## §0 イントロダクション：固有値問題

$$
(E)_\lambda \begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2}(x) = \lambda u(x), & 0 < x < \pi \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}
$$

$u : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ 未知

〈物理的意味〉

バネやひもの振動，スペクトル，量子力学 …

〈数学的意味〉

熱方程式の解法（Fourier）

Schrödinger方程式の解析 …

いろいろな解析の基礎になっている．

〈自明解〉

$$u(x) = 0, \quad 0 \le x \le \pi, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

問題：自明でない解（非自明解）はあるのか？

<u>例</u>

$u(x) = \sin x$, $u(0) = u(\pi) = 0$

$$\frac{du}{dx}(x) = \cos x$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}(x) = -\sin x = -u(x)$$

従って $u(x) = \sin x$ は $\lambda = 1$ のときの $(E)_\lambda$ の解．

〈関数解析的な考え方〉

$$Au := -\frac{d^2u}{dx^2}$$

$$X := \{ v : [0,\pi] \to \mathbb{R},\ C^2\text{級},\ v(0) = v(\pi) = 0 \}$$

とすると $(E)_\lambda$ は.

$$Au = \lambda u, \quad u \in X$$

となる。Aを行列とみなせば. 行列の固有値を求める問題に似ている

〈問題点〉

Xは有限次元ではない. Aは行列でない.

∴ det や rankを用いて非自明解の存在を示すことはできない.

講義内容

§1. §2　Xが何か？を知る.

無限次元の線形空間, 計量線形空間

§3　Aが何か？を知る.

有界線形作用素とその性質.

# §1 ノルム空間とBanach空間

## §1.1 線形空間

$X$ が $\mathbb{R}$ 上の線形空間

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $x, y \in X$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して 和 $x+y \in X$ と

スカラー倍 $\alpha x \in X$ が定義できて，次の8条件

をみたす．

1. $(x+y)+z = x+(y+z)$ $\quad (\forall x, y, z \in X)$
2. $x+y = y+x$ $\quad (\forall x, y \in X)$
3. $0 \in X$ が存在して $x+0 = 0+x = x$ $\quad (\forall x \in X)$
4. $\forall x \in X$ に対し $(-x) \in X$ が存在して

   $x+(-x) = 0$
5. $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ $\quad (\forall x, y \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R})$
6. $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$ $\quad (\forall x \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$
7. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ $\quad (\forall x \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$
8. $1x = x$ $\quad (\forall x \in X)$.

例 1.1

$$C([0,1]) := \{ f : [0,1] \to \mathbb{R}, \text{連続} \}$$

は，$f, g \in C([0,1])$，$\alpha \in \mathbb{R}$ に対し，$f+g$，$\alpha f$ を

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad (x \in [0,1])$$

$$(\alpha f)(x) := \alpha f(x) \quad (x \in [0,1])$$

と定めることにより，線形空間となる．

## 注意 1.1

線形空間の定義の $x$ と例 1.1 の $x$ の役割は異なる.

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ ではない!!

1 Oct. 2013

## 例 1.1 の証明

1. のみ示す. ${}^\forall f, g, h \in C([0,1])$ に対し,

$(f+g)+h = f+(g+h)$ を示す.

${}^\forall x \in [0,1]$ に対し

$$\big((f+g)+h\big)(x) \underset{(f+g)+h \text{ の定義}}{=} (f+g)(x) + h(x)$$

$$\underset{f+g \text{ の定義}}{=} \big(f(x)+g(x)\big) + h(x)$$

$$\underset{\mathbb{R} \text{ は線形}}{=} f(x) + \big(g(x)+h(x)\big)$$

$$= f(x) + (g+h)(x) = \big(f+(g+h)\big)(x).$$

となるから $(f+g)+h = f+(g+h)$ となる $\square$

## 注意 1.2

$f, g \in C([0,1])$ に対し

$$f = g \underset{\text{定義}}{\iff} f(x) = g(x) \quad ({}^\forall x \in [0,1])$$

より, 例えば $f+g=g+f$ を示すには ${}^\forall x \in [0,1]$ に対し

$$(f+g)(x) = (g+f)(x)$$

を示さないといけない. 他も同様.

## §1.2 ノルム空間

$x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し．$\|x\| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ とおくと．

1. $\|x\| \geq 0 \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$
2. $\|x\| = 0 \underset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} x = 0 \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n)$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \qquad (\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R})$.
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad (\forall x, y \in \mathbb{R}^n)$

が成り立つ．このことを一般化する．

**定義 1.1**（ノルム空間）

$X$: $\mathbb{R}$ 上の線形空間

$x \in X$ に対し．$\|x\|_X \in \mathbb{R}$ が定まり．次の4条件をみたすとき．$\|x\|_X$ を $x$ のノルム という．

(1) $\|x\|_X \geq 0 \qquad (\forall x \in X)$

(2) $\|x\|_X = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \qquad (x \in X)$

零元

実数の零

(3) $\|\alpha x\|_X = |\alpha| \, \|x\|_X \qquad (\forall x \in X, \forall \alpha \in \mathbb{R})$

(4)（三角不等式）$\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X \qquad (\forall x, y \in X)$

ノルムが定義されている線形空間を ノルム空間 という．

$X$をノルム空間とするとき

$$d(x,y) := \|x-y\|_X \qquad ({}^\forall x, y \in X)$$

と定めると、$d$は$X$上の距離となる. i.e.

- $d(x,y) \geq 0 \qquad ({}^\forall x, y \in X)$
- $d(x,y) = 0 \iff x = y \qquad (x, y \in X)$
- $d(x,y) = d(y,x) \qquad ({}^\forall x, y \in X)$
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \qquad ({}^\forall x, y, z \in X)$

が成り立つ. よって ノルム空間は距離空間 である.

**定義1.2** (点列の収束)

$X$: ノルム空間, $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$, $x \in X$.

$$x_n \to x \quad \text{in } X \quad (n \to \infty)$$

$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad \underset{d(x_n, x)}{\underset{\shortparallel}{\|x_n - x\|_X}} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

つまり、距離空間としての収束と同じ.

命題1.1

$X$：ノルム空間，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$，$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$，

(1) $x_n \to x$ in $X$ $(n \to \infty)$
　$y_n \to y$ in $X$ $(n \to \infty)$

$\Longrightarrow$ $x_n + y_n \to x + y$ in $X$ $(n \to \infty)$

(2) $x_n \to x$ in $X$ $(n \to \infty)$
　$\alpha_n \to \alpha$ $(n \to \infty)$

$\Longrightarrow$ $\alpha_n x_n \to \alpha x$ in $X$ $(n \to \infty)$

(3) $x_n \to x$ in $X$ $(n \to \infty)$

$\Longrightarrow$ $\|x_n\|_X \to \|x\|_X$ $(n \to \infty)$

証明

(1) $(x_n + y_n) - (x + y) = (x_n - x) + (y_n - y)$
と三角不等式 (各自)

(2) $\alpha_n x_n \to \alpha x$ in $X$ $(n \to \infty)$ を
示したいので
$$\|\alpha_n x_n - \alpha x\|_X \to 0 \quad (n \to \infty)$$
を示せばよい。実数列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束
するので有界：$^{\exists}M > 0$ s.t $|\alpha_n| \leq M$. $(^{\forall}n \in \mathbb{N})$

とできる。

よって

$$\|\alpha_n x_n - \alpha x\|_X = \|\alpha_n x_n - \alpha_n x + \alpha_n x - \alpha x\|_X$$

三角不等式

$$\leq \|\alpha_n (x_n - x)\|_X + \|(\alpha_n - \alpha) x\|_X$$

定義1.1

$$= |\alpha_n| \|x_n - x\|_X + |\alpha_n - \alpha| \|x\|_X$$

$$\leq M \|x_n - x\|_X + |\alpha_n - \alpha| \|x\|_X \to 0 \quad (n \to \infty)$$

従って $\|\alpha_n x_n - \alpha x\|_X \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$.

(3) 演習

<u>例 1.2</u>

$f \in C([0,1])$ に対し

$$\|f\|_{C([0,1])} := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

と定めると. $\|f\|_{C([0,1])}$ は $f$ のノルムとなる.

<u>証明</u> 三角不等式を示してみる.

$^\forall f, g \in C([0,1])$ と $^\forall x \in [0,1]$ に対し

定義

$$|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)|$$

$\mathbb{R}$の三角不等式

$$\leq |f(x)| + |g(x)|$$

supの定義

$$\leq \sup_{y \in [0,1]} |f(y)| + \sup_{y \in [0,1]} |g(y)|$$

$$= \|f\|_{C([0,1])} + \|g\|_{C([0,1])}$$

ここで右辺は$x$に依らない（$x$がでてこない）

ことに注意して $x\in[0,1]$ について sup をとれば

$$\|f+g\|_{C([0,1])}=\sup_{x\in[0,1]}|(f+g)(x)|\le\|f\|_{C([0,1])}+\|g\|_{C([0,1])}$$

となるから，三角不等式が成り立つ．

注意 1.3

例1.2 の証明を

$$\|f+g\|_{C([0,1])}=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)+g(x)|\le\sup_{x\in[0,1]}\left(|f(x)|+|g(x)|\right)$$

なぜ？

$$\le\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|+\sup_{x\in[0,1]}|g(x)|$$

なぜ？？

とするのはよくない。非自明な式変形の途中で間違いを犯すことが多い．

8 Oct. 2013

例 1.3 （数列空間）

$1\le p<\infty$ に対し

$$\ell^p:=\{a=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}:\|a\|_{\ell^p}<\infty\}$$

$$\|a\|_p^p:=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p\qquad(a=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\in\ell^p)$$

と定める．$\ell^p$は線形空間であり $\|a\|_{\ell^p}$ は $a\in\ell^p$ のノルムとなる．

例1.4 (Lebesgue空間)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域とする. $1 \leq p < \infty$ に対して

$$L^p(\Omega) := \{ f : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ Lebesgue可測}, \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty \},$$

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left( \int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (f \in L^p(\Omega))$$

と定める. このとき. $L^p(\Omega)$ は線形空間であり,

$\|f\|_{L^p(\Omega)}$ は $f \in L^p(\Omega)$ のノルムとなる. ただし

$$f = g \underset{\text{定義}}{\iff} f(x) = g(x) \text{ almost all } x \in \Omega.$$

である.

## §§1.3 Banach 空間

$\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ の違い $\rightsquigarrow$ Cauchy 列が収束するか?

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 1.4, & 1.41, & 1.414, & 1.4142, & \cdots & \to \sqrt{2} \\ \cap & \cap & \cap & \cap & \cap & & \not\in \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & & \mathbb{Q} \end{array}$$

◎ 解の存在 (とくに微分方程式) を示すには.

Cauchy 列が収束することが重要

## 定義 1.3 (Cauchy列)

$X$ : ノルム空間, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $X$ の Cauchy列

$\overset{}{\underset{定義}{\Longleftrightarrow}}$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$$n, m \geq N \Rightarrow \|x_n - x_m\|_X < \varepsilon$$

注 これをかんたんに $\lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\|_X = 0$ とかくこともある.

## 定義 1.4 (Banach空間)

ノルム空間 $X$ が Banach空間

$\underset{定義}{\Longleftrightarrow}$ $X$ 内の任意の Cauchy列は収束する.

これは Banach空間 $X$ を距離空間とみたときに完備であることと同じ. よって Banach空間においては縮小写像の原理など完備距離空間の性質が成り立つ.

例 1.5 (有限次元空間)

$d \in \mathbb{N}$, $x = (x^1, \cdots, x^d) \in \mathbb{R}^d$ に対し

$$\|x\|_{\mathbb{R}^d} := \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^d)^2}$$

とおく. このとき. $\mathbb{R}^d$ は Banach 空間となる.

証明

Cauchy 列が収束することのみ示す.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ 上の Cauchy 列とし.

$x_n = (x_n^1, x_n^2, \cdots, x_n^d)$ とかく. $j = 1, \cdots, d$ に対し

$$\begin{aligned} |x_n^j - x_m^j| &\le \sqrt{(x_n^1 - x_m^1)^2 + (x_n^2 - x_m^2)^2 + \cdots + (x_n^d - x_m^d)^2} \\ &= \|x_n - x_m\|_{\mathbb{R}^d} \qquad (\forall n, m \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

となるから $\{x_n^j\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{R}$ 上の Cauchy 列となるので

$\mathbb{R}$ 上で収束する. $x^j := \lim_{n \to \infty} x_n^j$, $x := (x^1, \cdots, x^d)$

とおくと. $\forall \varepsilon > 0$ に対し. $\exists N_j \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に

対し

$$n \ge N_j \Rightarrow |x_n^j - x^j| < \varepsilon$$

とできるから $N := \max_{1 \le j \le d} N_j$ とおく.

このとき、$n \geq N$ ならば

$$\|x_n - x\|_{\mathbb{R}^d} = \sqrt{(x_n^1 - x^1)^2 + (x_n^2 - x^2)^2 + \cdots + (x_n^d - x^d)^2}$$
$$\leq \sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^2}$$
$$= \sqrt{d}\,\varepsilon.$$

となるから $x_n \to x$ in $\mathbb{R}^d$ $(n \to \infty)$、すなわち $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束列であることがわかる。 □

__定理 1.1__

$X$ を有限次元線形空間とし、$\|x\|_X$ を $x \in X$ のノルムとする。このとき、$X$ は Banach空間である。

(注) つまり、有限次元の場合には(係数体が $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ のときは)つねに Banach空間とみなせる。

Banach空間か否か？は無限次元のときにはじめて問題となる。

## 定理1.1の証明の概略

1. $X$の基底を$\{e_1, e_2, \cdots, e_d\}$とおき.

$$x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \cdots + x^d e_d \in X$$

とかく.

$$\|x\|_1 := |x^1| + \cdots + |x^d|$$

と定めたとき. $\|x\|_1$が$x \in X$のノルムになることを示す.

2. $^\exists C_1, C_2 > 0$ s.t.

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_X \leq C_2 \|x\|_1 \quad (^\forall x \in X)$$

を示す. (ノルムに関して<u>同値</u>という)

3. $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$を$\|\cdot\|_X$に関するCauchy列としたとき, $\|\cdot\|_1$に関するCauchy列となることを示す.

4. $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$を$\|\cdot\|_1$に関するCauchy列としたとき$\|\cdot\|_1$のノルムで収束することを示す.

5. $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$が$\|\cdot\|_1$での収束列とするとき. $\|\cdot\|_X$についても収束することを示す.

2. の $C_1>0$ のみつけ方

背理法を用いる. 主張を否定すると

$\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists x_n\in X$ s.t $\frac{1}{n}\|x_n\|_1>\|x_n\|_X$.

とできる. $y_n:=\frac{x_n}{\|x_n\|_1}$ とおくと $\|y_n\|_1=1$, $\|y_n\|_X<\frac{1}{n}$

がわかる.

① $y_n=y_n^1e_1+\cdots+y_n^de_n$

とかいたとき. $\exists\{y_{n_k}\}_{k=1}^\infty\subset\{y_n\}_{n=1}^\infty$ s.t.

$\forall j=1,\cdots,d$ $\quad y_{n_k}^j\longrightarrow y^j\quad(k\to\infty)$

を示す. $y=(y^1,\cdots,y^d)$ とおく.

② $\forall n\in\mathbb{N}$ に対し

$$\begin{aligned}\|y\|_X&\leq\|y-y_n\|_X+\|y_n\|_X\\&\leq C_2\|y-y_n\|_1+\|y_n\|_X\end{aligned}$$

に注意して $y=0$ を示す.

③ 他方 $\|y_n\|_1=1$ に注意して.

$y\neq0$ となることを示す. これにより

矛盾が得られる.

□

**命題 1.2**

$X$：ノルム空間，$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$；$X$上の Cauchy列．

$\Rightarrow$ $\{\|x_n\|_X\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{R}$上の Cauchy列．とくに．

$\{\|x_n\|_X\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{R}$ 上の収束列であり．有界となる．

**証明**

$$\|x_n\|_X = \|x_n - x_m + x_m\|_X \leq \|x_n - x_m\|_X + \|x_m\|_X$$

より

$$\|x_n\|_X - \|x_m\|_X \leq \|x_n - x_m\|_X ,$$

同様に

$$\|x_m\|_X - \|x_n\|_X \leq \|x_m - x_n\|_X = \|x_n - x_m\|_X$$

となるから

$$\left| \|x_n\|_X - \|x_m\|_X \right| \leq \|x_n - x_m\|_X$$

となる．よって $\{\|x_n\|_X\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{R}$上の Cauchy列

となる $\square$

**例 1.6**

$C([0,1])$ は Banach空間となる．

証明

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C([0,1])$ を $C([0,1])$ 上の Cauchy 列とする. i.e.

$${}^\forall \varepsilon > 0, \ {}^\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } {}^\forall n, m \in \mathbb{N},$$

$$n, m \geq N \Rightarrow \|f_n - f_m\|_{C([0,1])} < \varepsilon$$

とする.

1. ${}^\forall x \in [0,1]$ に対し極限関数 $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が定義できることを示す. $n, m \geq N$ ならば

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{y \in [0,1]} |f_n(y) - f_m(y)| \quad —(*)$$

$$= \|f_n - f_m\|_{C([0,1])} < \varepsilon$$

より $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ 上の Cauchy 列となる. $\mathbb{R}$ は完備より収束するので $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ と定義する.

2. $\sup_{x \in [0,1]} |f(x)| < \infty$ を示す.

命題 1.2 より

$${}^\exists M > 0 \text{ s.t. } \|f_n\|_{C([0,1])} \leq M \quad ({}^\forall n \in \mathbb{N})$$

より

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_{C([0,1])} \leq M \quad ({}^\forall n \in \mathbb{N}, {}^\forall x \in [0,1])$$

だから $n \to \infty$ とすると

$$|f(x)| \leq M \quad ({}^\forall x \in [0,1])$$

となる.

両辺 $x\in[0,1]$ で sup をとると

$$\sup_{x\in[0,1]}|f(x)| \le M < \infty$$

がわかる.

3. $\displaystyle\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|\to 0 \quad (n\to\infty)$ を示す.

(*) より $n, m \geq N$ ならば

$$|f_n(x)-f_m(x)| < \varepsilon \qquad ({}^\forall x\in[0,1])$$

だから. $m\to\infty$ とすると

$$|f_n(x)-f(x)| \le \varepsilon \qquad ({}^\forall x\in[0,1])$$

となる. $x\in[0,1]$ について sup をとると. $n\geq N$ ならば

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)| \le \varepsilon$$

がえられる. よって $\displaystyle\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|\to 0 \ (n\to\infty)$ が示された.

4. $f\in C([0,1])$. i.e. $f$ が ${}^\forall x\in[0,1]$ で連続であることを示す.

3. より ${}^\forall\varepsilon>0$. ${}^\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $\displaystyle\sup_{x\in[0,1]}|f_N(x)-f(x)|<\varepsilon$

とできる. 次に ${}^\exists\delta>0$ s.t. ${}^\forall y\in[0,1]$.

$$|x-y|<\delta \Rightarrow |f_N(x)-f_N(y)|<\varepsilon$$

とできる ($\because$ $f_N$ は連続). 従って ${}^\forall y\in[0,1]$ に対し

$|x-y|<\delta$ ならば

$$
\begin{aligned}
|f(x)-f(y)| &\le |f(x)-f_N(x)+f_N(x)-f_N(y)+f_N(y)-f(y)| \\
&\le |f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(y)|+|f_N(y)-f(y)| \\
&\le 2\sup_{x\in[0,1]}|f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(y)| \\
&\le 2\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon
\end{aligned}
$$

となり，$f$ が $x\in[0,1]$ で連続であることがわかった．

3., 4. より $\displaystyle\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\|f_n-f\|_{C([0,1])}\to 0 \ (n\to\infty)$

となるから $f_n\to f$ in $C([0,1])$ $(n\to\infty)$ が示せた $\square$

例 1.7

$1\le p<\infty$ に対し数列空間 $\ell^p$ は Banach 空間である．

証明

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\ell^p$ を $\ell^p$ 上の Cauchy 列とする．i.e.

$^\forall\varepsilon>0$, $^\exists N\in\mathbb{N}$ s.t. $^\forall n,m\in\mathbb{N}$

$n,m\ge N \Rightarrow \|x_n-x_m\|_{\ell^p}<\varepsilon$

と仮定する．

1. $x_n = \{x_n^k\}_{k=1}^{\infty}$ とおいて極限が存在することを示す.

$k \in \mathbb{N}$ を固定すると. $n, m \geq N$ ならば

$$|x_n^k - x_m^k| \leq \left(\sum_{l=1}^{k} |x_n^l - x_m^l|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \|x_n - x_m\|_{\ell^p} < \varepsilon.$$

となるから $\{x_n^k\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{R}$ 上の Cauchy 列となる.

$\mathbb{R}$ は完備より収束するので $x^k := \lim_{n\to\infty} x_n^k$, $x = \{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ とおく.

2. $\|x\|_{\ell^p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x^k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ を示す.

命題1.2より $\exists M > 0$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_n^k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x_n\|_{\ell^p} \leq M$$

とできる. このとき. $\forall K \in \mathbb{N}$ に対し.

$$\sum_{k=1}^{K} |x_n^k|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_n^k|^p \leq M^p$$

となるから $n \to \infty$ とすれば

$$\sum_{k=1}^{K} |x^k|^p \leq M^p$$

となる. 次に $K \to \infty$ とすれば

$$\|x\|_{\ell^p}^p = \sum_{k=1}^{\infty} |x^k|^p \leq M^p < \infty$$

がわかる.

3. $\|x_n - x\|_{\ell^p} \to 0 \quad (n\to\infty)$ を示す.

$^\forall K \in \mathbb{N}$ に対し, $n, m \geq N$ ならば

$$\sum_{k=1}^{K} |x_n^k - x_m^k|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_n^k - x_m^k|^p$$

$$= \|x_n - x_m\|_{\ell^p}^p < \varepsilon^p$$

となるから $m\to\infty$ とすると

$$\sum_{k=1}^{K} |x_n^k - x^k|^p \leq \varepsilon^p$$

となる. 次に $K\to\infty$ とすると

$$\|x_n - x\|_{\ell^p}^p = \sum_{k=1}^{\infty} |x_n^k - x^k|^p \leq \varepsilon^p$$

となるから $\|x_n - x\|_{\ell^p}^p \to 0 \quad (n\to\infty)$. i.e.

$$x_n \to x \quad \text{in } \ell^p \quad (n\to\infty)$$

がわかる. $\square$

例 1.8

$$X := \{f : [-1,1] \to \mathbb{R},\ 連続,\ \|f\|_{L^p(-1,1)} < \infty\}$$

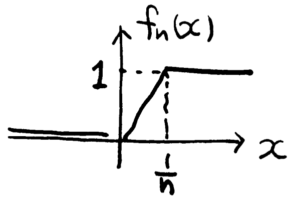
$$\|f\|_X = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (f\in X)$$

とおくと $X$ は Banach空間ではない.

〈反例〉 $n\in\mathbb{N}$ に対し

$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & -1\le x\le 0 \\ nx & 0<x<\frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} \le x\le 1\end{cases}$$

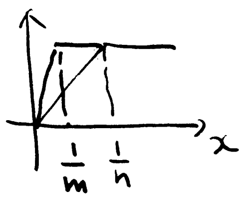
とおくと. $f_n\in X$ となる




$m,n\in\mathbb{N}$, $m\ge n$ に対し

$$\|f_m-f_n\|_X^p = \int_{-1}^{1} |f_m(x)-f_n(x)|^p\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{m}} \underbrace{|mx-nx|^p}_{=(m-n)^p x^p} dx + \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \underbrace{|1-nx|^p}_{\le 1^p} dx$$




$$\le (m-n)^p \frac{1}{p+1}\left(\frac{1}{m}\right)^{p+1} + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)$$

$$= \frac{1}{p+1}\frac{1}{m}\left(1-\frac{n}{m}\right)^p + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)\to 0 \quad (n,m\to\infty)$$

より) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列となる. しかし

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & -1\le x\le 0 \\ 1 & 0<x\le 1\end{cases}$$

($x>0$ のとき. 十分大きなすべての $n\in\mathbb{N}$ に対し $x>\frac{1}{n}$).

より). $f$ は $x=0$ で連続ではないので $f\notin X$.

例 1.9 (Lebesgue空間)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$：領域．　$1 \leq p < \infty$．

$$L^p(\Omega) := \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \text{, Lebesgue可測}, \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty \}$$

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left( \int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

とおくと．$L^p(\Omega)$ はBanach空間となる．

注意 1.4

Lebesgue積分が必要なのは．例1.8の問題をRiemann積分では回避できないからである．

$X$を連続 → Riemann積分にかえてもうまく回避できない（どうしてうまくいかないか考えてみよ）．

理論的には．完備性（と強力な収束定理）を持つLebesgue積分を用いることが多いが．具体的な関数の積分計算には．Riemann積分（と微積分の基本定理．Gaussの発散定理）を用いることが多い．