現代解析学 II 演習問題　(2016 年 9 月 20 日)

締切は 11 月 1 日 (火) の講義終了時とする．レポートは A4 用紙 (この紙と同じサイズ) を片面で利用し，必要に応じて，左上 1 箇所**のみ**をホチキスで止めること．ルーズリーフや印刷物の裏紙は利用しないこと．表紙はつけなくてもよい．鉛筆書きで構わない．氏名と学生番号の書き忘れは採点しない (出席扱いにもしない)．参考文献をつけること (この問題を解くにあたって，必要とした教科書等をすべて書く．著者，本の題名，出版社，出版年度を記載すること．下記の記載例も参考にせよ)．また，**出席システムで出席を確認する．出席の確認ができない学生は出席扱いとしないし，レポートも採点の対象にしない．**

問題 1.1.
l^2 が内積を持つ線形空間になることを示したい．

(1) $(\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in l^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し，$(\alpha\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in l^2$．つまり，スカラー倍が定義できることを示せ．
(2) $(\xi_k)_{k=1}^{\infty}$, $(\eta_k)_{k=1}^{\infty} \in l^2$ に対し，$(\xi_k+\eta_k)_{k=1}^{\infty} \in l^2$．つまり，和が定義できることを示せ．
(3) $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in l^2$ に対し，$(x,x)_{l^2} = 0$ ならば $x = 0$ となることを示せ．

参考文献

[1] 洲之内 治男，「関数解析入門」サイエンス社, 1995.
[2] 齋藤 正彦，「線型代数入門」, 東京大学出版会, 1966.

現代解析学 II 演習問題　(2016 年 9 月 27 日)

締切は 11 月 1 日 (火) の講義終了時とする．レポートは A4 用紙 (この紙と同じサイズ) を片面で利用し，必要に応じて，左上 1 箇所**のみ**をホチキスで止めること．ルーズリーフや印刷物の裏紙は利用しないこと．表紙はつけなくてもよい．鉛筆書きで構わない．氏名と学生番号の書き忘れは採点しない (出席扱いにもしない)．参考文献をつけること (この問題を解くにあたって，必要とした教科書等をすべて書く．著者，本の題名，出版社，出版年度を記載すること．下記の記載例も参考にせよ)．また，**出席システムで出席を確認する．出席の確認ができない学生は出席扱いとしないし，レポートも採点の対象にしない．**

問題 2.1.
線形空間 X に内積 $(\cdot,\cdot)_X$ が定義されているとき，

$$d(x,y) := \|x-y\|_X \quad (x, y \in X)$$

とおくと，$d(x,y)$ は x, y の距離となることを示せ．

参考文献

[1] 洲之内 治男，「関数解析入門」サイエンス社，1995.
[2] 齋藤 正彦，「線型代数入門」，東京大学出版会，1966.

現代解析学II 演習問題　(2016年10月11日)

締切は11月29日(火)の講義終了時とする．レポートはA4用紙(この紙と同じサイズ)を片面で利用し, 必要に応じて, 左上1箇所のみをホチキスで止めること．ルーズリーフや印刷物の裏紙は利用しないこと．表紙はつけなくてもよい．鉛筆書きで構わない．氏名と学生番号の書き忘れは採点しない(出席扱いにもしない)．参考文献をつけること(この問題を解くにあたって, 必要とした教科書等をすべて書く．著者, 本の題名, 出版社, 出版年度を記載すること)．また, **出席システムで出席を確認する．出席の確認ができない学生は出席扱いとしないし, レポートも採点の対象にしない．**

$1 \le p < \infty$ に対して

$$l^p := \left\{ x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) : \xi_k \in \mathbb{R}\ (k \in \mathbb{N}),\ \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p < \infty \right\}$$

と定義する．$x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in l^p$ に対して $\|x\|_{l^p} := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ と定める．

問題 3.1.

$x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$, $y = (\eta_k)_{k=1}^{\infty} \in l^p$ に対して三角不等式

$$\|x + y\|_{l^p} \le \|x\|_{l^p} + \|y\|_{l^p}$$

を示せ(ヒント: Hölderの不等式を使う．何もみずに証明するのはかなり大変)．

問題 3.2.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset l^p$ を l^p 上のCauchy列, すなわち, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, すべての $n, m \in \mathbb{N}$ に対して, $n, m \ge N$ ならば $\|x_n - x_m\|_{l^p} < \varepsilon$ をみたすとする．このとき, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は l^p 上の収束列であることをしめせ(ヒント: 定理2.1の証明とほとんど同じ)

現代解析学 II 演習問題　(2016 年 10 月 18 日)

締切は 11 月 29 日 (火) の講義終了時とする．レポートは A4 用紙 (この紙と同じサイズ) を片面で利用し，必要に応じて，左上 1 箇所**のみ**をホチキスで止めること．ルーズリーフや印刷物の裏紙は利用しないこと．表紙はつけなくてもよい．鉛筆書きで構わない．氏名と学生番号の書き忘れは採点しない (出席扱いにもしない)．参考文献をつけること (この問題を解くにあたって，必要とした教科書等をすべて書く．著者，本の題名，出版社，出版年度を記載すること)．また，**出席システムで出席を確認する．出席の確認ができない学生は出席扱いとしないし，レポートも採点の対象にしない．**

問題 4.1.

$1 < p, q < \infty$ は $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ をみたすとし，$f, g \in C(0,\pi)$ は $\displaystyle\int_0^\pi |f(x)|^p\,dx < \infty$, $\displaystyle\int_0^\pi |g(x)|^q\,dx < \infty$ をみたすとする．このとき

$$\left|\int_0^\pi f(x)g(x)\,dx\right| \le \left(\int_0^\pi |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^\pi |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

を示せ.

問題 4.2.

$L^2(0,\pi)$ が Hilbert 空間になることを示せ.

現代解析学 II 演習問題 (2016 年 10 月 25 日)

締切は 11 月 29 日 (火) の講義終了時とする．レポートは A4 用紙 (この紙と同じサイズ) を片面で利用し, 必要に応じて, 左上 1 箇所のみをホチキスで止めること．ルーズリーフや印刷物の裏紙は利用しないこと．表紙はつけなくてもよい．鉛筆書きで構わない．氏名と学生番号の書き忘れは採点しない (出席扱いにもしない)．参考文献をつけること (この問題を解くにあたって, 必要とした教科書等をすべて書く．著者, 本の題名, 出版社, 出版年度を記載すること)．また, **出席システムで出席を確認する．出席の確認ができない学生は出席扱いとしないし, レポートも採点の対象にしない．**

問題 5.1.
H を Hilbert 空間とし, $X \subset H$ とする．このとき, $X^\perp$ は閉部分空間となることを示せ．

問題 5.2.
H を Hilbert 空間とし, $X \subset H$ を閉凸集合とし,

$$\mathrm{dist}(z, X) := \inf_{x \in X} \|z - x\|_H \quad (z \in H)$$

とおく．このとき, 任意の $z \in H$ に対して, $x \in X$ が存在して, $\mathrm{dist}(z, X) = \|x - z\|_H$ となることを示せ (ヒント: 定理 3.1 の存在証明を真似する．凸性はどこで使うか？)．

現代解析学 II 演習問題　(2016 年 11 月 1 日)

締切は 11 月 29 日 (火) の講義終了時とする．レポートは A4 用紙 (この紙と同じサイズ) を片面で利用し, 必要に応じて, 左上 1 箇所**のみ**をホチキスで止めること．ルーズリーフや印刷物の裏紙は利用しないこと．表紙はつけなくてもよい．鉛筆書きで構わない．氏名と学生番号の書き忘れは採点しない (出席扱いにもしない)．参考文献をつけること (この問題を解くにあたって, 必要とした教科書等をすべて書く．著者, 本の題名, 出版社, 出版年度を記載すること)．また, **出席システムで出席を確認する．出席の確認ができない学生は出席扱いとしないし, レポートも採点の対象にしない．**

問題 6.1 (例 4.2 を少し複雑にしたもの)**.**

$L^2(-\pi,\pi)$ において, $\left\{\left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}},\ \left(\dfrac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\sin(nx),\ \left(\dfrac{1}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\cos(nx)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ が正規直交系であることを示せ (ヒント: 2016 年度の微積 B の演習問題 2.1 でほぼ同じ問題を出題している).

問題 6.2 (cf. 定理 4.1)**.**

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset H$ を正規直交系とするとき以下は同値となることを示せ.

(1) $H=\overline{\left\{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k : \alpha_k\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}\right\}}^{H}$.

(2) $x=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(x,x_k)_H x_k \quad (\forall x\in H)$

(3) (Perseval の等式) $\|x\|_H^2=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}|(x,x_k)_H|^2 \quad (\forall x\in H)$

(4) $\forall x\in H, \forall n\in\mathbb{N}$ に対して, $(x,x_n)_H=0$ ならば, $x=0$.

現代解析学 II 演習問題　(2016 年 11 月 15 日)

締切は 12 月 20 日 (火) の講義終了時とする．レポートは A4 用紙 (この紙と同じサイズ) を片面で利用し, 必要に応じて, 左上 1 箇所**のみ**をホチキスで止めること．ルーズリーフや印刷物の裏紙は利用しないこと．表紙はつけなくてもよい．鉛筆書きで構わない．氏名と学生番号の書き忘れは採点しない (出席扱いにもしない)．参考文献をつけること (この問題を解くにあたって, 必要とした教科書等をすべて書く．著者, 本の題名, 出版社, 出版年度を記載すること)．また, **出席システムで出席を確認する．出席の確認ができない学生は出席扱いとしないし, レポートも採点の対象にしない．**

問題 8.1.
講義中の例 6.1 の証明の細部を確認したい．以下, 話を簡単にするために, 考える関数 $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ は有界, 連続とする．

(1) $|\rho * f(x)| \leq \|\rho\|_{L^1(\mathbb{R})}^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\rho(x-y)||f(y)|^2 \, dy \right)^{\frac{1}{2}}$ を示せ．どのように Hölder の不等式を使ったかを説明せよ．

(2) $\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\rho(x-y)||f(y)|^2 \, dy \right) dx = \|\rho\|_{L^1(\mathbb{R})} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$ を示せ．どのように Fubini の定理 (積分の順序交換) をしたのか説明せよ．

問題 8.2 (Hausdroff-Young の不等式)**.**
$1 < p < \infty$ とする ($p = 1, \infty$ のときも下記の話は成立する)．$\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$\|\rho * f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

を $f, \rho \in C_0(\mathbb{R}^n)$ のときに示せ．ただし,

$$C_0(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \text{連続},\ \text{ある}\ R > 0\ \text{が存在して}\ f(x) = 0\ (x \in \mathbb{R}^n \text{かつ}\ |x| \geq R)\}$$

である．余裕があれば, $p, q, r \geq 1$ に対して, $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ であれば,

$$\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \tag{8.1}$$

を $f, g \in C_0(\mathbb{R}^n)$ のときに示せ．(8.1) の不等式を Hausdorff-Young の不等式という．

現代解析学II 演習問題　(2016年11月22日)

締切は12月20日(火)の講義終了時とする．レポートはA4用紙(この紙と同じサイズ)を片面で利用し，必要に応じて，左上1箇所**のみ**をホチキスで止めること．ルーズリーフや印刷物の裏紙は利用しないこと．表紙はつけなくてもよい．鉛筆書きで構わない．氏名と学生番号の書き忘れは採点しない(出席扱いにもしない)．参考文献をつけること(この問題を解くにあたって，必要とした教科書等をすべて書く．著者，本の題名，出版社，出版年度を記載すること)．また，**出席システムで出席を確認する．出席の確認ができない学生は出席扱いとしないし，レポートも採点の対象にしない．**

問題 9.1.

Hilbert空間 H と $a \in H$ に対して $f_a : H \to \mathbb{R}$ を $f_a(x) := (a, x)_H$ $(x \in H)$ で定める．

(1) f_a が線形写像であることを示せ.

(2) f_a が有界であることを示せ.

(3) $\|f_a\|_{H^*} = \|a\|_H$ となることを示せ.

現代解析学 II 演習問題　(2016 年 11 月 29 日)

締切は 12 月 20 日 (火) の講義終了時とする．レポートは A4 用紙 (この紙と同じサイズ) を片面で利用し, 必要に応じて, 左上 1 箇所**のみ**をホチキスで止めること．ルーズリーフや印刷物の裏紙は利用しないこと．表紙はつけなくてもよい．鉛筆書きで構わない．氏名と学生番号の書き忘れは採点しない (出席扱いにもしない)．参考文献をつけること (この問題を解くにあたって, 必要とした教科書等をすべて書く．著者, 本の題名, 出版社, 出版年度を記載すること)．また, **出席システムで出席を確認する．出席の確認ができない学生は出席扱いとしないし, レポートも採点の対象にしない．**

問題 10.1.

定理 8.1 をきちんと示すために, 次の問いに答えよ．

(1) $J : (\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}^n$ を $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ に対して

$$Jf := (f(\boldsymbol{e_1}), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n))$$

とおくと, $f, g \in (\mathbb{R}^n)^*$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$J(\alpha f + \beta g) = \alpha Jf + \beta Jg$$

となることを示せ.

(2) $J^* : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$ を, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$(J^{-1}\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x}) := (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$$

と定めるとき, $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ と $a \in \mathbb{R}^n$ に対して $(J^* \circ J)f = f$, $(J \circ J^*)a = a$ となることを示せ.

(3) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$J^{-1}(\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b})(\boldsymbol{x}) = (\alpha J^{-1}\boldsymbol{a} + \beta J^{-1}\boldsymbol{b})(\boldsymbol{x}) \quad (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n)$$

となることを示せ.

問題 10.2.

Hilbert 空間 H 上の有界線形汎関数 f に対して, $N := \{x \in H : f(x) = 0\}$ は H の線形部分空間になることを示せ.

現代解析学 II 演習問題　(2016 年 12 月 6 日)

締切は 2017 年 1 月 24 日 (火) の講義終了時とする．レポートは A4 用紙 (この紙と同じサイズ) を片面で利用し, 必要に応じて, 左上 1 箇所のみをホチキスで止めること．ルーズリーフや印刷物の裏紙は利用しないこと．表紙はつけなくてもよい．鉛筆書きで構わない．氏名と学生番号の書き忘れは採点しない (出席扱いにもしない)．参考文献をつけること (この問題を解くにあたって, 必要とした教科書等をすべて書く．著者, 本の題名, 出版社, 出版年度を記載すること)．また, **出席システムで出席を確認する．出席の確認ができない学生は出席扱いとしないし, レポートも採点の対象にしない．**

問題 11.1.

Hilbert 空間 H 上の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ が $x \in H$ に弱収束することと

$$\text{任意の } f \in H^* \text{ に対して}, \ f(x_n) \to f(x) \ (n \to \infty) \tag{11.2}$$

が同値となることを示せ (ヒント: (11.2) から弱収束を証明することは比較的易しい (定理 7.2 または, 問題 9.1 が役に立つ), 逆に弱収束を仮定して, (11.2) を示すには Riesz の表現定理を用いて, $f(v_n)$ を内積に書きかえる).

問題 11.2.

Hilbert 空間 H 上の点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ が $x \in H$ に強収束するとき, $x \in H$ に弱収束することを示せ (ヒント: Schwarz の不等式を使うはず).

現代解析学 II 演習問題　(2016 年 12 月 13 日)

締切は 2017 年 1 月 24 日 (火) の講義終了時とする．レポートは A4 用紙 (この紙と同じサイズ) を片面で利用し, 必要に応じて, 左上 1 箇所**のみ**をホチキスで止めること．ルーズリーフや印刷物の裏紙は利用しないこと．表紙はつけなくてもよい．鉛筆書きで構わない．氏名と学生番号の書き忘れは採点しない (出席扱いにもしない)．参考文献をつけること (この問題を解くにあたって, 必要とした教科書等をすべて書く．著者, 本の題名, 出版社, 出版年度を記載すること)．また, **出席システムで出席を確認する．出席の確認ができない学生は出席扱いとしないし, レポートも採点の対象にしない．**

問題 12.1.

Hilbert 空間 H 上の有界作用素 $A \in \mathscr{L}(H)$ に対して, $u \in H \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ が $Au = \lambda u$ をみたすとき, λ を A の**固有値**といい, u を A の**固有ベクトル**という．

(1) A が自己共役作用素のとき, A の固有値 λ は実数となることを示せ.

(2) A が有界作用素のとき, $\lambda \in \mathbb{C}$ を A の固有値とすると $|\lambda| \le \|A\|_{\mathscr{L}(H)}$ が成り立つことを示せ.

現代解析学II 演習問題　(2016年12月20日)

締切は2017年1月24日(火)の講義終了時とする．レポートはA4用紙(この紙と同じサイズ)を片面で利用し, 必要に応じて, 左上1箇所のみをホチキスで止めること．ルーズリーフや印刷物の裏紙は利用しないこと．表紙はつけなくてもよい．鉛筆書きで構わない．氏名と学生番号の書き忘れは採点しない(出席扱いにもしない)．参考文献をつけること(この問題を解くにあたって, 必要とした教科書等をすべて書く．著者, 本の題名, 出版社, 出版年度を記載すること)．また, **出席システムで出席を確認する．出席の確認ができない学生は出席扱いとしないし, レポートも採点の対象にしない．**

問題 13.1.

Banach空間 X, Y に対して, $\mathscr{L}(X.Y)$ がBanach空間になることを示せ.

問題 13.2.

次の事柄について, 定義や定理の主張を調べよ．なお, 参考文献としてインターネットの情報は認めない[1].

(1) Hahn-Banachの定理
(2) Banach空間における弱収束の定義
(3) Banach空間におけるコンパクト作用素の定義

[1]図書館で文献を調べよということ.