現代解析学 IV –関数解析学序論–

イントロダクション: どうやって偏微分方程式を解くか？

スカラー値常微分方程式. 最初は, スカラー値の常微分方程式を考える.

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t), \quad t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{0.1}$$

ここで $u = u(t) \in \mathbb{R}$ は変数 t に対する未知関数とし, $u_0 \in \mathbb{R}$ と $A \in \mathbb{R}$ は与えられた定数とする. この方程式を解くには, 積分因子を両辺にかければよい. 実際に方程式から

$$\frac{du}{dt}(t) - Au(t) = 0$$

だから, e^{-tA} をかけると (これに気がつくかどうかは, 慣れ, ないしは初等関数をどれだけよく理解しているかが大きい)

$$e^{-tA}\frac{du}{dt}(t) - e^{-tA}Au(t) = 0$$

より, この式をよーくよく見てみると

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-tA}Au(t)\right) = 0$$

となっていることに気がつく (積の微分に注意してたしかめてみよ). 従って, 両辺 t について積分すると, 微積分の基本定理 (ないしは, 微分が 0 より, 微分されている関数は時間に依存しない) から, 初期条件により

$$e^{-tA}u(t) = e^{-0t}u(0) = u_0$$

がわかる. 従って, (0.1) の解は $u(t) = e^{tA}u_0$ となることがわかった.

ベクトル値常微分方程式. 次にベクトル値常微分方程式を考えてみる.

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{dt}(t) = A\vec{u}(t), \quad t > 0, \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0. \end{cases} \tag{0.2}$$

ここで $\vec{u} = \vec{u}(t) \in \mathbb{R}^n$ は変数 t に対する未知のベクトル値関数とし, ベクトル $\vec{u}_0 \in \mathbb{R}^n$ と n 次実対称行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ は与えられているとする. このときスカラー値と同じように

$$\vec{u}(t) = e^{tA}\vec{u}_0$$

であればいいなあと思える. では e^{tA} は何者だろうか？

行列の指数関数. $x \in \mathbb{R}$ に対して, 指数関数 e^x を $x = 0$ のまわりで Taylor 展開すると

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots$$

であった. そこで, e^{tA} をこの Taylor 展開から類推して

$$e^{tA} := I + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + \ldots$$

と定義してみよう. すると,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\vec{u}_0\right) &= \frac{d}{dt}\left(\vec{u}_0 + \frac{t}{1!}A\vec{u}_0 + \frac{t^2}{2!}A^2\vec{u}_0 + \frac{t^3}{3!}A^3\vec{u}_0 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n\vec{u}_0 + \ldots\right) \\
&= \frac{1}{1!}A\vec{u}_0 + \frac{2t}{2!}A^2\vec{u}_0 + \frac{3t^2}{3!}A^3\vec{u}_0 + \cdots + \frac{nt^{n-1}}{n!}A^n\vec{u}_0 + \ldots \\
&= A\vec{u}_0 + \frac{t}{1!}A^2\vec{u}_0 + \frac{t^2}{2!}A^3\vec{u}_0 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n\vec{u}_0 + \ldots \\
&= A\left(\vec{u}_0 + \frac{t}{1!}A\vec{u}_0 + \frac{t^2}{2!}A^2\vec{u}_0 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^{n-1}\vec{u}_0 + \ldots\right) \\
&= A\left(e^{tA}\vec{u}_0\right)
\end{aligned}$$

かつ

$$e^{0A}\vec{u}_0 = \vec{u}_0 + \frac{0}{1!}A\vec{u}_0 + \frac{0^2}{2!}A^2\vec{u}_0 + \frac{0^3}{3!}A^3\vec{u}_0 + \cdots + \frac{0^n}{n!}A^n\vec{u}_0 + \cdots = \vec{u}_0$$

となるから, $\vec{u}(t) = e^{tA}\vec{u}_0$ はたしかに (0.2) の解となっている.

さて, $x \in \mathbb{R}^n$ に対して, $Ax =: Tx$ とおくと, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は線型写像になる. そこで, A と T をいま同じものだと思っておくことにすると, 方程式 (0.2) の

$$\frac{d\vec{u}}{dt}(t) = A\vec{u}(t)$$

の右辺は, $\vec{u}(t)$ を線型写像 A でうつしたものだと考えることができる.

熱方程式. 次に, 偏微分方程式の一つである, 熱方程式を考えてみる.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \Delta u(t,x), & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{0.3}$$

ここで $u = u(t) = u(t,x) \in X$ は変数 t, x に対する未知関数, $u_0 \in X$ は与えられており, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ と書いたときに Δ は Laplacian

$$\Delta u(t) = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_1}(t) + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_2}(t) + \ldots \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_n}(t)$$

である. X は何者かはさっぱりわからないが, とりあえず線形空間だとしておき, $A = \Delta$ と思うことにすると, 方程式 (0.3) は

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t), & t > 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{0.4}$$

とみてもよさそうだと思える．すると，今までの方法と同じようにして，$u(t) = e^{tA}u_0 = e^{t\Delta}u_0$ ならいいなぁと思える．

しかし，問題はそんなに易しくはない．なにしろ X **は何なのか？や** $e^{t\Delta}$ **は何なのか？**を答えなければいけないのである．答えからさきにいってしまうと，X **は無限次元の線形空間 (関数空間)** である．また，$e^{t\Delta}$ **は残念ながら Taylor 展開で作れるものではない．**

$A = \Delta$ でこの議論をやろうとするには，実はこの講義の内容とさらにいくつかの準備が必要である (しかも，その準備は結構たいへんなものもあり，卒業研究の 1 年間で熱方程式の解の存在まできちんとできたら，とてもすごい)．ただ，もう少し都合のよい A では，実際に Taylor 展開と一致することが知られている．この講義では，そこを最終目標にすえる．残念ながら，この講義の内容だけでは**重要な偏微分方程式の解の存在までは説明できない．**しかし，この講義の中で**関数を点だと思って，線形代数をやろうとしている**という感覚が少しでも身についてもらえれば幸いである．

1. ノルム空間と Banach 空間

線形空間． X が $\mathbb{R}$ 上の線形空間であるとは，$x, y \in X$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，和 $x + y \in X$ とスカラー倍 αx が定義できて，次の 8 条件をみたすことをいう:

1. $(x + y) + z = x + (y + z) \quad (\forall x, y, z \in X)$,
2. $x + y = y + x \quad (\forall x, y \in X)$,
3. 零元 $0 \in X$ が存在して，$x + 0 = 0 + x = x \quad (\forall x \in X)$,
4. $\forall x \in X$ に対して，逆元 $(-x) \in X$ が存在して，$x + (-x) = (-x) + x = 0$,
5. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \quad (\forall x \in X,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R})$,
6. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \quad (\forall x, y \in X,\ \alpha \in \mathbb{R})$,
7. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) \quad (\forall x \in X,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R})$,
8. $1x = x \quad (\forall x \in X)$.

$\mathbb{C}$ 上の線形空間で扱うこともできるが，話を簡単にするために本稿では，$\mathbb{R}$ 上の線形空間しか扱わない．ただし，Schrödinger 方程式や波動方程式を勉強するためには，$\mathbb{C}$ 上の線形空間が必要である．

例 1.1.

$$C([0, 1]) := \{f : [0, 1] \to \mathbb{R},\ \text{連続}\}$$

は $f, g \in C([0, 1])$, $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して，$f + g$, αf を

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad (x \in [0, 1])$$
$$(\alpha f)(x) := \alpha f(x) \quad (x \in [0, 1])$$

と定めることにより，$\mathbb{R}$ 上の線形空間となる．

注意 1.1.

$f, g \in C([0, 1])$ に対して

$$f = g \underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} f(x) = g(x) \quad (\forall x \in [0, 1])$$

より, $f+g=g+f$ を示すには, $\forall x \in [0,1]$ に対して, $(f+g)(x)=(g+f)(x)$ を示さないといけない. 他も同様である. つまり, 書くことが多くなり, 証明をきっちり書ききるのは面倒であり, 省略されることが多い.

1.1. ノルム空間. $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ に対して, $\|x\|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$ とおくと

1. $\|x\|\geq 0 \quad (\forall x\in\mathbb{R}^n)$,
2. $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0 \quad (\forall x\in\mathbb{R}^n)$,
3. $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\| \quad (\forall x\in\mathbb{R}^n,\ \alpha\in\mathbb{R})$,
4. $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\| \quad (\forall x,y\in\mathbb{R}^n)$,

が成り立つ. これは, 線形空間の元の大きさを表している. このことを一般化する.

定義 1.1 (ノルム空間)**.**
X を線形空間とする. $x\in X$ に対して, $\|x\|_X\in\mathbb{R}$ が定まり, 次の 4 条件をみたすとき, $\|x\|_X\in\mathbb{R}$ を x の**ノルム**という.

1. $\|x\|_X\geq 0 \quad (\forall x\in X)$,
2. $\|x\|_X=0 \Leftrightarrow x=0 \quad (\forall x\in X)$,
3. $\|\alpha x\|_X=|\alpha|\|x\|_X \quad (\forall x\in X,\ \alpha\in\mathbb{R})$,
4. (三角不等式) $\|x+y\|_X\leq\|x\|_X+\|y\|_X \quad (\forall x,y\in X)$.

また, ノルムが定義されている空間を**ノルム空間**という.

X をノルム空間とするとき

$$d(x,y):=\|x-y\|_X \quad (\forall x,y\in X)$$

と定めると, d は X 上の距離になる. すなわち, 次の 4 条件が成立する.

1. $d(x,y)\geq 0 \quad (\forall x,y\in X)$,
2. $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y \quad (\forall x,y\in X)$,
3. $d(x,y)=d(y,x) \quad (\forall x,y\in X)$,
4. (三角不等式) $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z) \quad (\forall x,y,z\in X)$.

従って, **ノルム空間は距離空間である.**

定義 1.2 (点列の収束)**.**
X をノルム空間, $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset X$, $x\in X$ とする. このとき $x_n\to x \text{ in } X \quad (n\to\infty)$ であるとは

$$d(x_n,x)=\|x_n-x\|_X\to 0 \quad (n\to\infty)$$

となることをいう. つまり距離空間としての収束と同じである.

命題 1.1.
X をノルム空間, $\{x_n\}_{n=1}^\infty,\{y_n\}_{n=1}^\infty\subset X$, $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb{R}$ とする.

(1) $x_n\to x$ in X, $y_n\to y$ in $X \quad (n\to\infty)$ ならば $x_n+y_n\to x+y$ in $X \quad (n\to\infty)$.
(2) $x_n\to x$ in X, $\alpha_n\to\alpha$ in $\mathbb{R} \quad (n\to\infty)$ ならば $\alpha_n x_n\to\alpha x$ in $X \quad (n\to\infty)$.
(3) $x_n\to x$ in $X \quad (n\to\infty)$ ならば $\|x_n\|_X\to\|x\|_X$ in $\mathbb{R} \quad (n\to\infty)$.

例 1.2.
$f \in C([0,1])$ に対して

$$\|f\|_{C([0,1])} := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

と定めると, $\|f\|_{C([0,1])}$ は f のノルムとなる.

例 1.3 (数列空間)**.**
$1 \le p < \infty$ に対して,

$$l^p := \left\{ x = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} : \|x\|_{l^p} < \infty \right\}$$
$$\|x\|_{l^p}^p := \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \quad (x = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^p)$$

と定める. このとき, l^p は線形空間であり, $\|x\|_{l^p}$ は $x \in l^p$ のノルムとなる.

例 1.4 (Lebesgue 空間)**.**
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域とする. $1 \le p < \infty$ に対して,

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ \text{Lebesgue 可測},\ \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty \right\}$$
$$\|f\|_{L^p(\Omega)}^p := \int_\Omega |f(x)|^p \, dx \quad (f \in L^p(\Omega))$$

と定める. このとき, $L^p(\Omega)$ は線形空間であり, $\|f\|_{L^p(\Omega)}$ は $f \in L^p(\Omega)$ のノルムとなる. ただし,

$$f = g \underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} f(x) = g(x) \quad \text{for almost all } x \in \Omega$$

である.

1.2. **Banach 空間.** $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ の違いをひとことでいうと, **Cauchy 列が収束するか否かである**. 常微分方程式の解の存在定理は, 通常, Cauchy 列が収束することを用いて示す. そのため, ノルム空間においても, **Cauchy 列が収束するか否かは重要な問題である**.

定義 1.3 (Cauchy 列)**.**
ノルム空間 X に対して, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ が **X 上の Cauchy 列**であるとは, $\forall \varepsilon > 0$ に対して, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して, $\forall n.m \in \mathbb{N}$ に対して

$$n, m \ge N \Longrightarrow \|x_n - x_m\|_X < \varepsilon$$

とできるときをいう.

定義 1.4 (Banach 空間)**.**
ノルム空間 X が **Banach 空間**であるとは, 任意の X 上の Cauchy 列が収束することをいう.

これは, Banach 空間を距離空間とみたときに, **完備**であることと同じである. よって, Banach 空間においては (常微分方程式において重要な) 縮小写像の原理が示せる.

例 1.5 (有限次元空間).
$d \in \mathbb{N}$ と $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ に対して,

$$\|x\|_{\mathbb{R}^d} := \sqrt{(x_1)^2 + \cdots + (x_d)^2}$$

とおく. このとき, $\mathbb{R}^d$ は Banach 空間になる.

定理 1.1.
X を有限次元線形空間とし, $\|x\|_X$ を $x \in X$ のノルムとする. このとき, X は Banach 空間になる.

つまり, 有限次元の場合には, (係数体が $\mathbb{R}$ か $\mathbb{C}$ のときには) 常に Banach 空間となる. Banach 空間か否かは無限次元のときにはじめて問題になる.

命題 1.2.
X をノルム空間とし, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ を X 上の Cauchy 列とする. このとき, $\{\|x_n\|_X\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ 上の Cauchy 列となる. とくに, $\{\|x_n\|_X\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{R}$ 上の収束列となり, 有界である.

例 1.6.
$C([0,1])$ は Banach 空間である. 例 1.2 を参照せよ.

例 1.7.
$1 \leq p < \infty$ に対して, l^p は Banach 空間である. 例 1.3 を参照せよ.

例 1.8.
$1 \leq p < \infty$ に対して,

$$X := \{f : (-1,1) \to \mathbb{R}, \text{連続}, \|f\|_{L^p(-1,1)} < \infty\}$$
$$\|f\|_{L^p(-1,1)}^p := \int_{-1}^{1} |f(x)|^p \, dx$$

とおくと, X は **Banach 空間でない**.

例 1.9.
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域とする. $1 \leq p < \infty$ に対して,

$$X := \{f : \Omega \to \mathbb{R}, \text{Lebesgue 可測}, \|f\|_{L^p(-1,1)} < \infty\}$$
$$\|f\|_{L^p(\Omega)}^p := \int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx$$

とおくと, X は **Banach 空間となる**. 例 1.4 も参照せよ.

注意 1.2.
Lebesgue 積分が必要なのは, 例 1.8 の問題点を Riemann 積分では回避できないからである. これは, 連続を Riemann 積分可能にしてもうまくいかない. ただし, 理論的には完備性のある Lebesgue 積分が有効であるが, 具体的な計算では Riemann 積分を使うことが多い.

2. Hilbert 空間

2.1. Hilbert 空間.

定義 2.1 (内積)**.**
X を線形空間, $x, y \in X$ に対して, $(x, y)_X \in \mathbb{R}$ が x と y の内積であるとは, 次の 4 条件を満たすことをいう.

(i) $(x, x)_X \geq 0 \quad (\forall x \in X)$
(ii) $(x, x)_X = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \quad (x \in X)$
(iii) $(x, y)_X = (y, x)_X \quad (\forall x, y \in X)$
(iv) $(\alpha x_1 + x_2, y)_X = \alpha(x_1, y)_X + (x_2, y)_X \quad (\forall x_1, x_2, y \in X,\ \alpha \in \mathbb{R})$.

和とスカラー倍に関する定義は, 本当は別々に書いた方がよいが, 証明するときは, $\alpha x_1 + x_2$ だけやればよいことが多い. 実際, $\alpha = 1$ とすれば, $x_1 + x_2$ であり, $x_2 = 0$ とすれば, αx_1 となるから, これだけ確認しておけば, 実はすべての場合を網羅していることになっている.

定理 2.1 (Schwarz の不等式)**.**
線形空間 X に内積 $(\cdot, \cdot)_X$ が定義されているとき

$$|(x, y)_X| \leq \|x\|_X \|y\|_X \quad (\forall x, y \in X)$$

が成り立つ.

定理 2.2.
$x, y \in X$ に内積 $(\cdot, \cdot)_X$ が定義されているとき

$$\|x\|_X := \sqrt{(x, x)_X} \quad (\forall x \in X)$$

とおくと, $\|x\|_X$ は $x \in X$ のノルムになる.

定義 2.2 (Hilbert 空間)**.**
H を線形空間とし, $(\cdot, \cdot)_H$ を内積とすると, 定理 2.2 により, H はノルム空間となるが, このノルム $\|\cdot\|_H$ に関して H が完備となるとき, H を Hilbert 空間という.

例 2.1.
$x = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, y = \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$ に対して,

$$(x, y)_{l^2} := \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

と定めると, $(\cdot, \cdot)_{l^2}$ は l^2 の内積となり,

$$\|x\|_{l^2} = \sqrt{(x, x)_{l^2}} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2}$$

となるから完備となる (例 1.7 を参照せよ). 従って ^{2} は Hilbert 空間である.

例 2.2.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域として, $f, g \in L^2(\Omega)$ に対し

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega f(x)g(x)\,dx$$

とおくと, $(\cdot,\cdot)_{L^2(\Omega)}$ は内積となり,

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{(f,f)_{L^2(\Omega)}} = \sqrt{\int_\Omega |f(x)|^2\,dx}$$

となるので完備である (例 1.9). 従って, $L^2(\Omega)$ は Hilbert 空間である.

2.2. 直交分解定理.

定義 2.3 (直交)**.**

H を lHilbert 空間, $x, y \in H$, $X, Y \subset H$ とする.

- $x \perp y$ であるとは $(x, y)_H = 0$ となることをいう.
- $X \perp Y$ であるとは任意の $x \in X$, $y \in Y$ に対して, $(x, y)_H = 0$ となることをいう.
- $X^\perp := \{y \in X : x \perp y\ (\forall x \in X)\}$ と書く. $X^\perp$ を X の直交補空間という.

定理 2.3 (直交分解定理)**.**

H を Hilbert 空間, $X \subset H$ を閉部分空間とする. このとき任意の $z \in H$ に対して, ただ一つの $x \in X$, $y \in X^\perp$ が存在して, $z = x + y$ とできる. すなわち, $H = W \oplus W^\perp$ となる.

このとき, $H \ni z \mapsto x \in X$ を**直交射影**といい, $P_X z := x$ とかく.

例 2.3.

Ω を有界領域とし,

$$X := \left\{ u \in L^2(\Omega) : \int_\Omega u(x)\,dx = 0 \right\}$$

とおくと, X は $L^2(\Omega)$ 内の閉部分空間となる. X への射影 P_X は $u \in L^2(\Omega)$ に対して

$$(P_X u)(x) = u(x) - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(y)\,dy \quad (x \in \Omega)$$

で与えられる.

2.3. 正規直交系.

定義 2.4 (正規直交系)**.**

H を Hilbert 空間, $\{x_n\} \subset H$ をたかだか可算集合 (つまり, 有限集合か可算集合) とする. このとき, $\{x_n\}$ が正規直交系であるとは, 任意の添字 i, j に対して, $(x_i, x_j)_H = \delta_{ij}$ が成り立つことをいう.

例 2.4.

$L^2(0,\pi)$ において, $\left\{ \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sin(nx) \right\}_{n\in\mathbb{N}}$ は正規直交系となる.

以下, 話を簡単にするために, 正規直交系はつねに可算集合の場合のみを考えることにする. 有限集合の場合も, 少しだけ修正すれば同様のことが成立する.

命題 2.1 (Bessel の不等式)**.**
$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ を正規直交系とすると

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(x, x_k)_H|^2 \le \|x\|_H^2 \quad (\forall x \in H)$$

が成り立つ.

定理 2.4.
$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ を正規直交系とすると以下は同値となる.

(1) $H = \overline{\left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k : \alpha_k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}}^H$.

(2) $x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, x_k)_H x_k \quad (\forall x \in H)$

(3) (Perseval の等式) $\|x\|_H^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, x_k)_H|^2 \quad (\forall x \in H)$

(4) $\forall x \in H$, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して, $(x, x_n)_H = 0$ ならば, $x = 0$.

定義 2.5 (完全正規直交系)**.**
定理 2.4 の (1) から (4) のどれか (すなわち, すべて) をみたすとき, $\{x_n\}$ は H の完全正規直交系という.

例 2.5.
l^2 において

$$e_j = \{\delta_{ij}\}_{i=1}^{\infty} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$$

とおくと, $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ は l^2 における完全正規直交系となる.

3. 線形作用素

以下, X, Y は Banach 空間とする.

3.1. 有界線形作用素.

定義 3.1 (線形作用素)**.**
$D \subset X$ を線形部分空間, $T : D \to Y$ とする (以下, $T : D \subset X \to Y$ と書く). このとき, T が線形作用素であるとは, 次をみたすことをいう:

(1) 任意の $x_1, x_2 \in D$ に対して, $T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2$;
(2) 任意の $x \in D$, $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, $T(\alpha x) = \alpha Tx$;

このとき, D を線形作用素 T の定義域といい, $D(T)$ と書く.

例 3.1.
$X = Y = C([0,1])$ とする.

$$\begin{cases} D(T) := X = C([0,1]) \\ Tf(x) := \displaystyle\int_0^x f(y)\, dy \quad (f \in D(T),\ x \in [0,1]) \end{cases}$$

と定めたとき, T は線形作用素となる.

例 3.2.

$$\begin{cases} D(T) := C^1([0,1]) \subsetneq C([0,1]) \\ Tf(x) := f'(y) \quad (f \in D(T),\ x \in [0,1]) \end{cases}$$

と定めたとき, T は線形作用素となる.

定義 3.2 (連続作用素)**.**
$T : D(T) \subset X \to Y$ を線形作用素とする．このとき, T が連続であるとは, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(T)$, $x \in D(T)$ が

$$x_n \to x \text{ in } X \quad (n \to \infty)$$

ならば,

$$Tx_n \to Tx \text{ in } Y \quad (n \to \infty)$$

をみたすことをいう.

定理 3.1.
$T : D(T) \subset X \to Y$ を線形作用素とする．このとき, T が連続であることと, $M > 0$ が存在して, 任意の $x \in D(T)$ に対して, $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$ が成立することは同値である.

定義 3.3 (有界作用素)**.**
$T : D(T) \subset X \to Y$ を線形作用素とする．このとき, T が有界であるとは, $M > 0$ が存在して, 任意の $x \in D(T)$ に対して, $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X$ とできることをいう．このとき

$$\mathscr{L}(X,Y) := \{T : X \to Y,\ \text{有界線形作用素},\ D(T) = X\}$$
$$\mathscr{L}(X) := \mathscr{L}(X,X), \qquad X^* := \mathscr{L}(X,\mathbb{R}),$$
$$\|T\|_{\mathscr{L}(X,Y)} := \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \quad (T \in \mathscr{L}(X,Y))$$

と書く．特に X^* は X の共役空間 (dual space) という.

$\mathscr{L}(X,Y)$ は自然に和とスカラー倍が定義できる．すなわち, $T, S \in \mathscr{L}(X,Y)$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$(T+S)x := Tx + Sx \quad (x \in X)$$
$$(\alpha T)x := \alpha Tx \quad (x \in X)$$

により, $T + S$, αT が定義でき, $\mathscr{L}(X,Y)$ がノルム空間となることがわかる.

定理 3.2.
$\mathscr{L}(X,Y)$ は Banach 空間である.

例 3.3.
$\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^{\infty}$ とし, $\sup_{k \in \mathbb{N}} |\alpha_k| = \gamma$ とする．$1 \leq p \leq \infty$ に対して,

$$\begin{cases} D(T) := l^p \\ \quad Tx := (\alpha_1\xi_1, \alpha_2\xi_2, \ldots) \quad (x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^p) \end{cases}$$

と定めるとき, $T \in \mathscr{L}(l^p)$ で $\|T\|_{\mathscr{L}(l^p)} = \gamma$ となる.

例 3.4 (たたみ込み, convolution)**.**
$\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$ にたいして,

$$\begin{cases} D(T) := L^p(\mathbb{R}^n) \\ Tf(x) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x-y)f(y)\,dy \quad (f \in L^p(\mathbb{R}^n),\ x \in \mathbb{R}^n) \end{cases}$$

とおく．このとき $T \in \mathscr{L}(L^p(\mathbb{R}^n))$ となる．$Tf =: \rho * f$ と書き, ρ と f のたたみ込み (convolution) という.

注意 3.1.
$t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\rho_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

でたたみ込み $\rho_t * f$ を考えることが非常に重要である．実際に $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対し, $u(t,x) = \rho_t * f(x)$ とおくと

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \Delta u(t,x), & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

となる, すなわち, 初期値 f に対する熱方程式の初期値問題の解となることが知られている.

3.2. 逆作用素.

定義 3.4 (逆作用素)**.**
$T \in \mathscr{L}(X,Y)$ とする．任意の $x \in X$ と $y \in Y$ に対して

$$STx = x, \qquad TSy = y$$

をみたす $S \in \mathscr{L}(Y,X)$ を T の逆作用素といい, $T^{-1} = S$ と書く.

命題 3.1.
$T, S \in \mathscr{L}(X)$ は逆作用素 $T^{-1}, S^{-1} \in \mathscr{L}(X)$ を持つとする．このとき, $TS \in \mathscr{L}(X)$ に対する逆作用素 $(TS)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$ が存在して $(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$ となる.

定理 3.3.
$T \in \mathscr{L}(X)$ は $\|T\|_{\mathscr{L}(X)} < 1$ をみたすとする．このとき, 次が成り立つ:
- $(I-T)X = \{(I-T)x : x \in X\} = X$;
- $I-T$ の逆作用素 $(I-T)^{-1} \in \mathscr{L}(X)$ が存在する;
- $(I-T)^{-1}$ は Neumann 級数表示ができる, すなわち
$$(I-T)^{-1} = I + T + T^2 + T^3 + \cdots + T^n + \cdots$$
とかける.
- $\|(I-T)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \le \dfrac{1}{1 - \|T\|_{\mathscr{L}(X)}}$ が成り立つ.

注意 3.2.
$|x| < 1$ に対して

$$(1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

が成り立つ. 定理 3.3 はこの x を T にかえられることを主張している.

3.3. 閉作用素.

定義 3.5 (閉作用素)**.**
$T : D(T) \subset X \to Y$ を線形作用素とする. このとき

$$\|x\|_{D(T)} := \|x\|_X + \|Tx\|_Y \quad (x \in D(T))$$

と定義すると, $x \in D(T)$ のノルムになる (グラフノルムという).
T が閉作用素であるとは, $D(T)$ がグラフノルム $\|\cdot\|_{D(T)}$ で閉集合になることをいう.

例 3.5.
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域とする. このとき

$$\begin{cases} D(-\Delta) := C^2(\overline{\Omega}) \\ -\Delta u := -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \cdots - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \quad (u \in C^2(\overline{\Omega})) \end{cases}$$

とすると, $-\Delta$ は $C(\overline{\Omega})$ で閉作用素になる.

注意 3.3.
例 3.5 は偏微分方程式ではやや扱いにくい. より扱いやすい Hilbert 空間で扱うことが多い. 興味があれば, 「Sobolev 空間」, 「弱微分」, 「超関数」について調べてみよ.

定理 3.4.
$T : D(T) \subset X \to Y$ が閉作用素であることと次は同値である: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(T)$ がある $x \in X$, $y \in Y$ に対して,

$$x_n \to x \quad \text{in } X \quad (n \to \infty)$$
$$Tx_n \to y \quad \text{in } Y \quad (n \to \infty)$$

ならば, $x \in D(T)$ かつ $Tx = y$.