§0 イントロダクション

どうやって偏微分方程式を解くか？

〈スカラー値常微分方程式〉

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t), & t>0, \\ u(0) = u_0 . \end{cases}$$

$u = u(t) \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ 未知.

$u_0 \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$ 既知.

解き方

$$\frac{du}{dt}(t) - Au(t) = 0.$$

両辺 e^{-tA} をかけると

$$e^{-tA}\frac{du}{dt}(t) - e^{-tA}A\cdot u(t) = 0.$$

よって
$$\underbrace{\frac{d}{dt}\left(e^{-tA}u(t)\right)}_{\displaystyle \frac{d}{dt}(e^{-tA})u(t) + e^{-tA}\frac{du}{dt}(t)} = 0$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}(e^{-tA})}_{=-Ae^{-tA}} u(t)$$

$-Ae^{-tA}u(t)$

$$\therefore\ e^{-tA}u(t) = e^{-0A}u(0) \overset{\text{初期条件}}{=} u_0 .$$

より $$u(t) = e^{tA}u_0 .$$

$\blacksquare$

〈ベクトル値常微分方程式〉

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{dt}(t) = A\vec{u}(t), & t>0. \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0 \end{cases}$$

$u = u(t) = (u_1(t), \cdots, u_n(t)) \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ 未知.

$u_0 \in \mathbb{R}^n$ 既知, A : n次実正方行列.

① スカラー値と同じように

$$\vec{u}(t) = e^{tA}\vec{u}_0$$

ならいいなぁ. e^{tA} は何者?

<u>指数関数のTaylor展開</u>

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

から

単位行列

$$e^{tA} := I + tA + \frac{1}{2!}(tA)^2 + \frac{1}{3!}(tA)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}(tA)^n + \cdots$$

と定義してみる. すると

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}\vec{u}_0) = \frac{d}{dt}\left(\vec{u}_0 + tA\vec{u}_0 + \frac{1}{2!}(tA)^2\vec{u}_0 + \cdots + \frac{1}{n!}(tA)^n\vec{u}_0 + \cdots\right)$$

$$= A\vec{u}_0 + \frac{2}{2!}tA^2\vec{u}_0 + \frac{3}{3!}t^2A^3\vec{u}_0 + \cdots + \frac{n}{n!}t^{n-1}A^n\vec{u}_0 + \cdots$$

$$= A\vec{u}_0 + tA^2\vec{u}_0 + \frac{1}{2!}t^2A^3\vec{u}_0 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}A^n\vec{u}_0 + \cdots$$

$$= A\left(\vec{u}_0 + tA\vec{u}_0 + \frac{1}{2!}t^2A^2\vec{u}_0 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}A^{n-1}\vec{u}_0 + \cdots\right)$$

$$= A(e^{tA}\vec{u}_0).$$

かつ

$$e^{0A}\vec{u}_0 = \vec{u}_0 + (0A)\vec{u}_0 + \frac{1}{2!}(0A)^2\vec{u}_0 + \cdots = \vec{u}_0$$

より　$\vec{u}(t) = e^{tA}\vec{u}_0$ は解になっている.

(ii)　$x \in \mathbb{R}^n$ に対し. $Ax =: Tx$ と定めると

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は線形写像. そこで.

AとTは同じものだと思うことにすると

$$\frac{d\vec{u}}{dt}(t) = A\vec{u}(t)$$

の右辺は. $\vec{u}(t)$ を線形写像でうつした

ものと考えられる

〈偏微分方程式(熱方程式)〉

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, & t>0,\ x\in\mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

$u = u(t,x) \in X \quad (t \geq 0)$ 未知

$u_0 \in X$ 既知 $\quad x = (x_1, \cdots, x_n)$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$ 線形微分作用素

Xが何かわからないが、$\Delta = A$だと思って

$$u(t) = e^{tA} u_0 = e^{t\Delta} u_0$$

ならいいなぁ。

($\dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$ は $\dfrac{du}{dt} = \Delta u = Au$ によく似てる)

困ること

Ⓠ Xは何か?

答 無限次元の線形空間(関数空間)

Ⓠ e^{tA}は何か?

答 Taylor展開で作れるものではない

$A = \Delta$ は講義ではやらないが

もう少し都合のいいAでは、

Taylor展開と一致する。

Q 微分と級数を交換してよいのか？

答 Xの位相，Aの性質に関係がある．

講義内容

§1 無限次元の線形空間（ノルム空間，Banach空間）

Xが何か？を知る．

§2 無限次元の計量線形空間（Hilbert空間）

都合のよいXについて．

§3 線形作用素（有界線形作用素．閉作用素）

Aが何か？を知る．

§4 有界線形作用素の関作用素（発展）

e^{-tA}が何か？を知る．

§1. ノルム空間とBanach空間

§§1.1. 線形空間

Xが$\mathbb{R}$上の線形空間

$\Longleftrightarrow$ ⓐ $x, y \in X$ に対し、和 $x+y \in X$ が定義できて

1. $(x+y)+z = x+(y+z) \quad ({}^\forall x, y, z \in X)$
2. $x+y = y+x \quad ({}^\forall x, y \in X)$
3. (零元) ${}^\exists 0 \in X$ s.t.

$$x+0 = 0+x = x \quad ({}^\forall x \in X)$$

4. (逆元) ${}^\forall x \in X$ に対し、${}^\exists (-x) \in X$ s.t.

$$x+(-x) = (-x)+x = 0.$$

ⓑ $x \in X$, $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し、スカラー倍 $\alpha x \in X$ が定義できて

5. $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x \quad ({}^\forall x \in X, {}^\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$
6. $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \quad ({}^\forall x, y \in X, {}^\forall \alpha \in \mathbb{R})$
7. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) \quad ({}^\forall x \in X, {}^\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$
8. $1x = x \quad ({}^\forall x \in X).$

例 1.1

$$C([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R}, \text{連続}\}$$

は $f, g \in C([0,1])$, $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し $f+g$, αf を

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \qquad (x \in [0,1])$$

$$(\alpha f)(x) := \alpha f(x) \qquad (x \in [0,1])$$

と定めることにより 線形空間となる.

証明

2. だけ示す. ${}^\forall f, g \in C([0,1])$ に対し

$$(f+g)(x) \underset{f+g\text{の定義}}{=} f(x) + g(x) \underset{\mathbb{R}\text{は可換}}{=} g(x) + f(x) \underset{g+f\text{の定義}}{=} (g+f)(x) \qquad {}^\forall x \in [0,1]$$

より $f+g = g+f$ となる □.

注意 1.1

$f, g \in C([0,1])$ に対し

$$f = g \underset{\text{定義}}{\iff} f(x) = g(x) \quad ({}^\forall x \in [0,1])$$

より, $f+g = g+f$ を示すには ${}^\forall x \in [0,1]$ に対し

$$(f+g)(x) = (g+f)(x)$$

を示さないといけない. 他も同様

(つまり, 書くことが多くてメンドウ)

§1.2 ノルム空間

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対し $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ とおくと

1. $\|x\| \geq 0 \quad ({}^\forall x \in \mathbb{R}^n)$
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n)$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \quad ({}^\forall x \in \mathbb{R}^n, {}^\forall \alpha \in \mathbb{R})$
4. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad ({}^\forall x, y \in \mathbb{R}^n)$

が成り立つ. このことを一般化する.

定義 1.1 (ノルム空間)

X: $\mathbb{R}$-線形空間

$x \in X$ に対し, $\|x\|_X \in \mathbb{R}$ が定まり, 次をみたすとき, $\|x\|_X$ を <u>x のノルム</u> という:

1. $\|x\|_X \geq 0 \quad ({}^\forall x \in X)$
2. $\|x\|_X = 0 \iff x = 0 \quad (x \in X)$
3. $\|\alpha x\|_X = |\alpha| \, \|x\|_X \quad ({}^\forall x \in X, {}^\forall \alpha \in \mathbb{R})$
4. $\|x+y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X \quad ({}^\forall x, y \in X)$
   (三角不等式)

ノルムが定義されている空間を <u>ノルム空間</u> という.

Xをノルム空間とするとき

$$d(x,y) := \|x-y\|_X \qquad (\forall x,y \in X)$$

と定めると、dはX上の距離となる. i.e.

- $d(x,y) \geq 0 \qquad (\forall x,y \in X)$
- $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \qquad (x,y \in X)$
- $d(x,y) = d(y,x) \qquad (\forall x,y \in X)$
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \qquad (\forall x,y,z \in X)$

が成り立つ. よって ノルム空間は距離空間となる.

定義 1.2 (点列の収束)

X: ノルム空間. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $x \in X$.

$$x_n \longrightarrow x \quad \text{in } X \quad (n \to \infty)$$

$$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \quad \underset{\substack{\parallel \\ d(x_n,x)}}{\|x_n - x\|_X} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$$

- つまり, 距離空間としての収束と同じ.

命題 1.1

X: ノルム空間, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$.

(1) $x_n \to x$ in X $(n \to \infty)$

$y_n \to y$ in X $(n \to \infty)$

$\Longrightarrow$ $x_n + y_n \to x + y$ in X $(n \to \infty)$

(2) $x_n \to x$ in X $(n \to \infty)$

$\alpha_n \to \alpha$ $(n \to \infty)$

$\Longrightarrow$ $\alpha_n x_n \to \alpha x$ in X $(n \to \infty)$

(3) $x_n \to x$ in X $(n \to \infty)$

$\Longrightarrow$ $\|x_n\|_X \to \|x\|_X$ $(n \to \infty)$

証明

(2) $\alpha_n x_n \to \alpha x$ in X $(n \to \infty)$

を示したいので

$$\|\alpha_n x_n - \alpha x\|_X \to 0 \quad (n \to \infty)$$

を示せばよい. 数列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束するので有界

だから. $\exists M > 0$ s.t.

$$|\alpha_n| \leq M \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

よって.

$$\|\alpha_n x_n - \alpha x\|_X = \|\alpha_n x_n - \alpha_n x + \alpha_n x - \alpha x\|_X$$
$$\leq \|\alpha_n (x_n - x)\|_X + \|(\alpha_n - \alpha) x\|_X$$

$$= |\alpha_n| \, \|x_n - x\|_X + |\alpha_n - \alpha| \, \|x\|_X$$

↑定義1.1の3.

定義1.2

$$\leq M \|x_n - x\|_X + |\alpha_n - \alpha| \, \|x\|_X \to 0 \quad (n \to \infty)$$

従って　$\|x_n - x\|_X \to 0 \quad (n \to \infty)$.

(1) は　$(x_n + y_n) - (x + y) = (x_n - x) + (y_n - y)$

と三角不等式.

(3): は 問題 1.3

<u>例 1.2</u>

$f \in C([0,1])$ に対し

$$\|f\|_{C([0,1])} := \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

と定めると. $\|f\|_{C([0,1])}$ は f のノルムになる.

<u>証明</u>　　問 1.4 も参照

① $\|f\|_{C([0,1])} = 0 \Rightarrow f = 0$. について.

$f \in C([0,1])$ に対し $\|f\|_{C([0,1])} = 0$ ならば $^\forall x \in [0,1]$ に対し.

$$0 \leq |f(x)| \leq \sup_{y \in [0,1]} |f(y)| = \|f\|_{C([0,1])} = 0$$

より $f(x) = 0$ だから. $f = 0$ となる.

② 三角不等式について

$f, g \in C([0,1])$ と $x \in [0,1]$ に対し.

$$|(f+g)(x)| \underset{\text{定義}}{=} |f(x)+g(x)|$$

$$\leq |f(x)|+|g(x)| \leq \sup_{y\in[0,1]} |f(y)| + \sup_{y\in[0,1]} |g(y)|$$

$$= \|f\|_{C([0,1])} + \|g\|_{C([0,1])}$$

xに依らない (xがでてこない)

より. $x \in [0,1]$ について sup をとれば

$$\|f+g\|_{C([0,1])} = \sup_{x\in[0,1]} |(f+g)(x)| \leq \|f\|_{C([0,1])} + \|g\|_{C([0,1])}$$

だから 三角不等式が成り立つ.

例 1.3 (数列空間)

$1 \leq p < \infty$ に対し.

$$\ell^p := \left\{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} : \|\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\|_{\ell^p}^p := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\}$$

と定義する. このとき. ℓ^pは線形空間であり.

$\|\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\|_{\ell^p}$ は $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^p$ のノルムとなる.

例1.4 (Lebesgue空間)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$を領域とする. $1 \le p < \infty$に対し

$$L^p(\Omega) := \{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ \text{Lebesgue可測},$$
$$\|f\|_{L^p(\Omega)}^p := \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \}$$

と定義する. このとき. $L^p(\Omega)$は線形空間であり.

$\|f\|_{L^p(\Omega)}$は$f \in L^p(\Omega)$のノルムになる. ただし.

$$f = 0 \iff f(x) = 0 \quad \text{for a.a. } x \in \Omega.$$

§§ 1.3 Banach 空間

① $\mathbb{Q}$と$\mathbb{R}$の違い → Cauchy列が収束するか否か?

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 1.4, & 1.41, & 1.414, & 1.4142, & \cdots & \to & \sqrt{2} \\ \cap & \cap & \cap & \cap & \cap & & & \not\cap \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & \mathbb{Q} & & & \mathbb{Q} \end{array}$$

② 偏微分方程式の解の存在を示すのが難しい.

(Cauchy列が収束することを使って示す)

Cauchy列が収束することは重要.

定義 1.3 (Cauchy列)

X: ノルム空間, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が X 上の Cauchy 列.

$\overset{}{\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}}$ ${}^{\forall}\varepsilon > 0$, ${}^{\exists}N \in \mathbb{N}$ s.t.

${}^{\forall}n, m \in \mathbb{N}$.

$n, m \geq N \Longrightarrow \|a_n - a_m\|_X < \varepsilon$.

定義 1.4 (Banach空間)

X: ノルム空間

X が Banach 空間

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 任意の Cauchy 列は収束する.

これは. Banach空間 X を距離空間とみたときに

完備 であることと同じである. よって Banach 空間に

おいては縮小写像の原理が示せる

例 1.5 (有限次元空間)

$d \in \mathbb{N}$ と $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$ に対し

$$\|x\|_{\mathbb{R}^d} := \sqrt{(x^1)^2 + \cdots + (x^d)^2}$$

とおく。このとき、$\mathbb{R}^d$ は Banach 空間となる

証明

Cauchy 列が収束することのみ示す。

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d$ 上の Cauchy 列とすると、

$x_n = \begin{pmatrix} x_n^1 \\ \vdots \\ x_n^d \end{pmatrix}$ とおけば $j = 1, \cdots, d$ に対し、

$$|x_n^j - x_m^j| \leq \sqrt{(x_n^1 - x_m^1)^2 + \cdots + (x_n^d - x_m^d)^2}$$
$$= \|x_n - x_m\|_{\mathbb{R}^d}$$

となるから $\{x_n^j\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{R}$ 上の Cauchy 列より

収束する。$x^j := \lim_{n \to \infty} x_n^j$, $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^d \end{pmatrix}$ とおくと、

$\forall \varepsilon > 0$ に対し $\exists N_j \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、

$$n \geq N_j \implies |x_n^j - x^j| < \varepsilon$$

とできるから $N := \max_{1 \leq j \leq d} N_j$ とおく。

このとき、$n \geq N$ ならば

$$\|x_n - x\|_{\mathbb{R}^d} = \sqrt{(x_n^1 - x^1)^2 + \cdots + (x_n^d - x^d)^2}$$
$$\leq \sqrt{\varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^2}$$
$$= \sqrt{d}\,\varepsilon.$$

より $x_n \longrightarrow x$ in $\mathbb{R}^d$ $(n \to \infty)$.

すなわち、$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束列であることがわかる $\square$

定理1.1

Xを有限次元線形空間とし、$\|x\|_X$ を $x \in X$ のノルムとする。このとき、Xは Banach 空間である。

つまり、有限次元の場合は（係数体が $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ のときは）つねに Banach 空間とみなせる。

Banach 空間か否かは無限次元のときにはじめて問題になる。

定理1.1の証明の概略（参照 問2.1）

1. Xの基底を$\{e_1, \cdots, e_d\}$とおき、

$$x = x^1 e_1 + \cdots + x^d e_d \in X$$

とかく。

$$\|x\|_1 := |x^1| + \cdots + |x^d|$$

と定めたとき、$\|x\|_1$が$x \in X$のノルムとなることと

$\exists C_1, C_2 > 0$ s.t.

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_X \leq C_2 \|x\|_1 \quad (\forall x \in X)$$

を示す。

2. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$を$\|\cdot\|_X$に関するCauchy列としたとき、$\|\cdot\|_1$に関するCauchy列となることを示す。

3. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$を$\|\cdot\|_1$に関するCauchy列としたとき、$\|\cdot\|_1$のノルムで収束することを示す。

4. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$が$\|\cdot\|_1$での収束列のとき、$\|\cdot\|_X$についても収束することを示す

$\underline{1.}$ の $C_1>0$ に対するヒント．

背理法で示す．主張を否定すると

$^\forall n\in\mathbb{N}$．$^\exists x_n\in X$ s.t.

$$\frac{1}{n}\|x_n\|_1 > \|x_n\|_X$$

とできる．$y_n := \dfrac{x_n}{\|x_n\|_1}$ とおくと $\|y_n\|_1=1$, $\|y_n\|_X<\dfrac{1}{n}$

がわかる．

① $y_n = y_n^1 e_1 + \cdots + y_n^d e_d$

とかいたとき．$^\exists\{y_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{y_n\}_{n=1}^\infty$ s.t. $^\forall j=1,\cdots,d$.

$$y_{n_k}^j \longrightarrow y^j \quad (k\to\infty)$$

を示す．$y := \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^d \end{pmatrix}$ とおく

② $^\forall n\in\mathbb{N}$ に対し

$$\begin{aligned}\|y\|_X &\leq \|y-y_n\|_X + \|y_n\|_X \\ &\leq C_2\|y-y_n\|_1 + \|y_n\|_X\end{aligned}$$

に注意して．$y=0$ を示す．

③ 命題 1.1 より

$$1=\|y_n\|_1 \longrightarrow \|y\|_1 \quad (n\to\infty)$$

より $y\neq 0$．よって矛盾が得られた．

□

命題 1.2

X :ノルム空間, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$: X上の Cauchy列

$\Longrightarrow$ $\{\|x_n\|_X\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{R}$上の Cauchy列. とくに

$\{\|x_n\|_X\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{R}$上の収束列であり, 有界である.

証明

$$\|x_n\|_X = \|x_n - x_m + x_m\|_X \underset{\text{三角不等式}}{\leq} \|x_n - x_m\|_X + \|x_m\|_X$$

より

$$\|x_n\|_X - \|x_m\|_X \leq \|x_n - x_m\|_X .$$

同様に

$$\|x_m\|_X - \|x_n\|_X \leq \|x_m - x_n\|_X$$

より

$$\bigl|\|x_n\|_X - \|x_m\|_X\bigr| \leq \|x_n - x_m\|_X .$$

このことから $\{\|x_n\|_X\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{R}$上の Cauchy列となることがわかる. □

例 1.6

$C([0,1])$ は Banach空間となる

(cf. 例 1.1, 1.2)

証明

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C([0,1])$ を $C([0,1])$ 上の Cauchy 列とする. i.e.

$$^\forall \varepsilon > 0,\ ^\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t. } ^\forall n, m \in \mathbb{N}$$

$$n, m \geq N \Longrightarrow \|f_n - f_m\|_{C([0,1])} < \varepsilon$$

とする.

1. $^\forall x \in [0,1]$ に対し極限関数 $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が定義できることを示す. $n, m \geq N$ ならば

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{y\in[0,1]} |f_n(y) - f_m(y)| = \|f_n - f_m\|_{C([0,1])} < \varepsilon \quad \text{---}(*)$$

より $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ 上の Cauchy 列. $\mathbb{R}$ は完備より収束するので $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ と定義する.

2. $\sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \|f\|_{C([0,1])} < \infty$ を示す.

命題 1.2 より

$$^\exists M > 0 \text{ s.t } \|f_n\|_{C([0,1])} \leq M \quad (^\forall n \in \mathbb{N})$$

より

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_{C([0,1])} \leq M \quad (^\forall n \in \mathbb{N},\ ^\forall x \in [0,1])$$

だから $n \to \infty$ とすると

$$|f(x)| \leq M \quad (^\forall x \in [0,1])$$

両辺 $x \in [0,1]$ で sup をとると

$$\|f\|_{C([0,1])} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \leq M < \infty$$ がわかる.

3. $\|f_n - f\|_{C([0,1])} \to 0 \quad (n\to\infty)$ を示す.

(*)より $n, m \geq N$ ならば

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \qquad ({}^\forall x \in [0,1])$$

だから $m\to\infty$ とすると

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \qquad ({}^\forall x \in [0,1])$$

となる. $x\in[0,1]$ について sup をとると $n \geq N$ ならば

$$\|f_n - f\|_{C([0,1])} = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

が得られる. よって $\|f_n - f\|_{C([0,1])} \to 0 \quad (n\to\infty)$ が示された.

4. $f \in C([0,1])$. i.e. f が ${}^\forall x \in [0,1]$ で連続であることを示す.

3. より ${}^\forall \varepsilon > 0$. ${}^\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\|f_N - f\|_{C([0,1])} < \varepsilon$ とできる.

次に ${}^\exists \delta > 0$ s.t. ${}^\forall y \in [0,1]$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(y)| < \varepsilon.$$

とできる($\because$ f_N は連続だから)。従って ${}^\forall y \in [0,1]$ に対し

$|x-y| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(y) + f_N(y) - f(y)| \\
&\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| \quad \text{三角不等式} \\
&\leq 2\|f - f_N\|_{C([0,1])} + |f_N(x) - f_N(y)| \\
&\leq 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

となり. f が $x \in [0,1]$ で連続であることがわかった $\square$

例 1.7

$1 \leq p < \infty$ に対し 数列空間 ℓ^p は Banach 空間となる (cf. 例 1.3)

証明

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \ell^p$ を ℓ^p 上の Cauchy 列とする. i.e.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$$n, m \geq N \Rightarrow \|x_n - x_m\|_{\ell^p} < \varepsilon$$

と仮定する.

1. $x_n = \{a_k^n\}_{k=1}^{\infty}$ とかいて, 極限が存在することを示す.

$\forall k \in \mathbb{N}$ を固定すると $n, m \geq N$ ならば

$$|a_k^n - a_k^m| \leq \left(\sum_{\ell=1}^{k} |a_\ell^n - a_\ell^m|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x_n - x_m\|_{\ell^p} < \varepsilon$$

となるから $\{a_k^n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{R}$ 上の Cauchy 列. $\mathbb{R}$ は完備より収束するので $a_k := \lim_{n\to\infty} a_k^n$, $x = \{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ とおく.

2. $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_{\ell^p} < \infty$ を示す.

命題 1.2 より

$$\exists M \geq 0 \text{ s.t. } \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x_n\|_{\ell^p} \leq M \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

とできる. このとき $\forall K \in \mathbb{N}$ に対して

$$\sum_{k=1}^{K} |a_k^n|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k^n|^p \leq M^p$$

より $n \to \infty$ とすれば

$$\sum_{k=1}^{K} |a_k|^p \leq M^p$$

となる. 次に $K \to \infty$ とすれば

$$\|x\|_{\ell^p}^p = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \leq M^p < \infty$$

がわかる.

3. $\|x_n - x\|_{\ell^p} \to 0 \quad (n \to \infty)$ を示す.

$^\forall K \in \mathbb{N}$ に対し, $n, m \geq N$ ならば

$$\sum_{k=1}^{K} |a_k^n - a_k^m|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k^n - a_k^m|^p = \|x_n - x_m\|_{\ell^p}^p < \varepsilon^p$$

となるから $m \to \infty$ とすると

$$\sum_{k=1}^{K} |a_k^n - a_k|^p \leq \varepsilon^p$$

ここで $K \to \infty$ とすると $n \geq N$ ならば

$$\|x_n - x\|_{\ell^p}^p = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k^n - a_k|^p \leq \varepsilon^p$$

となるから $\|x_n - x\|_{\ell^p}^p \to 0 \quad (n \to \infty)$. i.e.

$$x_n \to x \quad \text{in } \ell^p \quad (n \to \infty)$$

がわかる

□

例1.8　$1 \leq p < \infty$

$$X := \{ f : (-1,1) \to \mathbb{R} ,\ 連続,\ \|f\|_{L^p((-1,1))} < \infty \}$$

$$\|f\|_{L^p((-1,1))}^p := \int_{-1}^{1} |f(x)|^p \, dx$$

とおくと X は Banach空間ではない.

〈反例〉　$n \in \mathbb{N}$ に対し

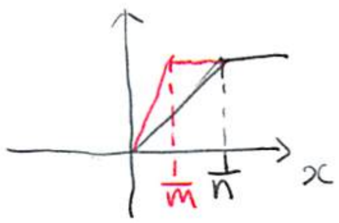
$$f_n(x) := \begin{cases} 0 & -1 < x \leq 0 \\ nx & 0 < x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \frac{1}{n} < x < 1 \end{cases}$$

とおくと. $f_n \in X$　$(\forall n \in \mathbb{N})$.

$m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq n$ に対し

$$\|f_n - f_m\|_{L^p((-1,1))}^p = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|^p \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{m}} \underbrace{|mx - nx|^p}_{=(m-n)x^p} dx + \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \underbrace{|1 - nx|^p}_{\leq 1} dx$$



$$\leq \frac{1}{p+1}\left(1 - \frac{n}{m}\right)\left(\frac{1}{m}\right)^p + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)$$

$$\to 0 \qquad (m, n \to \infty)$$

より $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は $\|\cdot\|_{L^p((-1,1))}$ のノルムで Cauchy列.

しかし

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x \leq 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

（$x>0$ のとき、十分大きなすべての $n \in \mathbb{N}$ について $x > \frac{1}{n}$）

より f は $x=0$ で連続でないので $f \notin X$

（正確にはもう少し議論がいる）

例1.9（Lebesgue 空間）

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$：領域

$$L^p(\Omega) := \{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ \text{Lebesgue 可測},\ \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty \}$$

$$\|f\|^p_{L^p(\Omega)} := \int_\Omega |f(x)|^p \, dx$$

とおくと、$L^p(\Omega)$ は Banach 空間となる（cf. 例1.4）

注意1.2

Lebesgue 積分が必要なのは、例1.8 の問題点をRiemann 積分では回避できないからである。

（連続をRiemann積分にかえたとしてもうまくいかない）

理論的には Lebesgue 積分が有効であるが、

具体的な計算は Riemann 積分を使うことが多い。

§2 Hilbert 空間

§§2.1 Hilbert 空間

$\mathbb{R}^n$ には内積が入る:

$$(x,y)_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{x_1y_1+\cdots+x_ny_n} \qquad \begin{array}{l} x=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n \\ y=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n, \end{array}$$

この内積は次をみたす.

(i) $(x,x)\geq 0 \qquad ({}^\forall x\in\mathbb{R}^n)$

$(x,x)=0 \iff x=0 \qquad (x\in\mathbb{R}^n)$

(ii) $(x,y)=(y,x) \qquad ({}^\forall x,y\in\mathbb{R}^n)$

(iii) $(x_1+x_2,y)=(x_1,y)+(x_2,y)$

$(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$

$({}^\forall x_1,x_2,x,y\in\mathbb{R}^n,\ \alpha\in\mathbb{R})$

これを無限次元に拡張しよう.

定義2.1 (内積)

X:線形空間, $x, y \in X$.

$(x,y)_X \in \mathbb{R}$ が x と y の内積

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ (i) $(x,x)_X \geqq 0 \quad (\forall x \in X)$

(ii) $(x,x)_X = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad (x \in X)$

(iii) $(x,y)_X = (y,x)_X \quad (\forall x, y \in X)$

(iv) $(x_1 + x_2, y)_X = (x_1, y)_X + (x_2, y)_X$

$(\alpha x, y)_X = \alpha (x,y)_X$

$(\forall x_1, x_2, x, y \in X,\ \alpha \in \mathbb{R})$.

$x \in X$ に対し. $\|x\|_X := \sqrt{(x,x)_X}$ とおく.

このとき. $\|x\|_X$ が $x \in X$ のノルムとなること

を示したい.

定理2.1 (Schwarzの不等式)

$$|(x,y)_X| \leqq \|x\|_X \|y\|_X$$

$$(\forall x, y \in X)$$

証明

$x, y \in X$ と $t \in \mathbb{R}$ に対し

$$0 \underset{\text{(i)}}{\leq} (x+ty, x+ty)_X$$

$$\underset{\text{(iv)}}{=} (x,x)_X + (x,ty)_X + (ty,x)_X + (ty,ty)_X$$

$$\underset{\text{(iii)}}{=} \|x\|_X^2 + 2t(x,y)_X + t^2\|y\|_X^2$$

より 2次方程式の判別式から

$$(x,y)_X^2 - \|x\|_X^2 \|y\|_X^2 \leq 0.$$

i.e.

$$(x,y)_X^2 \leq \|x\|_X^2 \|y\|_X^2$$

両辺平方根をとればよい □.

定理 2.2

X: 線形空間, $(\cdot,\cdot)_X$: 内積

$$\|x\|_X := \sqrt{(x,x)_X} \qquad (x \in X)$$

とすると $\|x\|_X$ は $x \in X$ のノルムとなる.

証明

三角不等式のみ示す. $x, y \in X$ に対し

$$\|x+y\|_X^2 = (x+y, x+y)_X$$
$$= (x,x)_X + 2(x,y)_X + (y,y)_X$$
$$\leq \|x\|_X^2 + 2\|x\|_X\|y\|_X + \|y\|_X^2$$

定理2.1

$$= (\|x\|_X + \|y\|_X)^2.$$

両辺平方根をとればよい □.

定義2.2 (Hilbert空間)

H : 線形空間, $(\cdot,\cdot)_H$: 内積,

定理2.2により H はノルム空間となるが

このノルム $\|\cdot\|_H$ に関して完備のとき,

H は Hilbert空間という.

例2.1 (例1.7もみよ)

$x = \{a_n\}_{n=1}^\infty$, $y = \{b_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^2$ に対し

$$(x,y)_{\ell^2} := \sum_{n=1}^\infty a_n b_n$$

と定めると $(\cdot,\cdot)_{\ell^2}$ は ℓ^2 の内積となり

$$\|x\|_{\ell^2} = \sqrt{(x,x)_{\ell^2}} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2}$$

となるから完備となる(例1.7). 従ってℓ^2は
Hilbert空間となる.

<u>例2.2</u> (例1.9も参照)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$: 領域, $f, g \in L^2(\Omega)$ に対し

$$(f,g)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx$$

とおくと $(\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$ は内積となり.

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{(f,f)_{L^2(\Omega)}} = \sqrt{\int_\Omega |f(x)|^2 dx}$$

となるので完備である(例1.9). 従って
$L^2(\Omega)$ は Hilbert空間である.

§§2.2 直交分解定理

$x, y \in \mathbb{R}^n$ が直交 $\iff (x, y)_{\mathbb{R}^n} = 0$.

このことを一般化する.

定義 2.3 (直交)

H : Hilbert 空間, $x, y \in H$. $X, Y \subset H$.

- $x \perp y \underset{\text{定義}}{\iff} (x, y)_H = 0$.
- $X \perp Y \underset{\text{定義}}{\iff} (x, y)_H = 0 \quad ({}^\forall x \in X, {}^\forall y \in Y)$
- $X^\perp := \{ y \in X : x \perp y \quad ({}^\forall x \in X) \}$.

$\mathbb{R}^n$ と線形部分空間 $W \subset \mathbb{R}^n$ に対し

$\mathbb{R}^n = W \oplus W^\perp$ となることは知られている.

これを無限次元に一般化する.

定理 2.3 (直交分解定理)

H : Hilbert 空間, $X \subset H$: 閉部分空間

$\Rightarrow {}^\forall z \in H, {}^{\exists 1} x \in X, {}^{\exists 1} y \in X^\perp$ s.t.

$z = x + y$.

このとき．$H \ni z \longmapsto x \in X$ を<u>直交射影</u>

といい，$P_X z := x$ とかく．

<u>証明</u>

一意性は問題3.5

$\left(\begin{array}{l} z = x + y = x' + y' \quad (x, x' \in X,\ y, y' \in X^{\perp}) \\ \text{のときに } \|x - x'\|_H^2 \text{ を計算する} \end{array} \right)$

以下．~~∀~~ $z \in H$ に対し．$z = x + y \quad (x \in X.\ y \in X^{\perp})$

となる．x, y の存在を示す．

<u>1.</u> $\delta = \inf_{\mathfrak{z} \in X} \|z - \mathfrak{z}\|_H$ とおくと．

$\exists \{\mathfrak{z}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ s.t.

$$\|z - \mathfrak{z}_n\|_H \longrightarrow \delta \qquad (n \to \infty)$$

<u>2.</u> $\{\mathfrak{z}_n\}_{n=1}^{\infty}$ が H 上の Cauchy 列であることを示す．

中線定理（問題3.1）より．$n, m \in \mathbb{N}$ に対し．

$$(*) \quad \| \underbrace{(z - \mathfrak{z}_n) - (z - \mathfrak{z}_m)}_{= \mathfrak{z}_m - \mathfrak{z}_n} \|_H^2 + \| \underbrace{(z - \mathfrak{z}_n) + (z - \mathfrak{z}_m)}_{= 2\left(z - \frac{\mathfrak{z}_n + \mathfrak{z}_m}{2}\right)} \|_H^2$$

$$= 2\|z - \mathfrak{z}_n\|_H^2 + 2\|z - z_m\|_H^2$$

ここで $\dfrac{\mathfrak{z}_n+\mathfrak{z}_m}{2} \in X$ だから δ の定義より

$$\delta \leq \left\| z - \frac{\mathfrak{z}_n+\mathfrak{z}_m}{2} \right\|_H .$$

(*) とくみあわせると

$$\|\mathfrak{z}_n - \mathfrak{z}_m\|_H^2 = 2\|z-\mathfrak{z}_n\|_H^2 + 2\|z-\mathfrak{z}_m\|_H^2 \underbrace{- 4\left\|z - \frac{\mathfrak{z}_n+\mathfrak{z}_m}{2}\right\|_H^2}_{\leq -4\delta^2}$$

$$\to 0 \qquad (n, m \to \infty)$$

従って $\{\mathfrak{z}_n\}_{n=1}^\infty$ は H 上の Cauchy 列より収束する.

$\mathfrak{z}_n \to x$ in H $(n\to\infty)$ とすると X は閉集合

だから $x \in X$ となる. さらに

$$\|z-\mathfrak{z}_n\|_H \longrightarrow \|z-x\|_H = \delta \quad (n\to\infty)$$

となる.

<u>3.</u> $y := z - x \in X^\perp$ を示す. $\|\mathfrak{z}\|_H = 1$ となる

$\mathfrak{z} \in X$ に対し. $\mathfrak{z} \perp y$ を示せばよい(なぜか?)

そこで

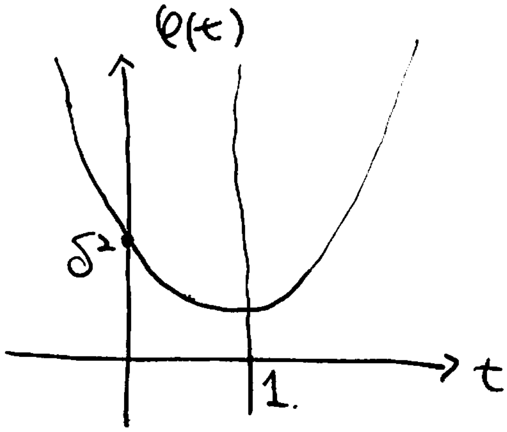
$$\varphi(t) := \|y - t(y,\mathfrak{z})_H \mathfrak{z}\|_H^2 \qquad (t \in \mathbb{R})$$

とおく.

$y - t(y,\zeta)_H \zeta = z - (x + t(y,\zeta)_H \zeta)$ であり．

$x + t(y,\zeta)_H \zeta \in X$ だから

$$\delta^2 = \varphi(0) \leq \varphi(t)$$
$$= t^2 (y,\zeta)_H^2 - 2t(y,\zeta)_H^2 + \|y\|_H^2$$
$$= (y,\zeta)_H^2 (t-1)^2 + \|y\|_H^2 - (y,\zeta)_H^2$$



もし．$(y,\zeta)_H^2 \neq 0$ ならば

$$\varphi(1) = \|y\|_H^2 - (y,\zeta)_H^2$$
$$< \varphi(0)$$

となり．$t=0$ で φ が最小となることに矛盾．　$\therefore$ $(y,\zeta)_H = 0$ となり．$y \in X^\perp$ となる　□

例2.3

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$: 有界領域．

$$X := \left\{ u \in L^2(\Omega) : \int_\Omega u(x)\,dx = 0 \right\}$$

は $L^2(\Omega)$ の閉部分空間．X への射影 P_X は $u \in L^2(\Omega)$ に対し

$$(P_X u)(x) = u(x) - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(y)\,dy \qquad (x \in \Omega)$$

で与えられる．

§§2.3 正規直交系

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \cdots, \ e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$(e_i, e_j)_{\mathbb{R}^n} = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, \cdots, n)$$

Kronecker のデルタ

となる. つまり $\mathbb{R}^n$ の自然な基底となる. これを無限次元で考える.

<u>定義2.4</u> (正規直交系)

H : Hilbert空間, $\{x_n\} \subset X$: 有限 or 可算集合

$\{x_n\}$ が正規直交系

$$\overset{}{\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}} \quad (x_i, x_j)_H = \delta_{ij}$$

<u>例2.4</u>

$L^2(0, \pi)$ において $\left\{ \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin nx \right\}_{n \in \mathbb{N}}$

は正規直交系である.

注) 以下. 正規直交系 $\{x_n\}$ は可算集合とする.

命題 2.1 (Besselの不等式)

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$: 正規直交系

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |(x, x_k)_H|^2 \leq \|x\|_H^2 \qquad ({}^\forall x \in H)$$

証明

$\alpha_k = (x, x_k)_H$ とおくと. ${}^\forall n \in \mathbb{N}$ に対し.

$$0 \leq \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \right\|_H^2$$

$$= \|x\|_H^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \underbrace{(x, x_k)_H}_{=\alpha_k} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \alpha_k \alpha_l \underbrace{(x_k, x_l)_H}_{=\delta_{kl}}$$

$$= \|x\|_H^2 - 2\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2$$

$$= \|x\|_H^2 - \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2$$

よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \leq \|x\|_H^2$

$n \to \infty$ とすればよい $\square$

$\{e_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底だから、${}^\forall x \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$$

とかけるが、このとき、

$$(x, e_j)_{\mathbb{R}^d} = \alpha_1 (e_1, e_j)_{\mathbb{R}^d} + \cdots + \alpha_n (e_n, e_j)_{\mathbb{R}^d}$$
$$= \alpha_j$$

だから

$$x = (x, e_1)_{\mathbb{R}^d} e_1 + \cdots + (x, e_n)_{\mathbb{R}^n} e_n$$

となる。この性質は無限次元でも成り立つのだろうか？

定理2.4

H : Hilbert空間、$\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$: 正規直交系

このとき、以下は同値。

(1) $H = \overline{\left\{\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k : \alpha_k \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\right\}}^H$

(2) $x = \sum_{k=1}^\infty (x, x_k) x_k \quad ({}^\forall x \in H)$

(3) (Perseval の等式)

$$\|x\|_H^2 = \sum_{k=1}^\infty |(x, x_k)_H|^2 \quad ({}^\forall x \in H).$$

(4) ${}^\forall x \in H$, ${}^\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、$(x, x_n)_H = 0$ ならば $x = 0$.

定義 2.5（完全正規直交系）

H : Hilbert空間, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$.

$\{x_n\}$ が H の完全正規直交系

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ 定理2.4 の (1)〜(4) のどれか

(i.e. すべて) をみたす.

定理 2.4の証明は省略する(それほど難しくはない)

たとえば 増田久弥 §2.4 を参照

例2.5

ℓ^2 において

$$e_j = \{\delta_{ij}\}_{i=1}^{\infty} = (0, \cdots, 0, \overset{j\text{番目}}{1}, 0, \cdots)$$

とおくと $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ は ℓ^2 における完全正規

直交系となる. (4) を確認することが

最も簡単であろう.

§3 線形作用素

以下 X, Y は Banach 空間とする.

§§3.1 有界線形作用素

定義3.1 (線形作用素)

$D \subset X$: 部分空間 $T: D \to Y$ (以下 $T: D \subset X \to Y$ ともかく)

T が線形作用素

$\overset{\Longleftrightarrow}{\text{定義}}$ (1) $T(x_1+x_2) = T(x_1) + T(x_2) = Tx_1 + Tx_2$ $(\forall x_1, x_2 \in D)$

(2) $T(\alpha x) = \alpha(T(x)) = \alpha Tx$ $(\forall x \in D, \forall \alpha \in \mathbb{R})$

D を線形作用素 T の定義域といい, $D(T)$ とかく.

例3.1

$X = Y = C([0,1])$.

$$\begin{cases} D(T) := X = C([0,1]) \\ Tf(x) := \int_0^x f(y)\,dy \quad (f \in D = C([0,1]),\ x \in [0,1]) \end{cases}$$

T は線形作用素 (問4.1)

例3.2

$X = Y = C([0,1])$.

$$\begin{cases} D(T) := C^1([0,1]) \subsetneq C([0,1]) \\ Tf(x) := f'(x). \quad (f \in D = C^1([0,1]),\ x \in [0,1]) \end{cases}$$

T は線形作用素 (問4.2)

定義3.2 (連続作用素)

$T : D(T) \subset X \to Y$ 線形作用素

Tが連続

$\underset{\text{定義}}{\iff}$ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(T)$, $x \in D(T)$ が

$$x_n \to x \text{ in } X \ (n \to \infty)$$

$$\Rightarrow Tx_n \to Tx \text{ in } Y \ (n \to \infty).$$

例3.1は連続だが例3.2は連続でない. このことを示すためには次の定理を使えばよい.

定理3.1

$T : D(T) \subset X \to Y$ 線形作用素

$$T\text{が連続} \underset{\text{同値}}{\iff} {}^{\exists}M > 0 \text{ s.t. } \|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X \ ({}^{\forall}x \in D(T))$$

証明

$(\Rightarrow)$ 方針のみ述べる. 背理法を用いると.

${}^{\forall}n \in \mathbb{N}$ に対し. ${}^{\exists}x_n \in D(T)$ s.t. $\|Tx_n\|_Y > n\|x_n\|_X$

とできる. $y_n := \dfrac{1}{\sqrt{n}} \dfrac{x_n}{\|x_n\|_X} \in D(T)$ とおくと.

① $y_n \to 0$ in X $(n \to \infty)$

② $\|Ty_n\|_Y \to \infty$ $(n \to \infty)$

となることから連続性に矛盾する.

$(\Leftarrow)$ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(T)$, $x \in D(T)$ が $x_n \to x$ in X $(n\to\infty)$

ならば

$$\|Tx_n - Tx\|_Y \overset{T:\text{線形}}{=} \|T(x_n - x)\|_Y$$

$$\underset{\text{仮定}}{\leq} M\|x_n - x\|_X$$

$$\xrightarrow[x_n \to x]{} 0 \quad (n\to\infty)$$

となるから $Tx_n \to Tx$ in Y $(n\to\infty)$. よって T は連続 □

定義 3.3 (有界作用素)

$T: D(T) \subset X \to Y$. 線形作用素

T が有界

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists M>0$ s.t. $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$ $(\forall x \in D(T))$

定理 3.1 より T が(線形作用素)有界であることと連続であることは

同値.

$\mathcal{L}(X,Y) := \{T: X \to Y$ 有界線形, $D(T)=X\}$, $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X,X)$

$X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ (共役空間, dual space)

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \sup_{\substack{x\in X \\ x\neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \quad (T \in \mathcal{L}(X,Y))$$

⑪ $\|Tx\|_Y \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X$ $(\forall x \in X)$ が成り立つ.

(問 4.3)

$T, S \in \mathcal{L}(X, Y)$. $\alpha \in \mathbb{R}$ に対し

$$(T+S)x := Tx + Sx \quad (x \in X)$$
$$(\alpha T)x := \alpha(Tx) \quad (x \in X)$$

と定義すると. $T+S, \alpha T \in \mathcal{L}(X, Y)$ (問4.4)

この加法とスカラー倍によって $\mathcal{L}(X, Y)$ は線形空間となり.

$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ は $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ のノルムになる (問4.4)

(零元 $0 : X \to Y$, $0x = 0$ $(\forall x \in X)$)

定理3.2

$\mathcal{L}(X, Y)$ は Banach空間となる.

証明 完備性のみ示す.

$\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ を $\mathcal{L}(X, Y)$ の Cauchy列とする. i.e.

$\forall \varepsilon > 0$ に対し. $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n, m \in \mathbb{N}$ に対し.

$$n, m \geq N \Longrightarrow \|T_n - T_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \varepsilon.$$

とする

1. 極限 $T : X \to Y$ が存在することを示す. $\forall x \in X$ に対し.
$n, m \in \mathbb{N}$ が $n, m \geq N$ ならば

$$\|T_n x - T_m x\|_Y = \|(T_n - T_m)x\|_Y$$
$$\underset{T_n, T_m \in \mathcal{L}(X,Y)}{\leq} \|T_n - T_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \|x\|_X$$
$$< \varepsilon \|x\|_X \quad \text{—}(*)$$

より $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$ は Y 上の Cauchy列となるので

収束する. そこで $T : X \to Y$ を $Tx := \lim_{n \to \infty} T_n x$ で定義する

2. $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ を示す. Tが線形となることは各自確かめよ. (*)において $m \to \infty$ とすると

$$n \geq N \implies \|T_n x - Tx\|_Y \leq \varepsilon \|x\|_X \quad -(**)$$

となるので $n \geq N$ ならば

$$\|Tx\|_Y \leq \|Tx - T_n x\|_Y + \|T_n x\|_Y \leq (\varepsilon + \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)})\|x\|_X$$

となる. 命題1.2より $\|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ は有界だから.

$T \in \mathcal{L}(X,Y)$ がわかる.

3. $T_n \to T$ in $\mathcal{L}(X,Y)$ $(n \to \infty)$ を示す.

(**)を $\|x\|_X$ でわると.

$$\frac{\|(T_n - T)x\|_Y}{\|x\|_X} \leq \varepsilon$$

より $x \in X$, $x \neq 0$ について sup をとると $n \geq N$ ならば

$$\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|T_n x - Tx\|_Y}{\|x\|_X} \leq \varepsilon$$

となるので $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \to 0$ $(n \to \infty)$.

よって $T_n \to T$ in $\mathcal{L}(X,Y)$ $(n \to \infty)$ となる

$\square$

例 3.3

$\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^\infty$ とする. i.e. $\sup_{k\in\mathbb{N}} |\alpha_k| =: \gamma < \infty$ とする.

$1 \leq p \leq \infty$ に対し

$$\begin{cases} D(T) = \ell^p \\ Tx = (\alpha_1 \xi_1, \alpha_2 \xi_2, \cdots) \qquad (x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in \ell^p) \end{cases}$$

と定めると. $T \in \mathcal{L}(\ell^p, \ell^p)$ で $\|T\|_{\mathcal{L}(\ell^p,\ell^p)} = \gamma$.

証明 $1 \leq p < \infty$ のときのみ示す.

${}^\forall x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in \ell^p$ に対し.

$$\|Tx\|_{\ell^p}^p = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k \xi_k|^p \leq \gamma^p \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p = \gamma^p \|x\|_{\ell^p}^p$$

より $\|Tx\|_{\ell^p} \leq \gamma \|x\|_{\ell^p}$ となる. よって.

$$\sup_{\substack{x \in \ell^p \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_{\ell^p}}{\|x\|_{\ell^p}} \leq \gamma \text{ だから } \|T\|_{\mathcal{L}(\ell^p,\ell^p)} \leq \gamma.$$

逆向きの不等式を示すために. ${}^\forall \varepsilon > 0$ に対し.

$\gamma - \varepsilon \leq |\alpha_{k_0}|$ となる $k_0 \in \mathbb{N}$ をとる (sup の定義)

$\xi_i = \delta_{ik_0}$ $(i \in \mathbb{N})$ とし. $x_0 = (\xi_1, \xi_2, \cdots)$ と

すると.

$$\gamma - \varepsilon \leq |\alpha_{k_0}| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k \xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \|Tx_0\|_{\ell^p} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\ell^p, \ell^p)} \|x_0\|_{\ell^p}$$

$$= \|T\|_{\mathcal{L}(\ell^p, \ell^p)}$$

となるから $\gamma - \varepsilon \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\ell^p, \ell^p)}$. $\varepsilon \downarrow 0$ として.

$\gamma \leq \|T\|_{\mathcal{L}(\ell^p, \ell^p)}$ を得る $\square$.

例3.4 (たたみ込み, convolution)

$\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ に対し

$$\begin{cases} D(T) := L^p(\mathbb{R}^n) \\ Tf(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x-y) f(y)\, dy \quad (f \in L^p(\mathbb{R}^n),\ x \in \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

とおく. このとき. $T \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^n))$ となる.

$Tf = \rho * f$ とかき. ρ と f のたたみ込み (convolution)

という.

注意3.1

$$\rho_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) \quad (t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n)$$

でたたみ込み $\rho_t * f$ を考えることが非常に重要.

実際に、$u(t,x) = \rho_t * f(x)$ とおくと、

$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対し、

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = f(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

をみたすことが知られている。

例3.4 の証明

次の不等式

$$\|\rho * f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

を示せばよい。方針のみ述べる。$1 < p < \infty$ の場合のみ示す

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ として、

$$|\rho(x-y) f(y)| = |\rho(x-y)|^{\frac{1}{q}} \left(|\rho(x-y)|^{\frac{1}{p}} |f(y)| \right)$$

だから、Hölder の不等式より

$$|\rho * f(x)| \le \|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\rho(x-y)| |f(y)|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

となる。両辺 p 乗して積分すると

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\rho * f(x)|^p \, dx \le \|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\rho(x-y)| |f(y)|^p \, dy \right) dx$$

$$= \|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{p} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{p}$$

となる（詳細は 問4.8）　□

§§3.2 逆作用素

$f: X \to Y$ が全単射のとき，逆写像 $g = f^{-1}: Y \to X$

が定義でき，

$$g \circ f(x) = x \quad ({}^\forall x \in X), \quad f \circ g(y) = y \quad ({}^\forall y \in Y)$$

であった．

定義 3.4（逆作用素）

$T \in \mathcal{L}(X, Y)$ に対し

$$STx = x \quad ({}^\forall x \in X), \quad TSy = y \quad ({}^\forall y \in Y)$$

をみたす $S \in \mathcal{L}(Y, X)$ を T の逆作用素といい，$T^{-1} = S$ とかく．

命題 3.1

$T, S \in \mathcal{L}(X)$, ${}^\exists T^{-1}, S^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

$\Longrightarrow$ ${}^\exists (TS)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ s.t.

$$(TS)^{-1} = S^{-1} T^{-1}$$

証明

$x \in X$ に対し

I（恒等作用素 $Ix = x$ $(x \in X)$）

$$(S^{-1}T^{-1})(TS)x = S^{-1} \underbrace{T^{-1}T}_{= I}(Sx)$$

$$= S^{-1}(Sx) = S^{-1}Sx = x.$$

$y \in Y$ に対し $(TS)(S^{-1}T^{-1})y = y$ も同様 □

定理3.3

$T \in \mathcal{L}(X)$. $\|T\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$.

$\Rightarrow$ ◎ $(I-T)X = \{(I-T)x : x \in X\} = X$.

◎ ${}^{\exists}(I-T)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$

◎ $(I-T)^{-1} = I + T + T^2 + \cdots + T^n + \cdots$

(Neumann級数という)

◎ $\|(I-T)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \dfrac{1}{1-\|T\|_{\mathcal{L}(X)}}$.

注意3.2

$|x| < 1$ に対し

$$(1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

定理3.3は この x を T にかえられることを主張している.

証明 $(I-T)^{-1} = I + T + T^2 + \cdots + T^n + \cdots$ のみ示す.

$\|T\|_{\mathcal{L}(X)} < 1$ より $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \|T\|_{\mathcal{L}(X)}^n < \infty$ である. また.

$n \in \mathbb{N}$ に対し. $\|T^n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X)}^n$ より $m \geq n$ なら.

$$\left\|\sum_{k=0}^{m} T^k - \sum_{k=0}^{n} T^k\right\|_{\mathcal{L}(X)} = \left\|\sum_{k=n+1}^{m} T^k\right\|_{\mathcal{L}(X)}$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{m} \|T\|_{\mathcal{L}(X)}^k$$

となる よって $\left\{\sum_{k=0}^{n} T^k\right\}_{n=0}^{\infty}$ は $\mathcal{L}(X)$ 上の Cauchy列

より収束する（定理3.2）. $S = \sum_{k=0}^{\infty} T^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T^k$

とおくと

$$ST = \sum_{k=0}^{\infty} T^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k - I = S - I.$$

$$TS = \cdots = S - I$$

より $S(I-T) = I$, $(I-T)S = I$. となるので

$S = (I-T)^{-1}$ となる.

§§ 3.3 閉作用素

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad \text{in } (0,\infty)\times\Omega$$

を $-\Delta = A$ として.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0 \quad \text{in } (0,\infty)$$

として. 関数解析の結果を使いたいが

A は $C(\overline{\Omega})$ 上で定義できない. また.

$C^2(\overline{\Omega})$ にすると. 空間が狭すぎてしまう.

そのため $D(A) = C^2(\overline{\Omega})$. $X = C(\overline{\Omega})$

のようにしたい. つまり有界作用素 より.

弱い概念が必要になる.

定義3.5（閉作用素）

$T: D(T) \subset X \to Y$：線形作用素

$$\|x\|_{D(T)} := \|x\|_X + \|Tx\|_Y \quad (x \in D(T))$$

と定義すると $x \in D(T)$ のノルムになる（グラフノルムという）.

Tが閉作用素

$\underset{\text{定義}}{\iff}$ $D(T)$がグラフノルム $\|\cdot\|_{D(T)}$ で閉集合

例3.5

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$：領域

$$\begin{cases} D(-\Delta) = C^2(\overline{\Omega}) \\ -\Delta u = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \cdots - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \quad (u \in C^2(\overline{\Omega})) \end{cases}$$

は$C(\overline{\Omega})$で閉作用素になる.

注意3.3

例3.5は偏微分方程式ではやや扱いにくい.

より扱いやすいHilbert空間で扱うことが多い.

(key word: Sobolev空間, 超関数, 弱微分)

定理3.4

$T: D(T) \subset X \to Y$ が閉作用素

$\underset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(T)$ が ある $x \in X$, $y \in Y$ に対し

$$x_n \longrightarrow x \quad \text{in } X \quad (n \to \infty)$$

$$Tx_n \longrightarrow y \quad \text{in } Y \quad (n \to \infty)$$

ならば $x \in D(T)$ かつ $Tx = y$.

§4 発展方程式

$$(4.1)\quad \begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{dt}(t) = A\vec{u}(t), & t>0. \\ \vec{u}(0) = \vec{u_0} \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

A : $d \times d$ 行列

$$\Rightarrow \vec{u}(t) = e^{tA}\vec{u_0}$$
$$= \left(I + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots\right)\vec{u_0}$$

〈有界作用素における発展方程式〉

$$(4.2)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t), & t>0. \\ u(0) = u_0 \in X. \end{cases}$$

X : Banach space, $A \in \mathcal{L}(X)$

<u>Thm.</u>

$$u(t) = e^{tA}u_0 = \left(I + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \cdots\right)u_0.$$

$\Rightarrow$ u : solution of (4.2)

Key of proof

$N \in \mathbb{N}$ に対し

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} \frac{t^n}{n!} A^n \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{t^n}{n!} \| A^n \|_{\mathcal{L}(X)}$$

↑
三角不等式

$$\leq \sum_{n=0}^{N} \frac{t^n}{n!} \|A\|_{\mathcal{L}(X)}^n \leq e^{t\|A\|_{\mathcal{L}(X)}}.$$

$$N \to \infty \implies \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n \right\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{t\|A\|_{\mathcal{L}(X)}}$$

広義一様絶対収束 $\Rightarrow$ 級数と微積分の交換は自由にできる ▨

〈熱方程式．非有界作用素〉

$$(H) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \Delta u(t,x) & t>0,\ x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}$, $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$.

$A = \Delta$ として．(4.2)と同じように扱いたい

$\rightsquigarrow$ うまくいかない．

$$\begin{cases} D(\Delta) : \text{Sobolev 空間} \\ \quad\quad \text{(弱い微分ができる空間)} \\ \Delta : L^p(\mathbb{R}^n) \text{では非有界作用素} \\ \quad\quad \text{(閉作用素にはなる. 実はもう少しよい作用素)} \end{cases}$$

〈吉田正則化 (Yosida approximation)〉

吉田耕作

$\lambda > 0$ に対し $A = \Delta$ とすると

$A_\lambda := \frac{1}{\lambda}\left(I - (I - \lambda A)^{-1}\right)$ は 有界作用素.

$$A_\lambda \approx \frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{I}{I - \lambda A}\right) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{I - \lambda A - I}{I - \lambda A}\right)$$

$$= \frac{-A}{I - \lambda A} \longrightarrow -A = -\Delta \quad (\lambda \downarrow 0)$$

このとき

$$e^{tA_\lambda} \longrightarrow e^{tA} = e^{t\Delta} \quad (\lambda \downarrow 0)$$

によって $e^{t\Delta}$ を定義できる

Thm.

$u(t) = e^{t\Delta} u_0 \Rightarrow u$: solution of (H).

Rem.

Fourier 解析を用いると $G_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n-1}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$

とおいて.

$$e^{t\Delta} u_0 = \int_{\mathbb{R}^n} G_t(x-y) u_0(y)\, dy = G_t * u_0(x)$$

と書き下すことができる.

〈Navier-Stokes 方程式〉

$$(NS) \begin{cases} \dfrac{\partial \vec{u}}{\partial t} - \Delta \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla p = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^3 \\ \operatorname{div} \vec{u} = 0 & \\ \vec{u}(0,x) = \vec{u_0}(x) & \end{cases}$$

unknown $\vec{u} = \vec{u}(t,x) = (u^1(t,x), u^2(t,x), u^3(t,x))$

$p = p(t,x)$

given $\vec{u_0} = \vec{u_0}(x) = (u_0^1(x), u_0^2(x), u_0^3(x))$

$$\Delta \vec{u} = (\Delta u^1, \Delta u^2, \Delta u^3)$$

$$(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = \left(\sum_{j=1}^{3} u^j \frac{\partial u^i}{\partial x_j}\right)_{i=1,2,3}$$

$$\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2}, \frac{\partial p}{\partial x_3}\right)$$

の加藤敏夫，藤田宏，儀我美一，....）

Navier-Stokes 方程式は熱方程式に似ている

$\leadsto$ $e^{t\Delta}$ で解けないか？

<u>Thm.</u> （T. Kato 1984, Y. Giga 1986）

$\vec{u}_0 \in L^3_\sigma(\mathbb{R}^3) = \{\vec{u} \in L^3(\mathbb{R}^3) : \operatorname{div} \vec{u} = 0\}$

$\Longrightarrow$ ${}^\exists T>0$. ${}^\exists 1\, u(t) \in L^3_\sigma(\mathbb{R}^3)$, $0<t<T$. s.t.

u : solution of (NS), smooth.

Furthermore $\|\vec{u}_0\|_{L^3} \ll 1 \Rightarrow T=\infty$.

証明は $e^{t\Delta}$ と Duhamel の原理（常微分方程式を積分方程式にかきかえる）を用いる．

〈Clay' millennium prize problems〉

$\|\vec{u}_0\|_{L^3}$ の大きさに依らずに $T=\infty$ とできるか？

<u>参照</u>

小薗英雄「ナビエ-ストークス方程式　クレイ懸賞問題のいま」

数学セミナー 2010年2月号特集「ナヴィエ-ストークス方程式」