現代解析学II 講義ノート –Hilbert 空間論序論–

1. イントロダクション

次の熱方程式の初期値境界値問題を考える:

$$
\text{(H)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) & t > 0,\ 0 < x < \pi, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x) & 0 < x < \pi. \end{cases}
$$

Fourier は次のようにして (H) を解いた.

1. $u_0(x)$ が $\sin$ の級数で書けるとする:

$$
u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(nx). \tag{1.1}
$$

(1.1) と本当に書ける？c_n はどうやって決める？はとりあえずあとまわし

2. $u(t,x)$ が $\sin$ の級数で書けるとする:

$$
u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(t) \sin(nx). \tag{1.2}
$$

(H) に代入すると

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \lambda_n}{\partial t}(t) \sin(nx). = -\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \lambda_n(t) \sin(nx). \tag{1.3}
$$

(1.2) と本当に書ける？はとりあえずあとまわし

3. (1.1) と (1.3) で係数をそれぞれ比較すると

$$
\begin{cases} \dfrac{\partial \lambda_n}{\partial t}(t) = -n^2 \lambda_n(t), \\ \lambda_n(0) = c_n \end{cases} \tag{1.4}
$$

となる. (1.4) をとくと $\lambda_n(t) = c_n e^{-n^2 t}$ が得られる. 従って

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 t} \sin(nx).$$

が (H) の解となるはず.

この議論の正当化には, (1.1) や (1.2) と書けることを示さないといけない. (1.1) は $\{\sin(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ の線形結合で書けていると考えることができる. よって, $\{\sin(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ が何かの線形空間の基底であればよいのだが, 線形結合が有限和ではない. つまり, **考える線形空間が無限次元**になっている.

(1.1) が本当に書けるかどうかはあとで考えることにして, 無限次元の線形空間論を内積がある場合に限って説明する. そのために, 計量線形空間と距離空間について必要となる知識をまとめておく.

1.1. **計量線形空間.** X を $\mathbb{R}$ 上の線形空間とする. つまり, X には和 $x+y$ $(x, y \in X)$ とスカラー倍 αx $(x \in X,\ \alpha \in \mathbb{R})$ が定められているとする.

定義 1.1 (内積)**.**
線形空間 X, $x, y \in X$ に対して, $(x,y)_X \in \mathbb{R}$ が 定まっているとする. $(x,y)_X \in \mathbb{R}$ が x と y の内積であるとは, 次の 4 条件を満たすことをいう.

(i) $(x,x)_X \geq 0 \quad (\forall x \in X)$
(ii) $(x,x)_X = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad (x \in X)$
(iii) $(x,y)_X = (y,x)_X \quad (\forall x, y \in X)$
(iv) $(x_1 + x_2, y)_X = (x_1, y)_X + (x_2, y)_X \quad (\forall x_1, x_2, x, y \in X)$,
$(\alpha x, y)_X = \alpha (x,y)_X \quad (\forall x, y \in X,\ \alpha \in \mathbb{R})$.

$x \in X$ に対して, $\|x\|_X := \sqrt{(x,x)_X}$ とおく. $\|x\|$ を $x \in X$ のノルムという.

定理 1.1 (Schwarz の不等式)**.**
線形空間 X に内積 $(\cdot,\cdot)_X$ が定義されているとき

$$|(x,y)_X| \leq \|x\|_X \|y\|_X \quad (\forall x, y \in X)$$

が成り立つ.

証明.
$x.y \in X$ と $t \in \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x+ty, x+ty)_X \\ &= (x,x)_X + (x,ty)_X + (ty,x)_X + (ty,ty)_X \\ &= \|x\|_X^2 + 2t(x,y)_X + t^2 \|y\|_X^2 \end{aligned}$$

より, 二次方程式の判別式から

$$(x, y)_X^2 - \|x\|_X^2 \|y\|_X^2 \leq 0$$

となる. すなわち

$$(x, y)_X^2 \leq \|x\|_X^2 \|y\|_X^2$$

となる. 両辺平方根をとればよい. □

定理 1.2 (三角不等式)**.**
線形空間 X に内積 $(\cdot, \cdot)_X$ が定義されているとき

$$\|x\|_X := \sqrt{(x, x)_X} \quad (x \in X)$$

とおくと, $x, y \in X$ に対して三角不等式

$$\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X$$

が成り立つ.

証明.
$x, y \in X$ に対して,

$$\begin{aligned}\|x + y\|_X^2 &= (x + y, x + y)_X \\ &= (x, x)_X + 2(x, y)_X + (y, y)_X \\ &\leq \|x\|_X^2 + 2\|x\|_X \|y\|_X + \|y\|_X^2 \quad (\because \text{Schwarz の不等式}) \\ &= (\|x\|_X + \|y\|_X)^2\end{aligned}$$

となるから, 両辺平方根を取ればよい. □

例 1.1 (数列空間 l^2)**.**
集合 l^2 を

$$l^2 := \left\{ x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) : \xi_k \in \mathbb{R}\ (k \in \mathbb{N}), \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 < \infty \right\}$$

で定める. $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$, $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots) = (\eta_k)_{k=1}^{\infty} \in l^2$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して和 $x + y$ とスカラー倍 αx, 内積 $(x, y)_{l^2}$ をそれぞれ

$$\begin{aligned}x + y &:= (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \ldots) = (\xi_k + \eta_k)_{k=1}^{\infty}, \\ \alpha x &:= (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \ldots) = (\alpha\xi_k)_{k=1}^{\infty}, \\ (x, y)_{l^2} &:= \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k\end{aligned}$$

で定めると, l^2 は内積 $(x, y)_{l^2}$ をもつ線形空間になる. なお, 零ベクトルは $(0, 0, \ldots) \in l^2$ となる.

証明.

任意の $x=(\xi_1,\xi_2,\dots)=(\xi_k)_{k=1}^{\infty}$, $y=(\eta_1,\eta_2,\dots)=(\eta_k)_{k=1}^{\infty}\in l^2$ に対して, 内積 $(x,y)_{l^2}$ が定義できることのみ示す.

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k\eta_k|\le\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(|\xi_k|^2+|\eta_k|^2)<\infty$$

となるから, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\eta_k$ は絶対収束する. したがって, $(x,y)_{l^2}=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\eta_k$ は定義できて有限である. □

例 1.2 (Lebesgue 空間 $L^2(0,\pi)$)**.**

集合 $L^2(0,\pi)$ を

$$L^2(0,\pi):=\left\{f:(0,\pi)\to\mathbb{R},\text{Lebesgue 可測},\int_0^{\pi}|f(x)|^2\,dx<\infty\right\}$$

で定める. $f,g\in L^2(0,\pi)$, $\alpha\in\mathbb{R}$ に対し, 和 $f+g$, スカラー倍 αf, 内積 $(f,g)_{L^2(0,\pi)}$ をそれぞれ

$$\begin{aligned}(f+g)(x)&:=f(x)+g(x) &&0<x<\pi,\\ (\alpha f)(x)&:=\alpha f(x) &&0<x<\pi,\\ (f,g)_{L^2(0,\pi)}&:=\int_0^{\pi}f(x)g(x)\,dx\end{aligned}$$

で定めると, $L^2(0,\pi)$ は内積 $(f,g)_{L^2(0,\pi)}$ をもつ線形空間になる. なお, 零ベクトル f_0 はほとんどすべての $0<x<\pi$ に対して $f_0(x)=0$ である.

証明.

$(f,f)_{L^2(0,\pi)}=0$ ならば, $f=f_0$ のみ示す. すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}0=(f,f)_{L^2(0,\pi)}&=\int_0^{\pi}|f(x)|^2\,dx\\ &\ge\int_{(0,\pi)\cap\{|f(x)|>\frac{1}{n}\}}|f(x)|^2\,dx\ge\frac{1}{n^2}m(\{|f(x)|>\frac{1}{n}\})\end{aligned}$$

だから, $m(\{|f(x)|>\frac{1}{n}\})=0$ となる. ここで, m は(一次元)Lebesgue 測度である. よって, 測度の単調性から

$$m(\{|f(x)|\ne 0\})=m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{|f(x)|>\frac{1}{n}\right\}\right)=\lim_{n\to\infty}m\left(\left\{|f(x)|>\frac{1}{n}\right\}\right)=0$$

となるので, $f=f_0$ となる. □

1.2. **距離空間.**

定義 1.2 (距離空間)**.**
集合 X, $x, y \in X$ に対して, $d(x,y) \in \mathbb{R}$ が定まっているとする. $d(x,y)$ が x, y の距離であるとは, 次の 4 条件が成り立つことをいう.

(1) $d(x,y) \geq 0 \quad (\forall x, y \in X)$,
(2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad (\forall x, y \in X)$,
(3) $d(x,y) = d(y,x) \quad (\forall x, y \in X)$,
(4) (三角不等式) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad (\forall x, y, z \in X)$.

このとき, (X, d) を距離空間という.

命題 1.1.
線形空間 X に内積 $(\cdot,\cdot)_X$ が定義されているとき,

$$d(x,y) := \|x - y\|_X \quad (x, y \in X) \tag{1.5}$$

とおくと, $d(x,y)$ は x, y の距離となる.

以下, 内積のある線形空間については (1.5) で距離を定めることにする.

例 1.3.
$f, g \in L^2(0,\pi)$ に対して $L^2(0,\pi)$ における f, g の距離は

$$\|f - g\|_{L^2(0,\pi)} = \sqrt{(f-g, f-g)_{L^2(0,\pi)}} = \sqrt{\int_0^\pi |f(x) - g(x)|^2 \, dx}$$

となる.

定義 1.3.
距離空間 (X, d) に対して, 点列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ が $x \in X$ に収束するとは

$$d(x_n, x) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となることをいう. このとき, $x_n \to x$ in X $(n \to \infty)$ とかく.

線形空間 X に内積 $(\cdot,\cdot)_X$ が定義されているとき, 点列 $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ が $x \in X$ に収束するとは (1.5) により

$$\|x_n - x\|_X \to 0$$

となることである. このときも $x_n \to x$ in X $(n \to \infty)$ とかく.

例 1.4.

関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in L^2(0,\pi)$ が $f \in L^2(0,\pi)$ に ($L^2(0,\pi)$ の意味で) 収束するとは

$$\|f_n - f\|_{L^2(0,\pi)} = \sqrt{\int_0^{\pi} |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx} \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{1.6}$$

をみたすことをいう．このとき, $f_n \to f$ in $L^2(0,\pi)$ $(n \to \infty)$ とかく．なお, (1.6) は次の条件と同値である.

$$\|f_n - f\|_{L^2(0,\pi)}^2 = \int_0^{\pi} |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx \to 0 \quad (n \to \infty).$$

定義 1.4 (Cauchy 列)**.**

距離空間 (X,d) に対して, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ が X **上の Cauchy 列**であるとは, $\forall\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $\forall n.m \in \mathbb{N}$ に対して

$$n, m \geq N \Longrightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

となるときをいう.

線形空間 X に内積 $(\cdot,\cdot)_X$ が定義されているとき, 点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ が Cauchy 列であるとは, $\forall\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $\forall n.m \in \mathbb{N}$ に対して

$$n, m \geq N \Longrightarrow \|x_n - x_m\|_X < \varepsilon$$

となるときである.

例 1.5.

関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in L^2(0,\pi)$ が ($L^2(0,\pi)$ の意味で)Cauchy 列であるとは $\forall\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $\forall n.m \in \mathbb{N}$ に対して

$$n, m \geq N \Longrightarrow \|f_n - f_m\|_{L^2(0,\pi)} < \varepsilon$$

となるときである.

距離空間 (X,d) が完備距離空間であるとは, 任意の X 上の Cauchy 列が収束することをいうのであった．これを内積をもった線形空間で考えたものが Hilbert 空間とよぶものである．すなわち

定義 1.5 (Hilbert 空間)**.**

内積をもった線形空間 H が **Hilbert 空間**であるとは, 任意の H 上の Cauchy 列が収束することをいう.

以下, (基本的に)Hilbert 空間の性質を概説する．必要に応じて, Hilbert 空間の一般化である Banach 空間についての説明も行う.

2. Hilbert 空間の例

Hilbert 空間であることを示すために, 補題を用意する.

補題 2.1.

線形空間 X に内積 $(\cdot,\cdot)_X$ が定められているとする. $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ を X 上の Cauchy 列とすると, $\{\|x_n\|_X\}_{n=1}^\infty$ は $\mathbb{R}$ 上の Cauchy 列となる. とくに $\{\|x_n\|_X\}_{n=1}^\infty$ は $\mathbb{R}$ 上の収束列である.

証明.

$n,m \in \mathbb{N}$ に対して $\|x_n\|_X \le \|x_n - x_m\|_X + \|x_m\|_X$ だから $\|x_n\|_X - \|x_m\|_X \le \|x_n - x_m\|_X$ が得られる. 同様にして, $\|x_m\|_X - \|x_n\|_X \le \|x_n - x_m\|_X$ が得られるので,

$$|\|x_n\|_X - \|x_m\|_X| \le \|x_n - x_m\|_X$$

となる. このことから $\{\|x_n\|_X\}_{n=1}^\infty$ は $\mathbb{R}$ 上の Cauchy 列であることがわかる. □

2.1. 数列空間 l^2.

数列空間 l^2 は

$$l^2 := \left\{ x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) : \xi_k \in \mathbb{R}\ (k \in \mathbb{N}), \sum_{k=1}^\infty |\xi_k|^2 < \infty \right\}$$

で定めるのであった.

定理 2.1.

数列空間 l^2 は Hilbert 空間である.

証明.

$\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset l^2$ を Cauchy 列とする. つまり, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n,m \in \mathbb{N}$ に対して, $n,m \ge N$ ならば $\|x_n - x_m\|_{l^2} < \varepsilon$ を仮定する. 目標は $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ が l^2 上の収束列であることを示すことである.

1. $x_n = (\xi_k^n)_{k=1}^\infty$ とかく. 各 $k \in \mathbb{N}$ に対して $\{\xi_k^n\}_{n=1}^\infty$ が $n \to \infty$ で収束することを示す. 任意の $n,m \in \mathbb{N}$ に対して, $n,m \ge N$ ならば

$$|\xi_k^n - \xi_k^m| \le \left(\sum_{l=1}^k |\xi_l^n - \xi_l^m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{l=1}^\infty |\xi_l^n - \xi_l^m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \|x_n - x_m\|_{l^2} < \varepsilon$$

となるから, $\{\xi_k^n\}_{n=1}^\infty$ は $\mathbb{R}$ 上の Cauchy 列になる. $\mathbb{R}$ は完備だから $\{\xi_k^n\}_{n=1}^\infty$ は $n \to \infty$ で収束するので, $\xi_k^n \to \xi_k\ (n \to \infty)$, $x := (\xi_k)_{k=1}^\infty$ とおく.

2. $x \in l^2$, すなわち $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2 < \infty$ となることを示す． 補題 2.1 より, $\{\|x_n\|_{l^2}\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{R}$ 上の収束列だから, 有界である．そこで, $M := \displaystyle\sup_{n=1}\|x_n\|_{l^2}^2$ とおくと $M < \infty$ であり, すべての $K \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{k=1}^{K}|\xi_k^n|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k^n|^2 = \|x_n\|_{l^2}^2 \leq M$$

となる． $n \to \infty$ とすれば $\displaystyle\sum_{k=1}^{K}|\xi_k|^2 \leq M$ となる．次に $K \to \infty$ とすれば $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2 \leq M$ となる．

3. $\|x_n - x\|_{l^2} \to 0$ $(n \to \infty)$ を示す．任意の $\varepsilon > 0$ と $K \in \mathbb{N}$, $n, m \in \mathbb{N}$ に対して $n, m \geq N$ ならば

$$\left(\sum_{k=1}^{k}|\xi_k^n - \xi_k^m|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k^n - \xi_k^m|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|x_n - x_m\|_{l^2} < \varepsilon$$

となるから, $m \to \infty$ とすると $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{k}|\xi_k^n - \xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon$ となる．次に, $K \to \infty$ とすると

$$\|x_n - x\|_{l^2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k^n - \xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon$$

となるから, $\|x_n - x\|_{l^2} \to 0$ $(n \to \infty)$, すなわち $x_n \to x$ in l^2 $(n \to \infty)$ がわかる． $\square$

l^2 を一般化して $1 \leq p < \infty$ に対して

$$l^p := \left\{x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) : \xi_k \in \mathbb{R}\ (k \in \mathbb{N}),\ \sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p < \infty\right\}$$

と定義しよう． $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in l^p$ に対して $\|x\|_{l^p} := \displaystyle\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ と定める．

定理 2.2 (Hölder の不等式)**.**
$1 < p, q < \infty$ は $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ をみたすとする．このとき $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in l^p$,

$y = (\eta_k)_{k=1}^{\infty} \in l^q$ に対して

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \|x\|_{l^p} \|y\|_{l^q} \tag{2.1}$$

が成り立つ.

証明.

$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \eta_k|$ に注意して $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \eta_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$ を示せばよい. また, $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0$ or $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0$ のときはすべての $k \in \mathbb{N}$ に対して $\xi_k = 0$ or $\eta_k = 0$ となり, 不等式は自明に成り立つ. 従って, (2.1) の右辺は 0 でないと仮定してよい.

1. $a, b \geq 0$ に対して Young の不等式 $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$ が成り立つ (各自: 微積 B の凸不等式を参照せよ). $\lambda > 0$ に対して a のかわりに λa, b のかわりの $\lambda^{-1}b$ を代入すると

$$ab \leq \frac{\lambda^p}{p}a^p + \frac{1}{q\lambda^q}b^q \tag{2.2}$$

が成り立つ. $k \in \mathbb{N}$ に対して (2.2) に $a = |\xi_k|$, $b = |\eta_k|$ を代入して, k について和をとると

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \eta_k| \leq \frac{\lambda^p}{p} \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p + \frac{1}{q\lambda^q} \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^q = \frac{\lambda^p}{p} \|x\|_{l^p}^p + \frac{1}{q\lambda^q} \|y\|_{l^q}^q \tag{2.3}$$

が得られる.

2. (2.3) で $\lambda = \dfrac{\|y\|_{l^q}^{\frac{1}{p}}}{\|x\|_{l^p}^{\frac{1}{q}}}$ とおくと

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda^p}{p} \|x\|_{l^p}^p + \frac{1}{q\lambda^q} \|y\|_{l^q}^q &= \frac{1}{p} \frac{\|y\|_{l^q}}{\|x\|_{l^p}^{\frac{p}{q}}} \|x\|_{l^p}^p + \frac{1}{q} \frac{\|x\|_{l^p}}{\|y\|_{l^q}^{\frac{q}{p}}} \|y\|_{l^q}^q \\
&= \frac{1}{p} \|x\|_{l^p}^{p(1-\frac{1}{q})} \|y\|_{l^q} + \frac{1}{q} \|x\|_{l^p} \|y\|_{l^q}^{q(1-\frac{1}{p})} \\
&= \|x\|_{l^p} \|y\|_{l^q}
\end{aligned}$$

が得られる. □

2.2. **Lebesgue 空間 L^2.** Lebesgue 空間 $L^2(0,\pi)$ は

$$L^2(0,\pi) := \left\{ f : (0,\pi) \to \mathbb{R}, \text{Lebesgue 可測}, \int_0^\pi |f(x)|^2\,dx < \infty \right\}$$

で定めるのであった.

定理 2.3.
Lebesgue 空間 $L^2(0,\pi)$ は Hilbert 空間である.

注意 2.1.
Lebesgue 積分が考えられたのは, 定理 2.3 が Riemann 積分では成り立たないからである. 理論的には完備性のある Lebesgue 積分が有効であるが, 具体的な計算では Riemann 積分で十分なことが多い.

定理 2.3 は演習問題とする. 当然のことながら, 何も調べずにできる問題ではない. 図書室等を利用して調べて欲しい.
$L^2(0,\pi)$ を一般化して $1 \le p < \infty$ に対して

$$L^p(0,\pi) := \left\{ f : (0,\pi) \to \mathbb{R}, \text{Lebesgue 可測}, \int_0^\pi |f(x)|^p\,dx < \infty \right\}$$

と定義しよう. $f \in L^p(0,\pi)$ に対して $\|f\|_{L^p(0,\pi)} := \left(\int_0^\pi |f(x)|^p\,dx \right)^{\frac{1}{p}}$ と定める.

定理 2.4 (Hölder の不等式)**.**
$1 < p, q < \infty$ は $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ をみたすとする. このとき $f \in L^p(0,\pi)$, $g \in L^q(0,\pi)$ に対して
(2.4)

$$\left| \int_0^\pi f(x)g(x)\,dx \right| \le \left(\int_0^\pi |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\pi |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_{L^p(0,\pi)} \|g\|_{L^q(0,\pi)}$$

が成り立つ.

定理 2.4 は f, g が連続関数の場合を演習問題とする. 証明は数列空間における Hölder の不等式 (定理 2.2) の級数を積分におきかえればよい.

2.2.1. *Lebesgue積分の定義.* Lebesgue積分をとてもおおざっぱに説明する. $\mu(A)$ で $A \subset \mathbb{R}$ の長さ (正確には外測度) をあらわすことにするとき, $f : (0,\pi) \to \mathbb{R}$ が $f \ge 0$ をみたすならば

$$\int_0^\pi f(x)\,dx = \int_0^\infty \mu(\{x \in (0,\pi) : f(x) > \lambda\})\,d\lambda \tag{2.5}$$

となりそうだということは, グラフを書いてみればある程度理解できる. さらにいえば, 二重積分に対する積分の順序交換 (Fubini の定理) をみとめることで

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)\,dx &= \int_0^\pi \left(\int_0^{f(x)} d\lambda\right) dx = \int_0^\pi \left(\int_0^\infty \chi_{\{x\in\mathbb{R}:f(x)>\lambda\}}\,d\lambda\right) dx \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\pi \chi_{\{x\in\mathbb{R}:f(x)>\lambda\}}\,dx\right) d\lambda = \int_0^\infty \mu(\{x\in\mathbb{R}:f(x)>\lambda\})\,d\lambda\end{aligned}$$

となることから理解できる. 問題は, μ がどのような性質をもっていれば都合がよいか？ということであって, この答えが可測集合と可算加法性 (ないしは Carathéodory の条件) である. Riemann 積分の範疇では, 可算加法性がなかったがために完備性を示すことができなかったのである.

$f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ が可測関数であることの定義は, すべての $\lambda\in\mathbb{R}$ に対して $\{x\in(0,\pi):f(x)>\lambda\}$ が可測集合であることであった. これも (2.5) の右辺が都合よく定めるためには必要となることが推測できるであろう. 実際に, Lebesgue 積分は $f\geq 0$ をみたす可測関数 $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ に対して, (2.5) の右辺で定義される. ただし, 右辺の積分は Riemann 積分であり, 測度の性質から無限大に発散することを許して常に定義することができる[1]. $f\geq 0$ でない場合は $f_+=\max\{f,0\}$, $f_-=\max\{-f,0\}$ を考えたときに $f=f_+-f_-$ となることに注意して, f_+, f_- に (2.5) を用いればよい.

2.2.2. 収束定理. μ を $(0,\pi)$ 上の Lebesgue 外測度とし, Σ で $(0,\pi)$ 上の Lebesgue 可測集合のなす集合族とする. このとき, $((0,\pi),\Sigma,\mu)$ は測度空間になる[2].

定理 2.5 (単調収束定理).

$(0,\pi)$ 上の Lebesgue 可測関数列 $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ が $f_1\leq f_2\leq f_3\leq\cdots$ をみたすならば, 積分と極限が交換できる. すなわち, 次が成り立つ:

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^\pi f_k(x)\,dx = \int_0^\pi \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,dx.$$

定理 2.6 (Fatou の補題).

$(0,\pi)$ 上の Lebesgue 可測関数列 $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ は f に各点収束し, すべての $k\in\mathbb{N}$ に対して $f_k\geq 0$ をみたすとする. このとき, 次が成り立つ:

$$\liminf_{k\to\infty}\int_0^\pi f_k(x)\,dx \geq \int_0^\pi \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,dx \left(=\int_0^\pi f(x)\,dx\right).$$

---

[1] $\mu(\{x\in(0,\pi):f(x)>\lambda\})$ が λ に対して単調減少であることを使う. 微積 B で Riemann 積分を連続関数の範疇にしなかったのは, Lebesgue 積分を定義するときに, 単調関数の Riemann 積分可能性に言及したかったため.

[2] 以下の定理は一般に測度空間上で成り立つ.

定理 2.7 (Lebesgue の優収束定理)**.**
$(0,\pi)$ 上の Lebesgue 可測関数列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ は f に各点収束し, ある Lebesgue 可積分関数 g が存在して, すべての $k \in \mathbb{N}$ に対して $|f_k| \le g$ をみたすとする. このとき, 積分と極限が交換できる. すなわち, 次が成り立つ:

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{\pi} f_k(x)\,dx = \int_0^{\pi} \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,dx \left(= \int_0^{\pi} f(x)\,dx \right).$$

2.2.3. *Fubini* の定理. Fubini の定理を限定した形で述べる. より一般には直積測度を考える必要があるが, 話を簡単にするため, 直積測度についてはここでは触れない.

定理 2.8 (Fubini の定理)**.**
$(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)$ 上の Lebesgue 可測関数 f に対して, 次が成り立つ.

(1) 殆んどすべての $a_1 < x < b_1$ に対して, $f(x,y)$ は変数 y についての Lebesgue 可測関数である. 殆んどすべての $a_2 < y < b_2$ に対して, $f(x,y)$ は変数 x についての Lebesgue 可測関数である.

(2) $f \ge 0$ ならば, (無限大もこめて) 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \iint_{(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)} f(x,y)\,dxdy &= \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy \right) dx \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx \right) dy. \end{aligned} \tag{2.6}$$

(3) $\displaystyle\iint_{(a_1,b_1)\times(a_2,b_2)} |f(x,y)|\,dxdy,\ \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} |f(x,y)|\,dy \right) dx,$ $\displaystyle\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} |f(x,y)|\,dx \right) dy$ のどれか一つが有限ならば, この 3 つはすべて有限であり, (2.6) が成り立つ.

2.2.4. 稠密性・近似定理. Lebesgue 積分は, 実のところ Riemann 積分の完備化とみなせる. つまり, 連続関数に対する Riemann 積分に, 不連続な関数とその関数に対する積分をつけくわえたものとみなせる. このことを数学的に表すと, 次の定理でまとめられる.

定理 2.9 (稠密性・近似定理)**.**
$(0,\pi)$ 上の Lebesgue 可積分関数 f に対して, $(0,\pi)$ 上の連続関数列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して

$$\int_0^{\pi} f_k(x)\,dx \to \int_0^{\pi} f(x)\,dx \quad (k\to\infty)$$

が成り立つ.

3. 直交分解定理

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ が直交することと, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_{\mathbb{R}^n} = 0$ は同値であった. このことを無限次元に拡張しよう.

定義 3.1 (直交)**.**
Hilbert 空間 H に対して, $x, y \in H$ が**直交**するとは $(x, y)_H = 0$ となることをいう. このとき, $x \perp y$ と書く. 部分集合 $X, Y \subset H$ が**直交**するとは, 任意の $x \in X$, $y \in Y$ に対して, $(x, y)_H = 0$ となることをいう. このとき, $X \perp Y$ とかく. 集合 $X \subset H$ に対して

$$X^{\perp} := \{y \in X : x \perp y \ (\forall x \in X)\}$$

を X の**直交補空間**という.

$\mathbb{R}^n$ の線形部分空間 $W \subset \mathbb{R}^n$ に対して, $\mathbb{R}^n = W \oplus W^{\perp}$ となることが知られている (直交分解定理). これを無限次元空間に一般化したい.

定義 3.2.
Hilbert 空間 H の部分集合 $F \subset H$ が**閉集合**であるとは, F における点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ が $x \in H$ に収束するとき, $x \in F$ となることをいう. Hilbert 空間 H の部分空間 X が閉集合のとき, **閉部分空間**という.

補題 3.1 (中線定理)**.**
$x, y \in H$ に対して

$$\|x - y\|_H^2 + \|x + y\|_H^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|_H^2)$$

が成り立つ.

証明.
直接計算することにより

$$\begin{aligned}
&\|x - y\|_H^2 + \|x + y\|_H^2 \\
&= (\|x\|_H^2 - 2(x, y)_H + \|y\|_H^2) + (\|x\|_H^2 + 2(x, y)_H + \|y\|_H^2) \\
&= 2(\|x\|_H^2 + \|y\|_H^2)
\end{aligned}$$

がわかる. □

定理 3.1 (直交分解定理)**.**
H を Hilbert 空間, $X \subset H$ を閉部分空間とする. このとき任意の $z \in H$ に対して, ただ一つの $x \in X$, $y \in X^{\perp}$ が存在して, $z = x + y$ とできる.

直交分解定理 (定理 3.1) は, Hilbert 空間 H 上の閉部分空間 $X \subset H$ に対して, $H = X \oplus X^{\perp}$ が成り立つことを主張している.

定義 3.3.
Hilbert 空間 H の部分集合 $X, Y \subset H$ が $X \perp Y$ かつ, 任意の $z \in H$ に対して, $x \in X$, $y \in Y$ が存在して, $z = x + y$ とできるとき, $H = X \oplus Y$ と書く. 閉部分空間 $X \subset H$ と $z \in H$ に対して, 定理 3.1 で得られる $x \in X$ を用いて定義される射影 $H \ni z \mapsto x \in X$ を X への**直交射影**といい, $P_X z := x$ とかく.

証明.
1. 存在を認めて一意性を示す. $z = x + y = x' + y'$ $(x, x' \in X,\ y, y' \in X^{\perp})$ と書けたとすると, $x - x' = y' - y$ に注意して $X \perp X^{\perp}$ より

$$\begin{aligned}\|x - x'\|_H^2 &= (x - x', y' - y)_H \\ &= (x, y')_H - (x, y)_H - (x', y')_H + (x', y)_H = 0\end{aligned}$$

となることから, $x - x' = 0$, つまり $x = x'$ がわかる. $x = x'$ から $y = y'$ も従う.
以下, $z \in H$ に対して, $x \in X$, $y \in X^{\perp}$ が存在して $z = x + y$ となること, つまり, x, y の存在を示す.
2. $\delta = \inf\limits_{\xi \in X} \|z - \xi\|_H$ とおくと, $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ が存在して

$$\|z - \xi_n\|_H \to \delta \quad (n \to \infty)$$

とできる.
3. $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ が H 上の Cauchy 列であることを示す. 中線定理より $n, m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\|(z-\xi_n)-(z-\xi_m)\|_H^2+\|(z-\xi_n)+(z-\xi_m)\|_H^2 = 2\|z-\xi_n\|_H^2+2\|z-\xi_m\|_H^2 \tag{3.1}$$

となる. よって,

$$\|\xi_n - \xi_m\|_H^2 + \left\|2\left(z - \frac{\xi_n + \xi_m}{2}\right)\right\|_H^2 = 2\|z - \xi_n\|_H^2 + 2\|z - \xi_m\|_H^2$$

となるが, X が部分空間だったことより, $\frac{\xi_n+\xi_m}{2} \in X$ となる. δ の定義から

$$\delta \leq \left\|\left(z - \frac{\xi_n + \xi_m}{2}\right)\right\|_H$$

となるので, (3.1) と組み合わせると

$$\|\xi_n - \xi_m\|_H^2 + 4\delta^2 \leq 2\|z - \xi_n\|_H^2 + 2\|z - \xi_m\|_H^2$$

となるので, $n, m \to \infty$ とすると

$$\|\xi_n - \xi_m\|_H^2 \leq -4\delta^2 + 2\|z - \xi_n\|_H^2 + 2\|z - \xi_m\|_H^2 \to 0 \quad (n, m \to \infty)$$

がわかる．よって，$\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ が H 上の Cauchy 列となるので収束する．$\xi_n \to x$ in X $(n \to \infty)$ とおくと，X は閉集合だから $x \in X$ となる．さらに

$$\|z - \xi_n\|_H \to \|z - x\|_H = \delta \quad (n \to \infty)$$

がわかる．

3. $y = z - x \in X^{\perp}$ を示す．$\|\xi\|_H = 1$ となる $\xi \in X$ に対して，$\xi \perp y$ を示せばよい (なぜか？)．そこで，

$$\varphi(t) := \|y - t(y,\xi)_H \xi\|_H^2 \quad (t \in \mathbb{R})$$

とおく．$y - t(y,\xi)_H\xi = z - (x + t(y,\xi)_H\xi)$ であり，$x + t(y,\xi)_H\xi \in X$ だから

$$\begin{aligned}\delta^2 &= \varphi(0) \le \varphi(t)\\ &= t^2(y,\xi)_H^2 - 2t(y,\xi)_H^2 + \|y\|_H^2\\ &= (y,\xi)_H^2(t-1)^2 + \|y\|_H^2 - (y,\xi)_H^2\end{aligned}$$

となる．もし，$(y,\xi)_H^2 \neq 0$ ならば

$$\varphi(1) = \|y\|_H^2 - (y,\xi)_H^2 = \varphi(0) - (y,\xi)_H^2 < \varphi(0)$$

となる，$t = 0$ で φ が最小となることに矛盾する．よって，$(y,\xi)_H^2 = 0$ となるので，$y \in X^{\perp}$ がわかる． □

例 3.1.

$L^2(-\pi,\pi)$ 上の部分空間

$$\begin{aligned}X &:= \{u \in L^2(-\pi,\pi) : u(x) = u(-x)\ \text{(a.e.)}\}\\ Y &:= \{u \in L^2(-\pi,\pi) : u(x) = -u(-x)\ \text{(a.e.)}\}\end{aligned}$$

は $L^2(-\pi,\pi)$ の閉部分空間となり，$X \perp Y$ が成り立つ．さらに，$u \in L^2(-\pi,\pi)$ に対して，$v \in X$, $w \in Y$ が存在して，$u = v + w$ とかける．実際に

$$u(x) = \frac{u(x) + u(-x)}{2} + \frac{u(x) - u(-x)}{2} \quad \text{(a.e.)}$$

と書けばよい．従って，直交分解定理から，$L^2(-\pi,\pi) = X \oplus X^{\perp} = X \oplus Y$ となることから，$X^{\perp} = Y$ がわかる．つまり，$L^2(-\pi,\pi)$ は偶関数のなす空間 X と奇関数のなす空間 Y に直交分解できる．X への射影 P_X, Y への射影 P_Y は $u \in L^2(-\pi,\pi)$ に対してそれぞれ

$$(P_X u)(x) = \frac{u(x) + u(-x)}{2}, \quad (P_Y u)(x) = \frac{u(x) - u(-x)}{2}$$

で与えられる．

4. 正規直交系

$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$,..., $\boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, n) \in \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の標準基底と呼ばれた[3]. 内積を考えると

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

つまり $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底となることもわかる. このことを無限次元で考える.

定義 4.1 (正規直交系)**.**
Hilbert 空間 H に対してたかだか可算集合 $\{x_n\} \subset H$ が正規直交系であるとは, 任意の添字 i, j に対して, $(x_i, x_j)_H = \delta_{ij}$ が成り立つことをいう.

例 4.1.
l^2 において, $e_j = (\delta_{kj})_{k=1}^{\infty} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ とおくと, $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ は l^2 における正規直交系となる. 任意の添字 i, j に対して $(e_i, e_j)_{l^2} = \delta_{ij}$ となることは簡単に確かめられる.

例 4.2.
$L^2(-\pi, \pi)$ において, $\left\{ \sqrt{\dfrac{1}{\pi}} \sin(nx) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ は正規直交系となる.

証明.
示すべきことは $n, m \in \mathbb{N}$ に対して, $(\sqrt{\frac{1}{\pi}} \sin(nx), \sqrt{\frac{1}{\pi}} \sin(mx))_{L^2(-\pi,\pi)} = \delta_{mn}$ となること, すなわち

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) \, dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq m \end{cases}$$

である. この積分の計算は高校の教科書レベルである. □

以下, 話を簡単にするために, 正規直交系はつねに可算集合の場合のみを考えることにする. 有限集合の場合も, 少しだけ修正すれば同様のことが成立する.

命題 4.1 (Bessel の不等式)**.**
$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ を正規直交系とすると, Bessel の不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, x_k)_H|^2 \leq \|x\|_H^2 \quad (\forall x \in H)$$

が成り立つ.

[3]基底は集合かどうかとかそういうことはとりあえず気にしないことにする.

証明.

$\alpha_k = (x, x_k)_H$ とおくと, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \right\|_H^2 \\
&= \|x\|_H^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (x, x_k)_H + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \alpha_k \alpha_l (x_k, x_l)_H \\
&= \|x\|_H^2 - 2\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \quad (\because\ (x_k, x_l)_H = \delta_{ij}) \\
&= \|x\|_H^2 - \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2
\end{aligned}
$$

となる. よって,

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \leq \|x\|_H^2$$

となるから, $n \to \infty$ とすれば Bessel の不等式が得られる. □

$\{\boldsymbol{e}_j\}_{j=1}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底となるから, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$x = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{e}_n \tag{4.1}$$

と書けるが, このとき

$$(x, \boldsymbol{e}_j) = \alpha_1(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_j) + \cdots + \alpha_n(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_j) = \alpha_j$$

だから, (4.1) に代入すると

$$x = (x, \boldsymbol{e}_1)\boldsymbol{e}_1 + \cdots + (x, \boldsymbol{e}_n)\boldsymbol{e}_n = \sum_{k=1}^{n} (x, \boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_k \tag{4.2}$$

となる. さらに, (4.2) より

$$
\begin{aligned}
\|x\|^2 &= (\sum_{k=1}^{n}(x, \boldsymbol{e}_k)\boldsymbol{e}_k, \sum_{j=1}^{n}(x, \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_j) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x, \boldsymbol{e}_k)(x, \boldsymbol{e}_j)(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_j) = \sum_{k=1}^{n}(x, \boldsymbol{e}_k)^2 \quad (\because (\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_j) = \delta_{ij}),
\end{aligned}
$$

すなわち, Bessel の不等式は等号で成立する. この性質は無限次元でも成り立つのであろうか？実は常に成り立つとは限らないが, 成り立つための必要十分条件が得られている.

定理 4.1 (cf. 増田久弥, 「関数解析」, 裳華房, 1994, §2.4)**.**
$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ を正規直交系とすると以下は同値となる.

(1) $H = \overline{\left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k : \alpha_k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}}^{H}$;

(2) $x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, x_k)_H x_k \quad (\forall x \in H)$;

(3) (Perseval の等式) すべての $x \in H$ に対して, $\|x\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, x_k)_H|^2$;

(4) すべての $x \in H$, $n \in \mathbb{N}$ に対して, $(x, x_n)_H = 0$ ならば, $x = 0$.

定義 4.2 (完全正規直交系)**.**
ヒルベルト空間 H の正規直交系 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ が定理 4.1 の (1) から (4) のどれかをみたすとき, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は H の完全正規直交系という.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が H の完全正規直交系ということは, 線形代数の言葉でいうと, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が H の基底になっているということとだいたい同じである. とくに, 定理 4.1 の (2) で主張していることは, すべての $x \in H$ が $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ の線形結合で書くことができるということである.

例 4.3.
l^2 において

$$e_j = \{\delta_{ij}\}_{i=1}^{\infty} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$$

とおくと, $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ は l^2 における完全正規直交系となる.

証明.
完全性のみ示す. そこで, 定理 4.1 の (4) を示す. すなわち, 任意の $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in l^2$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して, $(x, e_n)_{l^2} = 0$ を仮定して, $x = 0$ を示す. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, $(x, e_n)_{l^2} = 0$ と, $(x, e_n)_{l^2} = \xi_n$ より, $\xi_n = 0$ がわかる. $n \in \mathbb{N}$ は任意だったから, $x = 0$ となるので, 定理 4.1 の (4) が示された. □

例 4.4.
$L^2(-\pi, \pi)$ において, $\left\{ \sqrt{\frac{1}{2\pi}},\ \sqrt{\frac{1}{\pi}} \sin(nx),\ \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cos(nx) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ は完全正規直交系となる. 正規直交系になることは高校数学の練習問題であるが, 完全性を示すことが難しい. このことをみとめると, 任意の $f \in L^2(-\pi, \pi)$ は次の形に Fourier 級数展開できる (係数 α_n, β_n が何かについては次の章にまわす):

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \sin(nx) + \beta_n \cos(nx)) \quad \text{a.e. } -\pi < x < \pi.$$

5. Fourier 級数とその応用

線形空間 V に直交系 $\{e_j\}_{j=1}^N$ が与えられ, $x \in V$ が

$$x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_N e_N$$

と書けたとする. このとき, x と e_j $(j = 1, \ldots, n)$ との内積を考えると

$$(x, e_j) = (\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_N e_N, e_j) = \alpha_j (e_j, e_j) \tag{5.1}$$

となるから, $\alpha_j = (x, e_j)/(e_j, e_j)$ となることがわかる. 特に, $\{e_j\}_{j=1}^N$ が正規直交系であれば, $\alpha_j = (x, e_j)$ となる.

5.1. Fourier 級数. 例 4.4 により, $f \in L^2(-\pi, \pi)$ に対して

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \sin(nx) + \beta_n \cos(nx)) \quad \text{a.e.} \ -\pi < x < \pi.$$

と Fourier 展開できることを述べた. $k \in \mathbb{N}$ に対して両辺に $\sin(kx)$ をかけて $-\pi < x < \pi$ で積分すると, 直交性より

(5.2)
$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \sin(nx) + \beta_n \cos(nx)) \right) \sin(kx)\, dx \\ &= \alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx)\, dx = \pi \alpha_k, \end{aligned}$$

すなわち, $\alpha_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx$ となる. (5.2) を内積を用いて表すと

$$\begin{aligned} (f, \sin(kx))_{L^2(-\pi,\pi)} &= (\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \sin(nx) + \beta_n \cos(nx)), \sin(kx))_{L^2(-\pi,\pi)} \\ &= \alpha_k (\sin(kx), \sin(kx))_{L^2(-\pi,\pi)} = \pi \alpha_k \end{aligned}$$

と (5.1) の計算と対応していることがわかる. α_0, β_k についても同様の計算を行うことにより

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx, \quad \beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx$$

となることがわかる. まとめて, 次の定理を得る.

定理 5.1 (Fourier 級数展開)**.**
$f \in L^2(-\pi,\pi)$ に対して

$$f(x) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \sin(nx) + \beta_n \cos(nx)) \quad \text{a.e. } -\pi < x < \pi.$$

と Fourier 級数展開できる．ここで, 無限級数は $L^2(-\pi,\pi)$ における極限であり, $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,\ \alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,dx,\ \beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,dx$$

である．

5.2. **等周不等式.**

定理 5.2 (等周不等式)**.**
滑らかな単純閉曲線 C の周の長さを l, 囲う面積を A とすると

$$4\pi A \le l^2 \tag{5.3}$$

が成り立つ．

この不等式 (5.3) を**等周不等式**という．C として, 半径 r の円を考えると, $l = 2\pi r$, $A = \pi r^2$ だから, (5.3) で等号が成り立つことがわかる．つまり, **円は周の長さを一定にしたときに, 囲う面積を最大にする曲線**ということがわかる．

定理 5.2 の証明の方針.
1. 単純閉曲線 C を周の長さが l であることに注意して

$$C : (x(t), y(t)), \quad |(\dot{x}(t), \dot{y}(t))| = \frac{l}{2\pi} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

とパラメータ表示すると,

$$\int_0^{2\pi} ((\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{l^2}{4\pi^2}\,dt = \frac{l^2}{2\pi}$$

が得られる．一方, Green の定理 (現代解析学 I, 系 5.3) によると

$$A = -\int_C y\,dx$$

だったから, $dx = \frac{dx}{dt}dt = \dot{x}\,dt$ に注意すると

$$\begin{aligned} l^2 - 4\pi A &= 2\pi \int_0^{2\pi} ((\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + 2y\dot{x}(t))\,dt \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} ((\dot{x}(t)) + y)^2\,dt + 2\pi \int_0^{2\pi} ((\dot{y}(t))^2 - y^2)\,dt \end{aligned}$$

となるので,

$$\int_0^{2\pi} ((\dot{y}(t))^2 - y^2)\,dt \geq 0 \tag{5.4}$$

が得られれば (5.3) が得られる.

2. y を Fourier 級数展開して

$$y(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \sin(nt) + \beta_n \cos(nt))$$

と表すと

$$\dot{y}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(n\alpha_n \cos(nt) - n\beta_n \sin(nt)) \tag{5.5}$$

となる. $y(t)-\alpha_0$ をあらためて $y(t)$ とおくと, $\alpha_0 = 0$ となるように C を y 軸方向に平行移動したことになり,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (\dot{y}(t))^2\,dt &= (\dot{y}, \dot{y})_{L^2(0,2\pi)} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n^2(\alpha_n^2 + \beta_n^2), \\ \int_0^{2\pi} y(t)^2\,dt &= (y, y)_{L^2(0,2\pi)} = \pi \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \end{aligned} \tag{5.6}$$

がわかる. $n^2 \geq 1$ より, (5.6) の級数を比較すれば (5.4) が得られる. □

注意 5.1.

定理 5.2 の証明は Hurwitz による. Hurwitz は等周不等式 (5.3) で等号が成立するのは円のときに限ることも証明している. 詳しくは,

- 小林昭七, 「円の数学」, 裳華房, 1999, §4.4.
- E. M. Stein, R. Shakarchi 著, 新井 仁之, 杉本 充, 高木 啓行, 千原浩之 訳, 「フーリエ解析入門 (プリンストン解析学講義) 」, 日本評論社, 2007, Chapter 4 §1.

を参照せよ.

注意 5.2.

(5.5) で行った微分について, 微分と級数の交換は自明ではないし, (5.6) の $\dot{y}$ に関する右辺の級数の収束も自明ではない. 従って, パラメータ表示に使った x や y にどの程度の条件が必要か？つまり, 曲線 C にどの程度の条件を仮定すべきか？も考察すべき問題である. 上記で述べた証明の大筋が最も重要ではあるが, 大筋を正当化させるための曲線 C に課すべき条件を明らかにさせることもまた重要である.

6. 線形作用素

有限次元線形空間では線形写像が重要な写像であった. 線形空間を勉強するうえで, ベクトルの性質を調べるだけではダメで, 都合のよい線形写像を考えることで, 線形空間のより詳しい性質を調べることができた. この事情は無限次元であっても同様である. 本節では, Hilbert 空間における写像の中で, 最も行列に似た性質を持つ, 有界線形作用素の性質について述べる.

以下, H, H' は Hilbert 空間とする.

定義 6.1 (線形作用素)**.**
$D \subset H$ を線形部分空間, $T : H \to H'$ とする (以下, $T : D \subset H \to H'$ と書く). このとき, T が**線形作用素**であるとは, 次をみたすことをいう:
(1) 任意の $x_1, x_2 \in D$ に対して, $T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2$;
(2) 任意の $x \in D$, $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, $T(\alpha x) = \alpha Tx$;
このとき, D を線形作用素 T の定義域といい, $D(T)$ と書く.

区間 $I \subset \mathbb{R}$ 上の関数 $f : I \to \mathbb{R}$ が連続であるとは, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset I$, $x \in I$ が $x_n \to x$ をみたすならば $f(x_n) \to f(x)$ となることであった. このことを無限次元で考える.

定義 6.2 (連続作用素)**.**
線形作用素 $T : D(T) \subset H \to H'$ が連続であるとは, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(T)$, $x \in D(T)$ が

$$x_n \to x \text{ in } H \quad (n \to \infty)$$

ならば,

$$Tx_n \to Tx \text{ in } H' \quad (n \to \infty)$$

をみたすことをいう.

定理 6.1.
$T : D(T) \subset H \to H'$ を線形作用素とする. このとき, T が連続であることと, $M > 0$ が存在して, 任意の $x \in D(T)$ に対して, $\|Tx\|_{H'} \leq M\|x\|_H$ が成立することは同値である.

証明.
($\Rightarrow$) 方針のみ述べる. 背理法を用いると, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して, $x_n \in D(T)$ が存在して, $\|Tx_n\|_{H'} > n\|x_n\|_H$ とできる. $y_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \dfrac{x_n}{\|x_n\|_X} \in D(T)$ とおくと

$$y_n \to 0 \text{ in } H, \quad \|Ty_n\|_{H'} \to \infty \quad (n \to \infty)$$

となることから, 連続性に矛盾する.

($\Leftarrow$) $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(T)$, $x \in D(T)$ が $x_n \to x$ in H $(n \to \infty)$ ならば

$$\begin{aligned}\|Tx_n - Tx\|_{H'} &= \|T(x_n - x)\|_{H'} \quad (\because\ T \text{ は線形}) \\ &\leq M\|x_n - x\|_H \quad (\because\ \text{仮定}) \\ &\to 0 \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

となるから, $Tx_n \to Tx$ in H' $(n \to \infty)$ となる. よって T は連続となる. □

定義 6.3 (有界作用素)**.**
線形作用素 $T : D(T) \subset H \to H'$ が有界であるとは, $M > 0$ が存在して, 任意の $x \in D(T)$ に対して, $\|Tx\|_{H'} \leq M\|x\|_H$ とできることをいう. このとき

$$\mathscr{L}(H, H') := \{T : H \to H',\ \text{有界線形作用素},\ D(T) = H\}$$

$$\mathscr{L}(H) := \mathscr{L}(H, H), \qquad H^* := \mathscr{L}(H, \mathbb{R}),$$

$$\|T\|_{\mathscr{L}(H,H')} := \sup_{\substack{x \in H \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_{H'}}{\|x\|_H} \quad (T \in \mathscr{L}(H, H'))$$

と書く. 特に H^* は H の共役空間 (dual space) といい, $f \in H^*$ は有界線形汎関数という.

注意 6.1.
すべての $x \in H$ に対して $\|Tx\|_{H'} \leq \|T\|_{\mathscr{L}(H,H')}\|x\|_H$ が成り立つ. 実際に $x = 0$ のときは等号が成立し, $x \neq 0$ のとき

$$\|Tx\|_{H'} = \frac{\|Tx\|_{H'}}{\|x\|_H}\|x\|_H \leq \|T\|_{\mathscr{L}(H,H')}\|x\|_H$$

がわかる.

例 6.1 (たたみ込み, convolution)**.**
$\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を Lebesgue 可積分関数とする. このとき,

$$\begin{cases} D(T) := L^2(\mathbb{R}^n) \\ Tf(x) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x - y) f(y)\, dy \quad (f \in L^2(\mathbb{R}^n),\ x \in \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

とおく. このとき $T \in \mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}^n))$ となる. $Tf =: \rho * f$ と書き, ρ と f のたたみ込み (convolution) という.

注意 6.2.
$t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\rho_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

でたたみ込み $\rho_t * f$ を考えることが非常に重要である．実際に $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ に対し, $u(t,x) = \rho_t * f(x)$ とおくと

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \Delta u(t,x), & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

となる, すなわち, 初期値 f に対する熱方程式の初期値問題の解となることが知られている.

例 6.1 の証明.

話を簡単にするため, $n = 1$ とする．$f \in L^2(\mathbb{R})$ に対して次の不等式

$$\|\rho * f\|_{L^2(\mathbb{R})} \le \|\rho\|_{L^1(\mathbb{R})} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

を示せばよい.

$$|\rho(x-y)f(y)| = |\rho(x-y)|^{\frac{1}{2}} (|\rho(x-y)|^{\frac{1}{2}} |f(y)|)$$

だから, Hölder の不等式より

$$|\rho * f(x)| \le \|\rho\|_{L^1(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\rho(x-y)||f(y)|^2 \, dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

となる．両辺 2 乗して積分すると, Fubini の定理により

$$\int_{\mathbb{R}} |\rho * f(x)|^2 \, dx \le \|\rho\|_{L^1(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\rho(x-y)||f(y)|^2 \, dy \right) dx = \|\rho\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$$

となる. □

例 6.2 (Fourier 変換, Fourier 逆変換)**.**

$f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ に対して

$$(\mathscr{F} f)(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi} \, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}$$
$$(\mathscr{F}^{-1} f)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ix\xi} \, d\xi, \quad x \in \mathbb{R}$$

で定める写像 $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}^{-1}$ をそれぞれ **Fourier 変換**, **逆 Fourier 変換**という[4]．f が十分に都合のよい関数のとき[5],

$$\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F} f = f,\ \mathscr{F}\mathscr{F}^{-1} f = f,\ \|\mathscr{F} f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})},\ \|\mathscr{F}^{-1} f\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

となる．このことから, $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}^{-1} \in \mathscr{L}(L^2(\mathbb{R}))$ となる[6].

[4]定数の掛け算には流儀がいろいろある.
[5]例えば, f が急減少関数であればよい.
[6]正確には $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}^{-1}$ の適当な拡張を考える.

例 6.3.

$L^2(0,\pi)$ 上の作用素

$$\begin{cases} D(T) := C^1([0,\pi]) \subset L^2(0,\pi) \\ Tf(x) := f'(x) = \dfrac{df}{dx}(x) \quad (f \in D(T), x \in (0,\pi)) \end{cases}$$

は有界にならない[7]. 実際に, ある定数 $C > 0$ が存在して, すべての $f \in D(T)$ に対して $\|Tf\|_{L^2(0,\pi)} \le C\|f\|_{L^2(0,\pi)}$ が成り立っていると仮定する. $n > C$ をみたす $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$f_n(x) := \sqrt{2n}e^{-nx} \quad (0 \le x \le \pi)$$

とおくと, $f_n'(x) = -n\sqrt{2n}e^{-nx}$ となるから, $f_n \in C^1([0,\pi])$ がわかる. さらに

$$\|f_n\|_{L^2(0,\pi)}^2 = \int_0^\pi (\sqrt{2n}e^{-nx})^2\,dx = \int_0^\pi 2ne^{-2nx}\,dx = 1 - e^{-2n\pi}$$

$$\|Tf_n\|_{L^2(0,\pi)}^2 = \int_0^\pi (-n\sqrt{2n}e^{-nx})^2\,dx = n^2\int_0^\pi 2ne^{-2nx}\,dx = n^2(1 - e^{-2n\pi})$$

となるから, 背理法の仮定により,

$$n\sqrt{1-e^{-2n\pi}} \le C\sqrt{1-e^{-2n\pi}}$$

が得られる. これは $n > C$ であったことに矛盾する.

例 6.1 と例 6.3 の違いを端的にいうと**積分のからんだ作用素は有界**であることに対して, **微分のからんだ作用素は有界ではない**である. つまり, 微分は関数解析とは相性があまりよくない. この問題を回避するために, 微分を一般化する研究が行われてきた.

例 6.4.

関数 f はとりあえず都合のよい関数とする (条件を書くとかなり煩雑になるので, ここでは言及しない). このとき, 部分積分を用いて

$$\begin{aligned} \mathscr{F}f'(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ix\xi}\,dx \\ &= \Big[f(x)e^{-ix\xi}\Big]_{x=-\infty}^{x=\infty} + \frac{i\xi}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ix\xi}\,dx = i\xi\mathscr{F}f(\xi) \end{aligned}$$

より, $\mathscr{F}^{-1}$ を両辺に作用させると $f'(x) = \mathscr{F}^{-1}[i\xi\mathscr{F}f](x)$ となる. そこで, この等式の右辺を f の微分と考えることで, 微分を一般化することができる. 例えば, $\xi\mathscr{F}f \in L^2(\mathbb{R})$ であれば, 右辺は意味を持つ.

---

[7] 正確には, $C^1([0,\pi])$ とは何かを言及しないといけないが省略する. とりあえず, $f' \in L^2(0,\pi)$ がみたされる条件にしたかったと思っておけばよい.

7. 共役空間と線形汎関数

有界線形汎関数のなす空間である共役空間 H^* は自然に和とスカラー倍が定義できる．すなわち, $f, g \in H^*$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad (x \in H)$$
$$(\alpha f)(x) := \alpha f(x) \quad (x \in H)$$

により, $f+g$, αf が定義でき, H^* が線形空間となることがわかる．さらに

$$\|f\|_{H^*} := \sup_{\substack{x \in H \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_H}, \qquad d(f,g) := \|f-g\|_{H^*} \tag{7.1}$$

とおくと, d は H^* の距離となる．たとえば, $x \in H$ に対して

$$|(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq (\|f\|_{H^*} + \|g\|_{H^*})\|x\|_H$$

となることから, 三角不等式 $\|f+g\|_{H^*} \leq \|f\|_{H^*} + \|g\|_{H^*}$ が得られる．

定理 7.1.
H^* は (7.1) によって定まる距離 d について完備である．

証明.
$\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset H^*$ を H^* 上の Cauchy 列とする．すなわち, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $N \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n, m \in \mathbb{N}$ に対して

$$n, m \geq N \Rightarrow \|f_n - f_m\|_{H^*} < \varepsilon$$

とする．

1. 極限 $f : H \to \mathbb{R}$ が存在することを示す．任意の $x \in H$ と $n, m \in \mathbb{N}$ に対して $n, m \geq N$ ならば

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |(f_n - f_m)(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{H^*}\|x\|_H \leq \varepsilon\|x\|_H \tag{7.2}$$

となるので, $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ 上の Cauchy 列となる．よって, $\mathbb{R}$ は完備ゆえ収束するから, $f : H \to \mathbb{R}$ を $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ で定義する．

2. $f \in H^*$ を示す．f が線形写像となることは各自確かめよ．(7.2) において $m \to \infty$ とすると

$$n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon\|x\|_H \tag{7.3}$$

となるので, $n \geq N$ ならば

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq (\varepsilon + \|f_n\|_{H^*})\|x\|_H$$

となる．補題 2.1 と同様の議論により $\|f_n\|_{H^*}$ は有界だから, $f \in H^*$ がわかる．

3. $f_n \to f$ in H^* $(n \to \infty)$, すなわち $d(f_n, f) \to 0$ $(n \to \infty)$ を示す. (7.3) を $\|x\|_X$ でわると

$$\frac{|(f_n - f)(x)|}{\|x\|_H} \le \varepsilon$$

となるから, $x \neq 0$ となる $x \in X$ について上限をとると $n \ge N$ ならば

$$\|f_n - f\|_{H^*} = \sup_{\substack{x \in H \\ x \neq 0}} \frac{|(f_n - f)(x)|}{\|x\|_H} \le \varepsilon$$

となるので, $d(f_n, f) = \|f_n - f\|_{H^*} \to 0$ $(n \to \infty)$ がわかる. よって $f_n \to f$ in H^* $(n \to \infty)$ が示された. $\square$

ところで, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して, $\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{x}) := x_j = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_j)$ とおくと, $\boldsymbol{f}_j$ は線形で

$$|\boldsymbol{f}_j(\boldsymbol{x})| = |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_j)| \le |\boldsymbol{x}|$$

となるから, $\boldsymbol{f}_j$ は有界線形汎関数, すなわち $\boldsymbol{f}_j \in (\mathbb{R}^n)^*$ となる. よって, **有界線形汎関数はベクトルの成分 (または座標) を表す関数の一般化と考えること**ができる.

例 7.1.
$a \in l^2$ を一つ固定して

$$f_a(x) := (a, x)_{l^2} \quad x \in l^2$$

と定めると, $f_a \in (l^2)^*$ となる. 線形であることは各自考えよ. f_a が有界であることのみ示す. $x \in l^2$ に対して, Schwarz の不等式より

$$|f_a(x)| = |(a, x)_{l^2}| \le \|a\|_{l^2} \|x\|_{l^2} \tag{7.4}$$

となるので, f は有界であり, とくに $\|f\|_{(l^2)^*} \le \|a\|_{l^2}$ となる. さらに, (7.4) で $x = a$ とおくと $|f_a(a)| = \|a\|_{l^2}^2$ より, とくに

$$\|T_a\|_{(l^2)^*} \ge \frac{|f_a(a)|}{\|a\|_{l^2}} = \|a\|_{l^2}$$

となるので, $\|f_a\|_{(l^2)^*} = \|a\|_{l^2}$ となる.

例 7.1 の証明を一般化して, 次が得られる.

定理 7.2.
Hilbert 空間 H と $a \in H$ に対して $f_a : H \to \mathbb{R}$ を $f_a(x) := (a, x)_H$ $(x \in H)$ で定める. このとき, $f_a \in H^*$ であり, $\|f_a\|_{H^*} = \|a\|_H$ が成り立つ.

証明は演習にまわす.

8. Riesz の表現定理

$\mathbb{R}^n$ の (有界) 線形汎関数 $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ を考える. $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して, 標準基底 $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$,..., $\boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ を考えると

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}) &= f(x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) \\ &= x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{e}_n) = ((f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)), (x_1, \ldots, x_n)) \end{aligned} \tag{8.1}$$

が得られる. 特に $\boldsymbol{a} = (f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n))$ とおくと, (8.1) は

$$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) \tag{8.2}$$

と書ける. (8.2) は $\mathbb{R}^n$ **の線形汎関数** f **はベクトル** $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ **を用いて同一視できる, すなわち** $f = \boldsymbol{a}$ **とみなせることを主張している (**$f \in (\mathbb{R}^n)^*$**,** $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ **だから, この等号は厳密には意味をなさない!!!)**. より正確に次が成り立つ.

定理 8.1.
$\mathbb{R}^n$ の共役空間 $(\mathbb{R}^n)^*$ は $\mathbb{R}^n$ と線形同型になる.

定理 8.1 の証明の方針.
$J : (\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}^n$ を $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ に対して

$$Jf := (f(\boldsymbol{e}_1), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n))$$

とおくと, J は線形写像になること, すなわち, $f, g \in (\mathbb{R}^n)^*$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$J(\alpha f + \beta g) = \alpha Jf + \beta Jg$$

となることがわかる. 逆写像 $J^{-1} : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$ は, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$(J^{-1}\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}) := (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$$

となる. そして, J^{-1} が線形写像になること, すなわち, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$J^{-1}(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b})(\boldsymbol{x}) = (\alpha J^{-1}\boldsymbol{a} + \beta J^{-1}\boldsymbol{b})(\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$$

となることにより, J が線形同型写像であることがわかる. □

定理 8.1 とその証明で与えた J を用いて, $(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^n$ とみなすことができる. この結果を内積をもった無限次元線形空間に拡張したのが, 次の Riesz の表現定理である.

定理 8.2 (Riesz の表現定理)**.**
任意の $f \in H^*$, すなわち有界線形汎関数 f に対して, ある $u \in H$ が一意に存在して

$$f(x) = (u, x)_H \quad (x \in H)$$

が成り立つ. さらに, $\|f\|_{H^*} = \|u\|_H$ が成り立つ.

定理 8.2 の証明.
1. $f = 0$ のときは, $u = 0$ とすればよいので, $f \neq 0$ とする. このとき,

$$N := \{x \in H : f(x) = 0\}$$

とおくと, $N \subset H$ は H 上の閉部分空間となることを示す. N が部分空間になることは演習問題とし, 閉集合であることを示す. そのために, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset N$ が $x_n \to x \in H$ in H $(n \to \infty)$ となることを仮定して, $x \in N$ を示す. このとき, $f(x_n) = 0$ であり, f が有界 (従って連続) であったから, $n \to \infty$ とすると $f(x) = 0$ となる. 従って, $x \in N$ となるので, N は閉集合である.
2. $u \in H$ の存在を示す. $N \neq H$ となるから, 直交分解定理 (定理 3.1) より, $H = N \oplus N^{\perp}$ とできる. そこで, $y_0 \neq 0$ となる $y_0 \in N^{\perp}$ を一つとると, 任意の $x \in H$ に対して,

$$f\Big(f(y_0)x - f(x)y_0\Big) = f(y_0)f(x) - f(x)f(y_0) = 0$$

だから, $f(y_0)x - f(x)y_0 \in N$ となる. 従って

$$(f(y_0)x - f(x)y_0, y_0)_H = 0$$

となるから

$$f(y_0)(x, y_0)_H = f(x)(y_0, y_0)_H$$

が得られる. 両辺 $\|y_0\|_H^2$ で割ることにより

$$f(x) = \left(x, \frac{f(y_0)y_0}{\|y_0\|_H^2}\right)_H \tag{8.3}$$

となる. 従って, $u = \dfrac{f(y_0)y_0}{\|y_0\|_H^2}$ とすれば, 定理の存在性が証明できた.
3. $\|f\|_{H^*} = \|u\|_H$ となることを示す.

$$\|u\|_H = \left\|\frac{f(y_0)y_0}{\|y_0\|_H^2}\right\|_H = \frac{\|f(y_0)\|_H}{\|y_0\|_H} \leq \|f\|_{H^*}$$

に注意すれば, $\|f\|_{H^*} \geq \|u\|_H$ が得られる. また, (8.3) と Schwarz の不等式より, すべての $x \in H$ に対して

$$|f(x)| = |(x, u)_H| \leq \|x\|_H\|u\|_H$$

となるから, $\|f\|_{H^*} \le \|u\|_H$ が得られる.

4. 一意性を示す. もし, u_1, $u_2 \in H$ が存在して, 任意の $x \in H$ に対して, $f(x) = (u_1, x)_H = (u_2, x)_H$ が成り立つならば,

$$(u_1 - u_2, x)_H = 0$$

となる. $x \in H$ は任意だったから, とくに $x = u_1 - u_2$ とおくと $\|u_1 - u_2\|_H^2 = 0$ となるので, $u_1 = u_2$ が成り立つ. よって, $u \in H$ は一意に存在する. □

$J : H^* \to H$ を $f \in H^*$ に対して定理 8.2 で得られる $u \in H$ を用いて, $Jf := u$ と定めると, J は線形同型写像になる.

命題 8.1.

$f, g \in H^*$ に対して $(f, g)_{H^*} := (Jf, Jg)_H$ と定めると $(\cdot, \cdot)_{H^*}$ は H^* の内積となる.

命題 8.1 の証明の概略.

$f \in H^*$ に対して, $(f, f)_{H^*} = (Jf, Jf)_H \ge 0$ となる. $(f, f)_{H^*} = 0$ ならば $Jf = 0$ となることから $f = 0$ となることもわかる. $f, g, h \in H^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\begin{aligned}
(f, g)_{H^*} &= (Jf, Jg)_H = (Jg, Jf)_H = (g, f)_{H^*}, \\
(\alpha f + \beta g, h)_{H^*} &= (J(\alpha f + \beta g), Jh)_H \\
&= (\alpha Jf + \beta Jg, Jh)_H \quad (\because J \text{ は線形}) \\
&= \alpha (Jf, Jh)_H + \beta (Jg, Jh)_H = \alpha (f, h)_{H^*} + \beta (g, h)_{H^*}
\end{aligned}$$

に注意すれば, $(\cdot, \cdot)_{H^*}$ が H^* の内積となることがわかる. □

$f \in H^*$ に対して, Riesz の表現定理より $\|f\|_{H^*} = \|Jf\|_H$ となることと定理 7.1 を組み合わせて, 次の定理が得られる.

定理 8.3.

Hilbert 空間 H の共役空間 H^* はまた Hilbert 空間になる. そして, H と H^* は線形同型, かつ位相同型である.

定理 8.3 は H^* を H と同一視してよい, すなわち, $H^* = H$, $f = u(= Jf)$ とみなしてよいことを主張している. さらに, H^* の共役空間である $(H^*)^* = H^{**}$ を考えることもできるが, $H^* = H$ とみなしてよいことから, $H^{**} = H$ が得られる. 一般に線形空間 X に対して, $X^{**} = X$ が成り立つとき, X は回帰的, または反射的であるという. Riesz の表現定理から, 次の定理が得られる.

定理 8.4.

Hilbert 空間 H は回帰的である.

9. 弱収束と強収束

$\mathbb{R}^d$ 上の点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1} \subset \mathbb{R}^d$ について, $\boldsymbol{x}_n = (x_n^1, \ldots, x_n^d)$ と書く. このとき

$$\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x} = (x^1, \ldots, x^d) \Longleftrightarrow x_n^k \to x^k \quad (\forall k = 1, \ldots, d) \tag{9.1}$$

であった. この右辺の**各成分が収束することは** $x_k = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k)$ に注意すると $(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{e}_k) \to (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_k)$ $(n \to \infty)$ と同値であることに注意する. 従って, 任意のベクトル $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}) &= y_1(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{e}_1) + \cdots + y_d(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{e}_d) \\ &\to y_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1) + \cdots + y_d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_d) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \quad (n \to \infty)\end{aligned}$$

すなわち, $(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{y}) \to (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ $(n \to \infty)$ が得られる. このことを用いて, Hilbert 空間における上の意味での収束を定義しよう.

定義 9.1 (弱収束)**.**
点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ が $x \in H$ に**弱収束**するとは, 任意の $y \in H$ に対して

$$(x_n, y)_H \to (x, y)_h \quad (n \to \infty)$$

が成り立つことをいう. このとき,

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{in } H \ (n \to \infty)$$

とか

$$x_n \to x \quad \text{weakly in } H \ (n \to \infty)$$

書く.

注意 9.1.
通常の Hilbert 空間 H における収束のことを強収束ということがある. このことを強調したいときは

$$x_k \to x \quad \text{strongly in } H \ (n \to \infty)$$

と書く. 強収束するときは弱収束することは Schwarz の不等式から得られる.

例 9.1 (oscillates to death, Riemann-Lebesgue の補題)**.**
$n \in \mathbb{N}$ に対し, $f_n : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ を $f_n(x) := \sin(nx)$ $(0 < x < \pi)$ で定める. このとき, $f_n \rightharpoonup 0$ weakly in $L^2(0, \pi)$ だが, $f_n \not\to 0$ in $L^2(0, \pi)$ である.

証明.
1. $f_n \rightharpoonup 0$ weakly in $L^2(0, \pi)$ を示す. そのためには, 任意の $v \in L^2(0, \pi)$ に対して, $(f_n, v)_{L^2(0,\pi)} \to 0 (= (0, v)_{L^2(0,\pi)})$ を示せばよい. Bessel の不等式より

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f_n, v)_{L^2(0,\pi)}|^2 \le \frac{\pi}{2} \|v\|_{L^2(0,\pi)}^2 \tag{9.2}$$

だから, 特に (9.2) の左辺の級数は収束する. 従って $(f_n, v)_{L^2(0,\pi)} \to 0 \quad (n \to \infty)$ がわかる.

2. $f_n \not\to 0$ in $L^2(0,\pi)$ であることを示す. $\|f_n\|^2_{L^2(0,\pi)} \not\to 0$ を示せばよい. 倍角公式より

$$\|f_n\|^2_{L^2(0,\pi)} = \int_0^\pi \sin^2(nx)\,dx = \int_0^\pi \frac{1-2\cos(2nx)}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

となり, $\|f_n\|^2_{L^2(0,\pi)} \not\to 0$ となることがわかる. □

例 9.2 (goes up to spout)**.**

$n \in \mathbb{N}$ に対し, $f_n : (-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ を $f_n(x) := \sqrt{\dfrac{n}{1+n^2x^2}}$ $(-\pi < x < \pi)$ で定める. このとき, $f_n \rightharpoonup 0$ weakly in $L^2(-\pi,\pi)$ だが, $f_n \not\to 0$ in $L^2(-\pi,\pi)$ である.

証明.

1. $f_n \not\to 0$ in $L^2(-\pi,\pi)$ であることを示す. 変数変換 $y = nx$ より

$$\|f_n\|^2_{L^2(0,\pi)} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{n}{1+n^2x^2}\,dx = \int_{-n\pi}^{n\pi} \frac{1}{1+y^2}\,dy = 2\arctan(n\pi) \not\to 0$$

となり, $\|f_n\|^2_{L^2(0,\pi)} \not\to 0$ となることがわかる.

2. $f_n \rightharpoonup 0$ weakly in $L^2(-\pi,\pi)$ を示す. $v \in L^2(-\pi,\pi)$ と $\varepsilon > 0$ に対して

$$(9.3)\quad (f_n, v)_{L^2(-\pi,\pi)} = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_n(x)v(x)\,dx + \int_{(-\pi,\pi)\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} f_n(x)v(x)\,dx =: I_1 + I_2$$

とおく. I_1 は変数変換 $y = nx$ と Hölder の不等式により

$$\begin{aligned}
|I_1|^2 &\le \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f_n|^2\,dx\right)\left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |v|^2\,dx\right) \\
&\le \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{n}{1+n^2x^2}\,dx\right)\left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |v|^2\,dx\right) \\
&\le \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+y^2}\,dy\right)\left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |v|^2\,dx\right) = \pi\left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |v|^2\,dx\right)
\end{aligned}$$

と評価しておく. 他方, $|x| \ge \varepsilon$ に対して $f_n(x) \le \sqrt{\dfrac{n}{1+n^2\varepsilon^2}}$ より Hölder の不等式から

$$|I_2|^2 \le \frac{n}{1+n^2\varepsilon^2}\left(\int_{(-\pi,\pi)\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} |v(x)|\,dx\right)^2 \le \frac{2\pi n}{1+n^2\varepsilon^2}\int_{(-\pi,\pi)} |v(x)|^2\,dx$$

と評価できるので, $|I_2| \to 0\ (n \to \infty)$ が得られる. 従って, (9.3) で絶対値をとって, 両辺 n について上極限をとると

(9.4)
$$\limsup_{n\to\infty} |(f_n, v)_{L^2(-\pi,\pi)}| \le \sqrt{\pi}\left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |v|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |v|^2\chi_{(-\varepsilon,\varepsilon)}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

となる[8]. $\varepsilon \downarrow 0$ とすると, $||v|^2\chi_{(-\varepsilon,\varepsilon)}| \le |v|^2$ であり, $|v|^2$ は Lebesgue 可積分かつ, $|v|^2\chi_{(-\varepsilon,\varepsilon)} \to 0$ ($\varepsilon \downarrow 0$, 各点収束) だから, Lebesgue の優収束定理を用いて, 積分と極限の順序の交換ができる. (9.4) の左辺が ε に依らないことに注意すれば

$$\limsup_{n\to\infty} |(f_n, v)_{L^2(-\pi,\pi)}| \le \sqrt{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} |v|^2\chi_{(-\varepsilon,\varepsilon)}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \to \sqrt{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} 0\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

つまり, $\limsup_{n\to\infty} |(f_n, v)_{L^2(-\pi,\pi)}| \le 0$ が得られる[9]. 下極限についての自明な不等式 $0 \le \liminf_{n\to\infty} |(f_n, v)_{L^2(-\pi,\pi)}|$ より $(f_n, v)_{L^2(-\pi,\pi)} \to 0\ (n \to \infty)$ がわかる. □

例 9.3 (wanders off to infinity)**.**
$n \in \mathbb{N}$ に対して, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f_n = \chi_{(n,n+1)}$ と定める. このとき, $f_n \rightharpoonup 0$ weakly in $L^2(\mathbb{R})$ だが, $f_n \not\to 0$ in $L^2(\mathbb{R})$ である.

証明.
1. $f_n \not\to 0$ in $L^2(\mathbb{R})$ は, $\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_n^{n+1} dx = 1 \not\to 0$ よりわかる.
2. $f_n \rightharpoonup 0$ weakly in $L^2(\mathbb{R})$ を示す. $v \in L^2(\mathbb{R})$ に対して Hölder の不等式より

$$|(f_n, v)_{L^2(\mathbb{R})}| = \left|\int_n^{n+1} v\,dx\right| \le \left(\int_n^{n+1} |v|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\mathbb{R}} |v|^2\chi_{(n,n+1)}\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

となる. $||v|^2\chi_{(n,n+1)}| \le |v|^2$ であり, $|v|^2$ は Lebesgue 可積分, かつ $|v|^2\chi_{(n,n+1)} \to 0$ ($n \to \infty$, 各点収束) より, Lebesgue の優収束定理から極限と積分の順序交換ができて

$$|(f_n, v)_{L^2(\mathbb{R})}| \le \left(\int_{\mathbb{R}} |v|^2\chi_{(n,n+1)}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \to \left(\int_{\mathbb{R}} 0\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

が得られる. □

---

[8]左辺は収束するかわからないので, 上極限はとれるが極限はとれない. また, $\chi_{(-\varepsilon,\varepsilon)}$ は $(-\varepsilon,\varepsilon)$ に関する特性関数, すなわち, $\chi_{(-\varepsilon,\varepsilon)}(x) = \begin{cases} 1 & x \in (-\varepsilon,\varepsilon) \\ 0 & x \notin (-\varepsilon,\varepsilon) \end{cases}$ である.

[9]正確には, $\varepsilon_j \downarrow 0$ となる可算列をとる.

上記の例 9.1, 9.2, 9.3 において, いずれの場合も $\|f_n\|$ は 0 でない一定の値をとるのに対して, $f_n \rightharpoonup 0$ であった. つまり, 一般的に $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ が $x \in H$ に弱収束したとしても $\|x_n\|_H \not\to \|x\|_H$ である. あらっぽくいうと, 例 9.1 での $\|f_n\|_{L^2(0,\pi)}$ は激しく振動して消えてしまい, 例 9.2 での $\|f_n\|_{L^2(-\pi,\pi)}$ は原点に集中し, 例 9.3 での $\|f_n\|_{L^2(\mathbb{R})}$ は遠方にさってしまう. したがって, $\|x_n\|_H \to \|x\|_H$ とはできないのだが, 一方で下極限に関する次の結果が得られる.

定理 9.1 (ノルムの弱下半連続性)**.**
$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ が $x \in H$ に弱収束するならば

$$\|x\|_H \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_H \tag{9.5}$$

が成り立つ.

証明.
$\|x\|_H = 0$ のときは自明なので, $\|x\|_H \neq 0$ としてよい. Schwarz の不等式より

$$|(x_n, x)_H| \leq \|x_n\|_H \|x\|_H$$

となるので, 両辺 $n \to \infty$ について下極限をとると, $x_n \rightharpoonup x$ weakly in H より

$$\|x\|_H^2 \leq \|x\|_H \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$$

が得られる. $\|x\|_H$ で両辺を割れば (9.5) が得られる. □

有限次元では, Bolzano-Weierstrass の定理により, 有界閉集合と点列コンパクトが同値であった. しかし, 無限次元ではこの事実は同値にならない. 上記の例 9.1, 9.2, 9.3 から有界閉集合と点列コンパクトが同値にならないことがわかる. 実際に $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は どのように部分列を取ったとしても強収束しない[10]. では弱収束についてはどうであろうか？このことについては, 次の「弱収束のコンパクト性定理」が知られている.

定理 9.2 (Banach-Alaoglu の定理 (弱コンパクト性))**.**
$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ が H 上の有界列であったとする. このとき, ある部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して, $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ は $x \in H$ に弱収束する. すなわち

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \quad \text{weakly in } H \ (k \to \infty)$$

とできる.

[10] もし強収束する部分列があったとすると, その部分列が 0 に弱収束することに矛盾する.

Banach-Alaogluの定理が主張していることは, 有界閉集合は**弱点列コンパクト**であるということである. 一般にHilbert空間の点列がCauchy列であることを示すのは難しい. そこで, 点列が有界であることを示して, 収束部分列の議論をすることが多いが[11], 無限次元線形空間で同様の議論を強収束ですることはできない. そこで, **位相を弱くした**弱収束におきかえて, 微分積分学で学んだ手法が使えないかを考える. これが関数解析学が「無限次元の微分積分学」と呼ばれるゆえんでもある.

弱収束する点列がいつ強収束するか？は重要な問題であるが, ここの講義ではこれ以上触れない. 弱収束する点列を強収束する点列にうつす線形作用素について, 紹介するにとどめる.

定義 9.2 (コンパクト作用素, 完全連続作用素)**.**
Hilbert空間 H, H' に対し, 線形作用素 $T : D \subset H \to H'$ が**コンパクト作用素**もしくは**完全連続作用素**であるとは, 任意の $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ に対して $x_n \rightharpoonup x$ weakly in H $(n \to \infty)$ ならば, $Tx_n \to Tx$ strongly in H' $(n \to \infty)$ をみたすことをいう[12].

$x_n \to x$ in H $(n \to \infty)$ であれば, 連続な作用素であるが, コンパクト作用素は $x_n \rightharpoonup x$ weakly in H しか仮定していない. 強収束する点列は弱収束することから, コンパクト作用素は連続作用素 (有界作用素) である. 有界作用素のなかでさらに性質がよい作用素をコンパクト作用素として定義したのである.

10. 共役作用素

$A \in M_n(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, {}^tA\boldsymbol{y})$ であった. 特に, A が対称行列, すなわち $A = {}^tA$ であれば $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{y})$ であった.

命題 10.1.
$A, B \in M_n(\mathbb{R})$ は任意の $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, B\boldsymbol{y}) \tag{10.1}$$

をみたすとする. このとき, $B = {}^tA$ となる.

証明.
$1 \le i.j \le n$ に対して, $\boldsymbol{x} := \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{y} := \boldsymbol{e}_j$ とおく. $A = (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n) = (a_{ij})_{i,j}$, $B = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n) = (b_{ij})_{i,j}$ と書くと $\boldsymbol{a}_k = (a_{ik})_i$ であり

$$A\boldsymbol{e}_i = (\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_n)\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{a}_i$$

[11] 微分積分学AでBolzano-Weierstrassの定理を何度も使っていることに注意してほしい.
[12] この定義は H が回帰的でない場合はこの定義は妥当ではない.

であることから, (10.1) に代入すると

$$(A\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{e}_j) = a_{ji}, \quad (\boldsymbol{e}_i, B\boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{b}_j) = b_{ij},$$

となるので, $b_{ij} = a_{ji}$ となるから, $B = {}^tA$ がわかる. □

このことから, 転置行列の性質は (10.1) が重要である. そこで, この性質を無限次元線形空間に拡張する.

定義 10.1 (共役作用素, 自己共役作用素).
Hilbert 空間 H 上の有界作用素 $A \in \mathscr{L}(H)$ に対して

$$(Au, v)_H = (u, A^*v)_H \quad (u, v \in H)$$

をみたす $A^* \in \mathscr{L}(H)$ を A の**共役作用素**という. さらに, $A = A^*$ をみたす作用素 A を**自己共役作用素**という.

自己共役作用素がどのくらい重要かを, 有限次元である転置行列の場合で説明する. $A \in M_n(\mathbb{R})$ が対称行列のとき, A の固有値はすべて実数である (演習). さらに, 固有値は重複をこめてちょうど n 個あり, A はユニタリ行列 U (すなわち $UU^* = U^*U = I$) で対角化できる. この行列 U の求め方は, 固有ベクトルをもとめて, Schmidt の直交化を行うことで学んだはずである. これだけをみても, 自己共役作用素はかなり性質のよい作用素であることがわかるだろう.
さらに, 固有値を小さい順に $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ とならべると,

$$A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \ldots + \lambda_n P_n$$

とスペクトル分解できる. ここで, P_i は固有値 λ_i に対する固有空間 W_i への射影行列である. 同様な分解が自己共役作用素も可能であることが知られている.

例 10.1 (Fourier 変換の共役作用素).
$f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ に対して

$$(\mathscr{F}f)(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi}\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}$$
$$(\mathscr{F}^{-1}f)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{ix\xi}\, d\xi, \quad x \in \mathbb{R}$$

であった. $f, g \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ より, Fubini の定理から

$$\begin{aligned}(\mathscr{F}f, g)_{L^2(\mathbb{R})} &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi}\, dx \right) \overline{g(\xi)}\, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\overline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi} \right) dx = (f, \mathscr{F}^{-1}g)_{L^2(\mathbb{R})}\end{aligned}$$

となる (複素数値関数のため, 複素共役に注意). つまり, $\mathscr{F}^* = \mathscr{F}^{-1}$ となる.

11. Banach 空間への一般化

Hilbert 空間 H と $x \in H$ に対して, $\|x\|_H^2 = (x, x)_H$ であった. ところで, 今までの議論で, 実は内積をまったく使わずに, $\|x\|_H$ のみで議論している箇所があった. 例えば, §6 線形作用素や, 定理 7.1 の証明では, 内積の性質はまったく使っておらず, $\|x\|_H$ の性質しか使っていなかった.

Hilbert 空間 H のノルム $\|\cdot\|_H$ について, 定義 1.1 を用いると, 次が成り立つことがわかる.

- 任意の $x \in H$ に対して $\|x\|_H \geq 0$.
- 任意の $x \in H$ に対して $\|x\|_H = 0$ と $x = 0$ は同値.
- 任意の $x \in H$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, $\|\alpha x\|_H = |\alpha| \|x\|_H$.
- 任意の $x, y \in H$ に対して, $\|x + y\|_H \leq \|x\|_H + \|y\|_H$ (三角不等式).

これらの性質をもとに, Hilbert 空間の一般化であるノルム空間と Banach 空間を定義する.

定義 11.1 (ノルム空間)**.**
線形空間 X が**ノルム空間**であるとは, $x \in X$ に対して次の 4 条件をみたす実数 $\|x\|_X \in \mathbb{R}$ が定められているときをいう.

- 任意の $x \in X$ に対して $\|x\|_X \geq 0$.
- 任意の $x \in X$ に対して $\|x\|_X = 0$ と $x = 0$ は同値.
- 任意の $x \in X$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, $\|\alpha x\|_X = |\alpha| \|x\|_X$.
- 任意の $x, y \in X$ に対して, $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X$ (三角不等式).

このとき, $\|x\|_X$ を $x \in X$ の**ノルム**という.

定義 11.2 (Banach 空間)**.**
ノルム空間 X が **Banach 空間**であるとは, $x, y \in X$ に対して, 距離 $d(x, y) := \|x - y\|_X$ を定めたときに, X がこの距離 d について完備であることをいう.

例 11.1.
$1 \leq p < \infty$ に対して, l^p は Banach 空間になる. 演習問題 3.1 を参照せよ. また, $L^p(0, \pi)$ も Banach 空間になることが知られている.

例 11.2.
$C([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R}, [0,1]$ 上連続 $\}$, $f \in C([0,1])$ に対して

$$\|f\|_{C([0,1])} := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

で定めると, $C([0,1])$ は Banach 空間となる.

証明の方針.

1. $C([0,1])$ がノルム空間であることを示す．三角不等式のみ示す．$f, g \in C([0,1])$ と $x \in [0,1]$ に対して

$$\begin{aligned}|f(x)+g(x)| &\le |f(x)|+|g(x)| \\ &\le \sup_{x\in[0,1]}|f(x)| + \sup_{x\in[0,1]}|g(x)| = \|f\|_{C([0,1])} + \|g\|_{C([0,1])}\end{aligned}$$

となるから, $\|f\|_{C([0,1])} + \|g\|_{C([0,1])}$ が $x \in [0,1]$ に依存しないことに注意して, $x \in [0,1]$ について上限をとると

$$\sup_{x\in[0,1]}|f(x)+g(x)| \le \|f\|_{C([0,1])} + \|g\|_{C([0,1])}$$

となるから, $\|f+g\|_{C([0,1])} \le \|f\|_{C([0,1])} + \|g\|_{C([0,1])}$ がわかる．

2. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C([0,1])$ が Cauchy 列, すなわち, すべての $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n, m \in \mathbb{N}$ に対して, $n, m \ge N$ ならば $\|f_n - f_m\|_{C([0,1])} < \varepsilon$ をみたすとする．このとき, $x \in [0,1]$ に対して,

$$\big||f_n(x)| - |f_m(x)|\big| \le \|f_n - f_m\|_{C([0,1])}$$

に注意して, $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ が収束する (関数列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が各点収束する) ことを示す．そこで, 各点収束極限を f と書く

3. $\sup_{x\in[0,1]}|f(x)| < \infty$ を示す．これは, $\{\|f_n\|_{C([0,1])}\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}$ 上の Cauchy 列になることから従う．補題 2.1 を参照せよ．

4. $\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x) - f(x)| \to 0$ $(n \to \infty)$ を示す．**2.** で $m \to \infty$ とすると, 十分大きなすべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$ が得られるので, $\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x) - f(x)| \to 0$ $(n \to \infty)$ が得られる．つまり, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に $[0,1]$ 上一様収束することがわかる．

5. $f \in C([0,1])$ を示す, つまり f が $[0,1]$ 上連続であることを示す．そのためには, 十分大きな $N \in \mathbb{N}$ と, $x, y \in [0,1]$ に対して, **4.** から $\sup_{x\in[0,1]}|f_N(x) - f(x)| \le \varepsilon$ とできるので,

$$\begin{aligned}|f(x)-f(y)| &\le |f(x)-f_N(x)| + |f_N(x)-f_N(y)| + |f_N(y)-f(y)| \\ &\le 2\varepsilon + |f_N(x)-f_N(y)|\end{aligned}$$

と評価できることを使う．**4.** の結果と組みあわせると, $\|f_n - f\|_{C([0,1])} \to 0$ $(n \to \infty)$ がわかる． □

例 11.3.

$L^{\infty}(0,1) := \{f : (0,1) \to \mathbb{R}, \text{Lebesgue 可測}, \operatorname*{esssup}_{x\in(0,1)}|f(x)| < \infty\}$ とおく．

$f \in L^\infty(0,1)$ に対して

$$\|f\|_{L^\infty(0,1)} := \operatorname*{esssup}_{x\in(0,1)} |f(x)|$$

と定めると, $L^\infty(0,1)$ は $\|\cdot\|_{L^\infty(0,1)}$ をノルムとする Banach 空間になる．証明は例 11.2 とほぼ同様である．

Banach 空間における弱収束の定義は, 各自調べることを演習問題とする．なお, 演習問題 11.2 が役に立つであろう．Hilbert 空間における弱収束におけるコンパクト性定理は, Banach 空間では次のように一般化される．

定理 11.1 (Banach-Alaoglu の定理 (弱コンパクト性))**.**
X を **回帰的** Banach 空間で, $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ が X 上の有界列であったとする．このとき, ある部分列 $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{x_n\}_{n=1}^\infty$ が存在して, $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ は $x \in X$ に弱収束する．すなわち

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \quad \text{weakly in } X \ (k \to \infty)$$

とできる．

Banach 空間における弱コンパクト性は**回帰的**であることが一般に必要である．回帰的とは $X = X^{**}$ をみたすことであった．Hilbert 空間はつねに回帰的であるが, 回帰的でない Banach 空間が存在する．Banach 空間の共役空間と回帰的か否かについて紹介するに留める．

例 11.4.
$1 < p < \infty$ に対して, $(l^p)^*$ と l^q は線形同型かつ位相同型になる．ここで, $1 < q < \infty$ は $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ をみたす指数である．このことから

$$(l^p)^{**} = ((l^p)^*)^* = (l^q)^* = l^p$$

となるので, l^p は $1 < p < \infty$ において回帰的である．なお, l^p を Lebesgue 空間 $L^p(0,1)$ にかえても同様の結果が成り立つ．

例 11.5.
$(L^1(0,1))^*$ と $L^\infty(0,1)$ は線形同型かつ位相同型になるが, $(L^\infty(0,1))^*$ と $L^1(0,1)$ は同型にはならない．したがって,

$$(L^1(0,1))^{**} = ((L^1(0,1))^*)^* = (L^\infty(0,1))^* \neq L^1(0,1)$$

となるので, $L^1(0,1)$ は 回帰的ではない．同様にして, $L^\infty(0,1)$ も回帰的ではない．それゆえに, 一見扱いやすそうにみえる $L^1(0,1)$ や $L^\infty(0,1)$ は Banach-Alaoglu の定理がそのままでは使えないことがあいまって, 簡単な空間ではない．

12. 微分方程式の解法

次の常微分方程式の可解性を考える.

$$
\begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in (-1,1) \\ u(x) = 0, & x = \pm 1. \end{cases} \tag{12.1}
$$

(12.1) を考えるうえで, テスト関数と呼ばれる都合のよい関数を定義する. 連続関数 $\phi : (-1,1) \to \mathbb{R}$ に対して

$$
\operatorname{supp}\phi := \overline{\{x \in (-1,1) : \phi(x) \neq 0\}}
$$

と定める. $x \notin \operatorname{supp}\phi$ に対して, $r > 0$ が存在して, $|y-x| < r$ ならば $\phi(y) = 0$ となることに注意する. さらに

$$
C_0^\infty(-1,1) := \{\phi \in C^\infty(-1,1) : \operatorname{supp}\phi \subset (-1,1)\}
$$

と定める. とくに $\operatorname{supp}\phi$ は閉集合, $(-1,1)$ は開集合だから, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して $\phi^{(k)}(\pm 1) = 0$ となることに注意する.

さて, 任意の $\phi \in C_0^\infty(-1,1)$ に対して, ϕ を (12.1) にかけて $x \in (-1,1)$ について積分すると, 部分積分と $\phi(\pm 1) = 0$ より

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= -\int_{-1}^{1} u''(x)\phi(x)\,dx \\
&= -\Big[u'(x)\phi(x)\Big]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} u'(x)\phi'(x)\,dx = \int_{-1}^{1} u'(x)\phi'(x)\,dx
\end{aligned}
$$

となるので

$$
\int_{-1}^{1} u'(x)\phi'(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\phi(x)\,dx \tag{12.2}
$$

が得られる. (12.2) を用いて (12.1) の解を与えよう. そのために (12.2) 式を一般化して, 弱微分を定義する.

定義 12.1 (弱微分)**.**
$v \in L^2(-1,1)$ が $u \in L^2(-1,1)$ の**弱微分**であるとは, 任意の $\phi \in C_0^1(-1,1)$ に対して

$$
\int_{-1}^{1} v(x)\phi(x)\,dx = (-1)\int_{-1}^{1} u(x)\phi'(x)\,dx
$$

をみたすことをいう. このとき, $Du = v$ と書く.

例 12.1.

$|x|$ は $x = 0$ で微分できない．しかし，$H(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ で定めると $H \in L^2(-1,1)$ であり，任意の $\phi \in C_0^1(-1,1)$ に対して

$$
\begin{aligned}
(-1)\int_{-1}^{1} |x|\phi'(x)\,dx &= -\int_{-1}^{0} |x|\phi'(x)\,dx - \int_{0}^{1} |x|\phi'(x)\,dx \\
&= \int_{-1}^{0} x\phi'(x)\,dx - \int_{0}^{1} x\phi'(x)\,dx \\
&= -\int_{-1}^{0} \phi(x)\,dx + \int_{0}^{1} \phi(x)\,dx = \int_{-1}^{0} H(x)\phi(x)\,dx
\end{aligned}
$$

となる，従って，$|x|$ の弱微分は H，すなわち，$D(|x|) = H(x)$ となる．

定義 12.2 (Sobolev 空間)**.**

Sobolev 空間 $H^1(-1,1)$ を

$$
\begin{aligned}
&H^1(-1,1) := \{ f \in L^2(-1,1) : f \text{ の弱微分 } Df \in L^2(-1,1) \text{ が存在する } \} \\
&\|f\|_{H^1(-1,1)} := \sqrt{\|f\|^2_{L^2(-1,1)} + \|Df\|^2_{L^2(-1,1)}}
\end{aligned}
$$

で定める．$H_0^1(-1,1)$ を $C_0^\infty(-1,1)$ の $H^1(-1,1)$ ノルムでの完備化で定める．

注意 12.1.

$H_0^1(-1,1) = \overline{C_0^\infty(-1,1)}^{H^1(-1,1)}$ が成り立つ．つまり，$H_0^1(-1,1)$ は $C_0^\infty(-1,1)$ の $H^1(-1,1)$ ノルムに関する閉包である．$u \in H_0^1(-1,1)$ であるということは，弱微分ができて，$u(\pm 1) = 0$ が弱い意味で成り立っているということである．

これらの準備のもとで，(12.1) の弱解を定義する．

定義 12.3 (弱解)**.**

u が (12.1) の弱解であるとは，$u \in H_0^1(-1,1)$ であり，任意の $\phi \in C_0^\infty(-1,1)$ に対して

$$
\int_{-1}^{1} Du(x)\cdot D\phi(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\phi(x)\,dx
$$

が成り立つことをいう．

定理 12.1.

$f \in L^2(-1,1)$ に対して，(12.1) の弱解 $u \in H_0^1(-1,1)$ が存在する．

12.1. **Riesz の表現定理を用いた証明.** Riesz の表現定理を用いる. そのためには, $H_0^1(-1,1)$ が Hilbert 空間であることを示す必要がある.

定理 12.2.
$u, v \in H_0^1(-1,1)$ に対して

$$(u,v)_{H_0^1(-1,1)} := (Du, Dv)_{L^2(-1,1)} = \int_{-1}^{1} Du(x) \cdot Dv(x)\,dx$$

は $H_0^1(-1,1)$ の内積となる.

定理 12.2 の証明で自明でないのは「$(u,u)_{H_0^1(-1,1)} = 0$ ならば $u = 0$ となること」である. $(u,u)_{H_0^1(-1,1)} = 0$ からわかることは $\int_{-1}^{1} |Du(x)|^2\,dx = 0$ だから, $Du = 0$ はわかるが, $u = 0$ が直ちにわかるわけではない (u は 0 でない定数関数かもしれない). 一方, $u(\pm 1) = 0$ が弱い意味で成り立つことから, $u = 0$ であるべきでもある. このことを証明するために次の不等式が有用である.

定理 12.3 (Poincare の不等式)**.**
ある定数 $C_P > 0$ が存在して, 任意の $u \in H_0^1(-1,1)$ に対して,

$$\int_{-1}^{1} |u(x)|^2\,dx \le C_P^2 \int_{-1}^{1} |Du(x)|^2\,dx \tag{12.3}$$

が成り立つ.

定理 12.1 の証明.
$f \in L^2(-1,1)$ と $v \in H_0^1(-1,1)$ に対して Schwarz の不等式と Poincare の不等式より

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)v(x)\,dx \right| \le \|f\|_{L^2(-1,1)} \|v\|_{L^2(-1,1)} \le C_P \|f\|_{L^2(-1,1)} \|v\|_{H^1(-1,1)}$$

となることから, $H_0^1(-1,1) \ni v \mapsto \int_{-1}^{1} f(x)v(x)\,dx$ は $H_0^1(-1,1)$ 上の有界線形汎関数となることがわかる. 従って, Riesz の表現定理 (定理 8.2) より, ある $u \in H_0^1(-1,1)$ が存在して, 任意の $\phi \in C_0^\infty(-1,1)$ に対して

$$(u,\phi)_{H_0^1(-1,1)} = \int_{-1}^{1} f(x)\phi(x)\,dx$$

とできる. $(u,\phi)_{H_0^1(-1,1)} = \int_{-1}^{1} Du(x) \cdot D\phi(x)\,dx$ だから, u が (12.1) の弱解となる. □

12.2. **変分法を用いた証明.** 定理 12.1 を別の方法を用いて証明してみよう. 考える方程式は

$$
(12.1)\qquad \begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in (-1,1) \\ u(x) = 0, & x = \pm 1. \end{cases}
$$

である. $u \in H_0^1(-1,1)$ に対してエネルギー

$$
(12.4)\qquad E(u) := \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2}|Du(x)|^2 - f(x)u(x) \right) dx
$$

を考える. $u \in H_0^1(-1,1)$ が $E(u) = \inf_{v \in H_0^1(-1,1)} E(v)$ をみたすとすると, すべての $t \in \mathbb{R}$, $\phi \in C_0^\infty(-1,1)$ に対して, $\frac{d}{dt}E(u+t\phi)\Big|_{t=0} = 0$ となるはずである.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(u+t\phi) &= \frac{d}{dt}\int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2}|D(u+t\phi)(x)|^2 - f(x)(u(x)+t\phi(x)) \right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}|D(u+t\phi)(x)|^2 - f(x)(u(x)+t\phi(x)) \right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} \left((Du(x) + tD\phi(x)) \cdot D\phi(x) - f(x)\phi(x) \right) dx
\end{aligned}
$$

となることから, $\frac{d}{dt}E(u+t\phi)\Big|_{t=0} = 0$ より

$$
\int_{-1}^{1} \left(Du(x) \cdot D\phi(x) - f(x)\phi(x) \right) dx = 0,
$$

つまり, u は (12.1) の弱解になることがわかる. 問題は, 「$u \in H_0^1(-1,1)$ が $E(u) = \inf_{v \in H_0^1(-1,1)} E(v)$ をみたすとする」が本当に成り立つのか, すなわち, 下限 $\inf_{v \in H_0^1(-1,1)} E(v)$ は最小値 $\min_{v \in H_0^1(-1,1)} E(v)$ におきかえることができるのか？ということである. この下限が最小になることを証明しよう. すなわち,

定理 12.4.
ある $u \in H_0^1(-1,1)$ が存在して, $E(u) = \inf_{v \in H_0^1(-1,1)} E(v)$ となる. すなわち, $\inf_{v \in H_0^1(-1,1)} E(v)$ は最小になる. さらに, u は (12.1) の弱解になる.

証明.
1. 下限の定義より, ある $\{u_j\}_{j=1}^\infty \subset H_0^1(-1,1)$ が存在して, $E(u_j) \to \inf_{v \in H_0^1(-1,1)} E(v)$ $(j \to \infty)$ とできる. Schwarz の不等式と Poincare の不等式,

相加相乗平均の不等式 (または Young の不等式) から

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}|Du_j(x)|^2\,dx &= E(u_j)+\int_{-1}^{1}f(x)u_j(x)\,dx\\ &\le E(u_j)+\|f\|_{L^2(-1,1)}\|u_j\|_{L^2(-1,1)}\\ &\le E(u_j)+C_P\|f\|_{L^2(-1,1)}\|Du_j\|_{L^2(-1,1)}\\ &\le E(u_j)+\frac{1}{4}\|Du_j\|^2_{L^2(-1,1)}+C_P^2\|f\|^2_{L^2(-1,1)}\end{aligned}$$

となることから

$$\|u_j\|^2_{H^1_0(-1,1)}=\int_{-1}^{1}|Du_j(x)|^2\,dx\le 4E(u_j)+4C\|f\|^2_{L^2(-1,1)}$$

が得られる．よって, $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ は $H^1_0(-1,1)$ 上の有界列となる．よって, Banach-Alaoglu の定理より, ある $\{u_{j_k}\}_{k=1}^{\infty}\subset\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ と $u\in H^1_0(-1,1)$ が存在して $u_j\rightharpoonup u$ weakly in $H^1_0(-1,1)$ $(k\to\infty)$ とできる．以下, $u_k=u_{j_k}$ とおきかえる．

2. ノルムの弱下半連続性より $\|u\|_{H^1_0(-1,1)}\le\liminf_{k\to\infty}\|u_k\|_{H^1_0(-1,1)}$ となる．また, $v\in H^1_0(-1,1)\mapsto\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)v(x)\,dx$ は有界線形汎関数になる．実際に Schwarz の不等式と Poincare の不等式から

$$\left|\int_{-1}^{1}f(x)v(x)\,dx\right|\le\|f\|_{L^2(-1,1)}\|v\|_{L^2(-1,1)}\le C_P\|f\|_{L^2(-1,1)}\|v\|_{H^1_0(-1,1)}$$

が得られる．このことから

$$\begin{aligned}\liminf_{k\to\infty}E(u_j)&=\liminf_{k\to\infty}\left(\frac{1}{2}\|u_k\|^2_{H^1_0(-1,1)}-\int_{-1}^{1}f(x)u_k(x)\,dx\right)\\ &\ge\liminf_{k\to\infty}\frac{1}{2}\|u_k\|^2_{H^1_0(-1,1)}+\liminf_{k\to\infty}\left(-\int_{-1}^{1}f(x)u_k(x)\,dx\right)\\ &\ge\frac{1}{2}\|u\|^2_{H^1_0(-1,1)}-\int_{-1}^{1}f(x)u(x)\,dx=E(u)\ge\inf_{v\in H^1_0(-1,1)}E(v)\end{aligned}$$

となることと, $\liminf_{k\to\infty}E(u_j)=\inf_{v\in H^1_0(-1,1)}E(v)$ から, $E(u)=\inf_{v\in H^1_0(-1,1)}E(v)$ となることがわかる．

□

さて, 定理 12.2 で得られた弱解と定理 12.4 で得られた弱解は作り方が違うだけで, 実は同じもであることを示す．すなわち

定理 12.5.

$u, v \in H_0^1(-1,1)$ が (12.1) の弱解であれば, 殆んどすべての $x \in (-1,1)$ に対して $u(x) = v(x)$ が成り立つ.

証明.

$w := u - v$ とおく. すると, 任意の $\phi \in C_0^\infty(-1,1)$ に対して

$$\int_{-1}^{1} Dw(x) \cdot D\phi(x)\, dx = 0$$

が成り立つ. $w = u - v \in H_0^1(-1,1)$ より, $\{w_j\}_{j=1}^\infty \subset C_0^\infty(-1,1)$ が存在して, $w_j \to w$ in $H_0^1(-1,1)$ が成り立つから, $\phi = w_j$ として

$$\int_{-1}^{1} Dw(x) \cdot Dw_j(x)\, dx = 0$$

となる. $j \to \infty$ とすれば

$$\int_{-1}^{1} |Dw(x)|^2\, dx = 0$$

となるから $\|w\|_{H_0^1(-1,1)}^2 = 0$, すなわち $w = 0$ が得られる. □

定理 12.2, 12.4 のどちらにおいても, Poincare の不等式 (定理 12.3) が重要な役割を果たした. 最後に, 定理 12.3 の証明を述べる.

定理 12.3 の証明.

$u \in C_0^\infty(-1,1)$ に対して, $x \in \mathbb{R} \setminus (-1,1)$ のときは $u(x) = 0$ として, u を $\mathbb{R}$ 上の関数に拡張しておく. すると, $-1 < x < 1$ に対して, 三角不等式と Schwarz の不等式より

$$|u(x)| = \left| \int_{-1}^{x} u'(\xi)\, d\xi \right| \le \int_{-1}^{x} |u'(\xi)|\, d\xi \le \sqrt{2} \left(\int_{-1}^{1} |u'(\xi)|^2\, d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

が得られる. この不等式を二乗して $-1 < x < 1$ で積分すれば

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} |u(x)|^2\, dx &\le 2 \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} |u'(\xi)|^2\, d\xi \right) dx \\ &= 4 \left(\int_{-1}^{1} |u'(\xi)|^2\, d\xi \right) = 4 \int_{-1}^{1} |u'(x)|^2\, dx, \end{aligned}$$

すなわち $C_P = 4$ とすることで Poincare の不等式が成り立つ. □

参考文献

[1] 伊藤 清三, ルベーグ積分入門, 裳華房, 1963.
[2] 黒田 成俊, 関数解析, 共立出版, 1980.
[3] 高村 多賀子, 関数解析入門, 朝倉書店 (復刊版), 2005.
[4] 斎藤 正彦, 線型代数入門, 東京大学出版会, 1966.
[5] 洲之内 治男, 改訂 関数解析入門, サイエンス社, 1995.
[6] 藤田 宏, 黒田 成俊, 伊藤 清三, 関数解析, 岩波書店, 1991.
[7] 前田 周一郎, 函数解析 POD 版, 森北出版, 2007.
[8] 増田 久弥, 関数解析, 裳華房, 1994.
[9] 松澤 忠人, 原 優, 小川 吉彦, 積分論と超関数論入門, 学術図書, 1997.
[10] 吉田 洋一, ルベグ積分入門, 筑摩書房, 2015.
[11] Brezis Haim 著, 藤田 宏, 小西 芳雄 訳, 関数解析–その理論と応用に向けて, 産業図書, 1988.
[12] Jurgen Jost 著, 小谷 元子 訳, ポストモダン解析学 原著第 3 版, 丸善出版, 2012.
[13] Haim Brezis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Springer, 2011.
[14] Jürgen Jost, Postmodern analysis, Third edition Springer, 2005.
[15] Elliott H. Lieb and Michael Loss, Analysis, Second edition, American Mathematical Society, 2001.