領域とする．$p \geq 1$ に対して問題 1.8 を参考にして, Minkowski の不等式

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}$$

を f, g が連続関数のときに示せ.

問題 2.8.

$1 < p < \infty$ とする.

(1) $L^p(0,1) \subset L^1(0,1)$ を示せ．ただし, Hölder の不等式は証明抜きに使ってよい.

(2) 次をみたす $\alpha > 0$ の条件を求めよ:

$$\int_0^\infty (1+x)^{-\alpha}\, dx < \infty.$$

(3) (2) を用いて, $f \in L^p(0,\infty)$ だが, $f \notin L^1(0,\infty)$ となる f を一つもとめよ．すなわち, $L^p(0,\infty) \not\subset L^1(0,\infty)$ であることを示せ.

問題 2.9 (これは測度論と積分論．調べていれば必ずできるはず)**.**

Ω を集合とする．次の定義を述べよ (自分で調べること．なお, 他人の調べた結果を写したと思われる解答, インターネットの情報を自分で理解できずに写したと思われる解答はオリジナルかどうかを問わず**採点しない**, なお, 定義の出典元を明記すること).

(1) Σ が Ω 上の完全加法族 (σ-加法族) であること.

(2) Σ を Ω 上の完全加法族とするとき, μ が Σ 上で定義された測度であること.

(3) μ が Ω 上の外測度であること.

(4) μ を Ω 上の外測度とするとき, $A \subset \Omega$ が外測度 μ に関して可測であること.

(5) (Ω, Σ, μ) を測度空間とするとき, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ が可測関数であること.

注意 (Lebesgue 積分)**.**

(Ω, Σ, μ) を測度空間, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ を可測関数とする．$f(x) \geq 0$ のとき, f の Ω 上の測度 μ における積分を

$$\int_\Omega f(x)\, d\mu(x) := \int_0^\infty \mu(\{x \in \Omega : f(x) > \lambda\})\, d\lambda$$

で定義できる．ただし, 右辺の被積分関数は単調減少関数なので, Riemann 積分として定義できる (ただし, ∞ になりうる)．この定義は, 単関数によって可測関数を近似できることを用いた定義と一致していることが知られている.

現代解析学II 演習問題 その3 　(2013年11月26日)

問題 3.1.

H を Hilbert 空間とし, $\|x\|_H$ を $x \in H$ のノルムとする.

(1) $x, y \in H$ に対して, 中線定理

$$\|x\|_H^2 + \|y\|_H^2 = \frac{\|x+y\|_H^2}{2} + \frac{\|x-y\|_H^2}{2} \tag{3.1}$$

を示せ.

(2) $x, y \in H$ に対して

$$(x, y)_H = \frac{1}{4}(\|x+y\|_H^2 - \|x-y\|_H^2) \tag{3.2}$$

が成り立つことを示せ.

(3) H を Hilbert 空間とし, $x, y \in H$ とする. このとき, Pythagoras の定理

$$x \perp y \Longleftrightarrow \|x+y\|_H^2 = \|x\|_H^2 + \|y\|_H^2$$

を示せ.

注意.

中線定理 (3.1) が成り立つとき, (3.2) の右辺は内積の公理をみたすことが知られている. ただし, 証明は易しくない.

問題 3.2.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は領域とする. 次の問いに答えよ.

(1) $x = \{a_n\}_{n=1}^\infty$, $y = \{b_n\}_{n=1}^\infty \in l^2$ に対して

$$(x, y)_{l^2} := \sum_{n=1}^\infty a_n b_n$$

と定めたとき, $(\cdot, \cdot)_{l^2}$ が l^2 上の内積となることを示せ.

(2) $f, g \in L^2(\Omega)$ に対して

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega f(x) g(x)\, dx$$

と定めたとき, $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$ が $L^2(\Omega)$ 上の内積となることを示せ.

問題 3.3.

H を Hilbert 空間とし, $\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty \subset H$ が

$$x_n \to x, \quad y_n \to y \quad \text{in } H \quad (n \to \infty)$$

をみたすとき,

$$(x_n, y_n)_H \to (x, y)_H \quad (n \to \infty)$$

を示せ.

問題 3.4.

H を Hilbert 空間とし, $X \subset H$ とする. このとき, $X^\perp$ は閉部分空間となることを示せ.

問題 3.5.

H を Hilbert 空間とし, $X \subset H$ を閉部分空間とする. このとき,

$$\forall z \in H,\ \exists x \in X,\ \exists y \in X^{\perp} \quad \text{s.t. } z = x + y$$

とできるならば, x, y が一意的であることを示せ.

問題 3.6 (難)**.**

H を Hilbert 空間とし, $X \subset H$ を閉凸集合とし,

$$\operatorname{dist}(z, X) := \inf_{x \in X} \|z - x\|_H \quad (z \in H)$$

とおく. このとき, 任意の $z \in H$ に対して, $x \in X$ が存在して, $\operatorname{dist}(z, X) = \|x - z\|_H$ となることを示せ (ヒント: 定理 2.3 の存在証明を真似する. 凸性はどこで使うか？).

問題 3.7 (例 2.3)**.**

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界領域とし,

$$X := \left\{ u \in L^2(\Omega) : \int_\Omega u(x)\, dx = 0 \right\}$$

とおく.

(1) X が $L^2(\Omega)$ の閉部分空間となることを示せ.

(2) X への射影 P_X を $u \in L^2(\Omega)$ に対して

$$(P_X u)(x) = u(x) - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(y)\, dy \quad (x \in \Omega)$$

で定める. $P_X u \in X$ を確かめよ.

(3) $X^{\perp}$ への射影 $P_{X^{\perp}} =: P_X^{\perp}$ が何かを求め, X の元と直交していることを確かめよ.

問題 3.8 (例 2.4)**.**

$L^2(0, \pi)$ において, $\left\{ \left(\dfrac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \sin(nx) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ が正規直交系であることを示せ.

問題 3.9.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ を正規直交系とするとき以下は同値となることを示せ.

(1) $H = \overline{\left\{ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k : \alpha_k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}}^{H}$.

(2) $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (x, x_k)_H x_k \quad (\forall x \in H)$

(3) (Perseval の等式) $\|x\|_H^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |(x, x_k)_H|^2 \quad (\forall x \in H)$

(4) $\forall x \in H, \forall n \in \mathbb{N}$ に対して, $(x, x_n)_H = 0$ ならば, $x = 0$.

問題 3.10 (例 2.5)**.**

l^2 において

$$e_j = \{\delta_{ij}\}_{i=1}^{\infty} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$$

とおく. $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ が l^2 における完全正規直交系となることを示せ.

現代解析学 II 演習問題 その 4　(2013 年 12 月 17 日)

以下, 断わりのない限り, X, Y は Banach 空間とする.

問題 4.1.

$X = C([0,1])$ とする.

(1) $T : X \to Y$ を

$$\begin{cases} D(T) := X = C([0,1]) \\ Tf(x) := \displaystyle\int_0^x f(y)\,dy \quad (f \in D(T),\ x \in [0,1]) \end{cases}$$

と定めたとき, T が線形作用素となることを示せ.

(2) $T : X \to Y$ を

$$\begin{cases} D(T) := C^1([0,1]) \\ Tf(x) := f'(y) \quad (f \in D(T),\ x \in [0,1]) \end{cases}$$

と定めたとき, T が線形作用素となることを示せ.

問題 4.2.

問題 4.1 の記号をそのまま使う.

(1) 問題 4.1 の (1) が有界作用素であることを示せ (ヒント: 積分の三角不等式を使う).

(2) 問題 4.1 の (2) が有界作用素でないことを示せ. (ヒント: $k \in \mathbb{N}$ に対して, $f_k(x)$ を

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 - k^2x^2 & 0 \le x \le \frac{1}{k} \\ 0 & \frac{1}{k} \le x \le 1 \end{cases}$$

としてみよ)

問題 4.3.

$T \in \mathscr{L}(X, Y)$ とする.

(1) $\forall x \in X$ に対して, $\|Tx\|_Y \le \|T\|_{\mathscr{L}(X,Y)} \|x\|_X$ を示せ.

(2) $\|T\|_{\mathscr{L}(X,Y)} = \sup\limits_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X = 1}} \|Tx\|_Y$ を示せ.

問題 4.4.

問題 4.1 の (2) の作用素 T が閉作用素であることを示せ.

問題 4.5.

$g \in L^2(0,1)$ に対して, $T : L^2(0,1) \to \mathbb{R}$ を

$$\begin{cases} D(T) := L^2(0,1) \\ Tf := \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = (f,g)_{L^2(0,1)} \quad (f \in L^2(0,1)) \end{cases}$$

で定める. このとき, $T \in (L^2(0,1))^* = \mathscr{L}(L^2(0,1), \mathbb{R})$ となることを示せ.

問題 4.6.

次の問いに答えよ.

(1) $T, S \in \mathscr{L}(X,Y)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, $T+S, \alpha T \in \mathscr{L}(X,Y)$ を示せ.
(2) $T, S \in \mathscr{L}(X,Y)$ に対して, $\|T+S\|_{\mathscr{L}(X,Y)} \leq \|T\|_{\mathscr{L}(X,Y)} + \|S\|_{\mathscr{L}(X,Y)}$ を示せ.
(3) $T \in \mathscr{L}(X)$, $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\|T^n\|_{\mathscr{L}(X)} \leq \|T\|^n_{\mathscr{L}(X)}$ を示せ.

問題 4.7.

$\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{L}(X,Y)$, $T \in \mathscr{L}(X,Y)$, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $x \in X$ とする.

$$T_n \to T \quad \text{in } \mathscr{L}(X,Y), \quad x_n \to x \quad \text{in } X \quad (n \to \infty)$$

ならば$T_n x_n \to Tx$ in X $(n \to \infty)$ を示せ.

問題 4.8.

$\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^{\infty}$ とし, $\sup_{k \in \mathbb{N}} |\alpha_k| = \gamma$ とする.

$$\begin{cases} D(T) := l^{\infty} \\ \quad Tx := (\alpha_1 \xi_1, \alpha_2 \xi_2, \ldots) \quad (x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^{\infty}) \end{cases}$$

と定めるとき, $T \in \mathscr{L}(l^{\infty})$ で $\|T\|_{\mathscr{L}(l^{\infty})} = \gamma$ となることを示せ.

問題 4.9.

$T_0 : D(T_0) \subset X \to Y$ を有界線形作用素とし, $D(T_0) \subset X$ は X で稠密とする. このとき, $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ が存在して,

$$T|_{D(T_0)} = T_0, \quad \|T\|_{\mathscr{L}(X,Y)} = \sup_{\substack{x \in D(T_0) \\ x \neq 0}} \frac{\|T_0 x\|_Y}{\|x\|_X} \tag{4.3}$$

とできることを示せ. (4.3) の右辺の上限をとる集合が X ではなくて, $D(T_0)$ となっていることに注意せよ.

問題 4.10 (Hausdroff-Young の不等式)**.**

簡単のため, $1 < p < \infty$ とする ($p = 1, \infty$ のときも下記の話は成立する). $\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$\|\rho * f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

を $f, \rho \in C_0(\mathbb{R}^n)$ のときに示せ. ただし,

$$C_0(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \text{ 連続, ある } R > 0 \text{ が存在して } f(x) = 0 \ (x \in \mathbb{R}^n \text{かつ } |x| \geq R)\}$$

である. 余裕があれば, $p, q, r \geq 1$ に対して, $1 + \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$ であれば,

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \tag{4.4}$$

を $f, g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ のときに示せ. (4.4) の不等式を Hausdorff-Young の不等式という.

問題 4.11.

$T \in \mathscr{L}(X)$ とする. もし, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \|T^n\|_{\mathscr{L}(X)} < \infty$ ならば, 逆作用素 $(I - T)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$ が存在することを示せ.

現代解析学 II レポート課題

次の事柄について, (この講義で述べたことについて知っていると仮定して) **自分の言葉**で説明せよ. なお, 参考にした専門書について, 著者, タイトル, 出版社を明記すること. また, **一字一句同じとみなせるレポートは採点しない.**

提出には **A4 用紙を片面**で使い (レポート用紙でもコピー用紙でもよい. 広告の裏紙などはダメ), **左上のみをホチキス止め**すること (上部中央や右上にホチキス止めをしないこと). 筆記用具は問わないが, 丁寧に書くこと. 解読のできないレポートは採点できない. **これらの注意を守っていないレポートは採点しない.** なお, 表紙はつけてもつけなくてもよい.

選択 (次から一つ以上)

1. **一様有界性原理**と**開写像定理**, **Hahn-Banach の定理**について, 調べたことを説明せよ.
2. **共役空間**と**弱収束**, **Banach-Steinhaus の定理**との関係について調べたことを説明せよ.
3. **レゾルベントとスペクトル**, **固有値**と**レゾルベント方程式**について, 調べたことを説明せよ. レゾルベント方程式については, 証明もつけること.
4. **コンパクト作用素**と **Riesz-Schauder の交代定理 (択一定理)** について, 調べたことを説明せよ. また, 「コンパクト作用素は有界作用素となる」ことについて証明を与えよ.

採点の基準として, 「定義や定理をきちんと調べて, 自分の言葉で記述できているか？」, 「キーワードに関して, 周辺の知識をどのくらい調べたか？」の二点を重視します. 最低でも, 上記で太文字で書いたキーワードについてはきちんと調べてください.

証明については, 解析系の大学院に進学するためにある程度理解しておくことが望ましいですが, 成績をつける上では (今回は) あまり重視しません. 重視することは「どれだけ調べた成果があるか？」です.