§1 イントロダクション（変分原理と微分方程式）

$C_0^1[0,1] = \{ v : [0,1] \to \mathbb{R},\ C^1$級$,\ v(0) = v(1) = 0 \}$.

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$, 連続. $F(\xi) := \int_0^\xi f(\eta)\, d\eta$.

$$E[u] := \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} \left| \frac{du}{dx} \right|^2 + F(u) \right\} dx \quad (u \in C_0^1[0,1])$$

運動エネルギー　　ポテンシャルエネルギー（位置エネルギー）

Eを u のエネルギーということにする.

〈変分原理, 最小エネルギー原理〉

「エネルギーは最小」が実現される.

そこで

(V) $$E[u] = \inf_{v \in C_0^1[0,1]} E[v]$$

となる $u \in C_0^1[0,1]$ が知りたい.

… が解の公式みたいなものを作るのは困難.

◎ uはどのような性質を持っているか？を考える。

$^\forall t \in \mathbb{R}$，$^\forall \phi \in C_0^1(0,1)$ に対して，uが(V)をみたすなら，

$$E[u] \leq E[u+t\phi]$$

よって $\displaystyle \frac{d}{dt} E[u+t\phi]\Big|_{t=0} = 0$ となるはず！！

$$\frac{d}{dt} E[u+t\phi] = \frac{d}{dt}\int_0^1 \left\{ \frac{1}{2}\left|\frac{d(u+t\phi)}{dx}\right|^2 + F(u+t\phi) \right\} dx$$

$$\left|\frac{du}{dx} + t\frac{d\phi}{dx}\right|^2 = \left|\frac{du}{dx}\right|^2 + 2t\frac{du}{dx}\frac{d\phi}{dx} + t^2\left|\frac{d\phi}{dx}\right|^2$$

$$= \int_0^1 \left\{ \frac{du}{dx}\frac{d\phi}{dx} + t\left|\frac{d\phi}{dx}\right|^2 + F'(u+t\phi)\phi \right\} dx$$

とりあえず
微分と積分の交換は
きにしない

だから

$$\frac{d}{dt} E[u+t\phi]\Big|_{t=0} = \int_0^1 \left\{ \frac{du}{dx}\frac{d\phi}{dx} + F'(u)\phi \right\} dx$$

$$= \int_0^1 \left\{ -\frac{d^2u}{dx^2} + f(u) \right\} \phi \, dx$$

部分積分，

$F'(u) = f(u)$

ϕは任意だったことから微分方程式

(EL) $$-\frac{d^2u}{dx^2}+f(u)=0$$

が得られる. (EL)をエネルギー$E[u]$のEuler-Lagrange方程式という.

まとめると

$u\in C_0^1(0,1)$が(V)をみたす$\Rightarrow$ (EL)をみたす.

〈問題〉

(i) $(0,1)\subset\mathbb{R}$は一次元. これを多次元にするには?

(物理.化学.生物 etc. でも必要).

(ii) 多変数における部分積分とは何か?

多変数における「微積分の基本定理」は何か?

〈この講義の目標〉

(i) 多変数における積分定理(Gaussの発散定理, Greenの定理. Stokesの公式)を理解する.

(ii) 発散定理が偏微分方程式に、どのように役立つかを知る.

§2 3次元ベクトルの演算

$\vec{e_1}=(1,0,0)$ $\vec{e_2}=(0,1,0)$ $\vec{e_3}=(0,0,1)$

とかく

注意 2.1

ベクトルの記号に矢印を使うのは一般的ではない.

§§2.1 ベクトルの内積

定義 2.1 (ベクトルの内積)

$\vec{x}=(x_1,x_2,x_3), \vec{y}=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$ に対し. 内積 $\vec{x}\cdot\vec{y}$ を

$$\vec{x}\cdot\vec{y} := x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$$

で定義する. また $\vec{x}$ のノルムを

$$|\vec{x}| := \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}} = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$$

で定義する.

注意 2.2

$\vec{x}, \vec{y}\in\mathbb{R}^3$ のなす角を $0\leq\theta\leq\pi$ で表すと

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = |\vec{x}||\vec{y}|\cos\theta$$

となる. 特に, $\vec{x}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{y}\neq\vec{0}$ なら

$$\cos\theta = \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{x}||\vec{y}|}$$

命題 2.1

$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し、次が成り立つ

(1) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$

(2) $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$

(3) $(\lambda \vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (\lambda \vec{y}) = \lambda (\vec{x} \cdot \vec{y})$.

証明は、成分で表示して計算すればよい。

§§ 2.2 ベクトルの外積

定義 2.2 (ベクトルの外積)

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ に対し、外積 $\vec{x} \times \vec{y}$ を

$$\vec{x} \times \vec{y} = (x_2 y_3 - x_3 y_2) \vec{e_1} + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \vec{e_2} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \vec{e_3}$$

で定義する。形式的に

$$\vec{x} \times \vec{y} = \det \begin{pmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

とかける。

命題2.2

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ に対して、次が成り立つ.

(1) $\vec{x}\cdot(\vec{x}\times\vec{y}) = 0$

(2) $\vec{y}\cdot(\vec{x}\times\vec{y}) = 0$

(3) $|\vec{x}\times\vec{y}|^2 = |\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 - \vec{x}\cdot\vec{y}$

証明

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ とかく.

(1) $$\vec{x}\cdot(\vec{x}\times\vec{y}) = x_1(x_2y_3 - x_3y_2) + x_2(x_3y_1 - x_1y_3) + x_3(x_1y_2 - x_2y_1) = 0$$

(2) (1)と同様.

(3) $$\begin{aligned}|\vec{x}\times\vec{y}|^2 &= (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\ &= x_2^2y_3^2 + x_3^2y_2^2 + x_3^2y_1^2 + x_1^2y_3^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 \\ &\quad - 2x_2x_3y_2y_3 - 2x_1x_3y_1y_3 - 2x_1x_2y_1y_2 \\ &\quad + x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + x_3^2y_3^2 - x_1^2y_1^2 - x_2^2y_2^2 - x_3^2y_3^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \\ &\quad - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \\ &= |\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 - (\vec{x}\cdot\vec{y})^2\end{aligned}$$

□

注意 2.3

命題 2.2 (1), (2) $\Rightarrow$ $\vec{x}\times\vec{y}$ は $\vec{x}$, $\vec{y}$ と直交する.

〃 (3) $\Rightarrow$ $|\vec{x}\times\vec{y}|$ は $\vec{x}$ と $\vec{y}$ から作られる平行四辺形の面積

命題 2.3

$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して. 次が成り立つ.

(1) $\vec{x}\times\vec{x} = \vec{0}$

(2) $\vec{x}\times\vec{y} = -\vec{y}\times\vec{x}$

(3) $\vec{x}\times(\vec{y}+\vec{z}) = \vec{x}\times\vec{y} + \vec{x}\times\vec{z}$

(4) $(\lambda\vec{x})\times\vec{y} = \vec{x}\times(\lambda\vec{y}) = \lambda(\vec{x}\times\vec{y})$

証明は. 成分で表示して計算すればよい.

注意 2.4

$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ に対し. 外積に関する結合法則は成立しない. すなわち.

$$(\vec{x}\times\vec{y})\times\vec{z} \neq \vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{z}).$$

従って. 外積について. かっこを省略できない.

§§2.3 ベクトル値関数

開区間 $I \subset \mathbb{R}$ に対し $\vec{x} = \vec{x}(t) : I \to \mathbb{R}^3$ をベクトル値関数という.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\vec{x}(t+h) - \vec{x}(t)}{h}$$

が存在するとき, $\vec{x}$ は $t \in I$ で微分可能であるという.

$\dfrac{d\vec{x}}{dt}(t)$ や $\vec{x}'(t)$ とかく.

<u>例2.1</u>

ベクトル値関数 $\vec{x} : (-1, 1) \to \mathbb{R}^3$ を

$$\vec{x}(t) := (t, t^2, t^3) \qquad (t \in (-1, 1)).$$

で定める. このとき,

$$\frac{d\vec{x}}{dt}(t) = (1, 2t, 3t^2)$$

となる.

開区間 $I \subset \mathbb{R}$ に対し

$$C^1(I ; \mathbb{R}^3) := \{\vec{x} : I \to \mathbb{R}^3,\ C^1\text{級}\}$$

とかく.

命題2.4

$\vec{x}=\vec{x}(t),\ \vec{y}=\vec{y}(t)\in C^1(I;\mathbb{R}^3)$ とすると.

次が成り立つ

(1) $\dfrac{d}{dt}(\vec{x}\cdot\vec{y})=\dfrac{d\vec{x}}{dt}\cdot\vec{y}+\vec{x}\cdot\dfrac{d\vec{y}}{dt}$

(2) $\dfrac{d}{dt}(\vec{x}\times\vec{y})=\dfrac{d\vec{x}}{dt}\times\vec{y}+\vec{x}\times\dfrac{d\vec{y}}{dt}$

証明は成分表示して.微分を計算すればよい.

例2.2

開区間 $I\subset\mathbb{R}$, $\vec{x}=\vec{x}(t)\in C^1(I;\mathbb{R}^3)$ に対し

$$\frac{d}{dt}|\vec{x}(t)|^2=\frac{d}{dt}\left(\vec{x}(t)\cdot\vec{x}(t)\right)$$

$$=\vec{x}'(t)\cdot\vec{x}(t)+\vec{x}(t)\cdot\vec{x}'(t)$$

命題2.4.

$$=2\,\vec{x}(t)\cdot\vec{x}'(t)$$

となる.

§3 曲面と曲線の表示

§§3.1 平面曲線

定義3.1 (平面曲線)

$\vec{p} = \vec{p}(t) : (a.b) \to \mathbb{R}^2$

$C : \vec{p} = \vec{p}(t) \quad (t \in (a.b))$ が平面曲線.

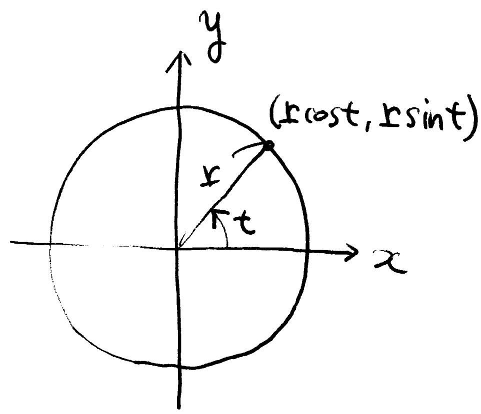
$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\vec{p} \in C^1((a.b) ; \mathbb{R}^2)$ で

$$\dot{\vec{p}}(t) = \frac{d}{dt}\vec{p}(t) \neq 0 \quad ({}^\forall t \in (a.b)).$$

例3.1

$r > 0$. $0 < t < 2\pi$ に対し

$\vec{p}(t) := (r\cos t, r\sin t)$



とおくと $\vec{p} : (0.2\pi) \to \mathbb{R}^2$ は

原点中心. 半径 r の円 (の一部)

を表す.

命題3.1

$\vec{p} : (a.b) \to \mathbb{R}^2$ 平面曲線.

$\Rightarrow$ ある変数変換 $t = t(s)$ が存在して

$$\vec{e}_1(s) := \vec{p}\,'(s) = \frac{d}{ds}\vec{p}(t(s))$$

とかいたときに $|\vec{e}_1(s)| \equiv 1$ となる.

注意3.1

命題3.1で主張していること。

「平面曲線は、適当な変数変換で、速度ベクトルの大きさを常に 1 とできる」

このパラメータ s を $\vec{p}$ の弧長パラメータという。

具体的な曲線 $\vec{p}$ に対する弧長パラメータを求めることは難しい。理論的な話では弧長パラメータを使った方がみとおしがよい。

命題3.1の証明の方針

~~(詳細：小林昭七「曲面と曲線の微分幾何」裳華房 1995)~~

$$s = \int_0^t |\dot{\vec{p}}(\tau)|\, d\tau$$

とおき、逆関数を考える。 □

定義3.2 (正規直交標構)

s を弧長パラメータとする平面曲線 $\vec{p} = \vec{p}(s)$ に対し、

$$\vec{e}_2(s) := (-y'(s), x'(s))$$

とおくと、$\vec{e}_1(s) \cdot \vec{e}_2(s) \equiv 0$, $|\vec{e}_1(s)| \equiv |\vec{e}_2(s)| \equiv 1$ となる。

$\{\vec{e}_1(s), \vec{e}_2(s)\}$ を正規直交標構という。

注意 3.2

定義 3.2 において. $\vec{e_1}(s)$ は $\vec{p}(s)$ における単位接ベクトル.

$\vec{e_2}(s)$ は単位法ベクトル となる.

§§ 3.2 空間上の曲面.

定義 3.3 (曲面)

$D \subset \mathbb{R}^2$: 領域, $\vec{p} = \vec{p}(u,v) : D \to \mathbb{R}^3$

$S : \vec{p} = \vec{p}(u,v) \quad ((u,v) \in D)$ が曲面

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \quad \vec{p} \in C^1(D ; \mathbb{R}^3)$ で

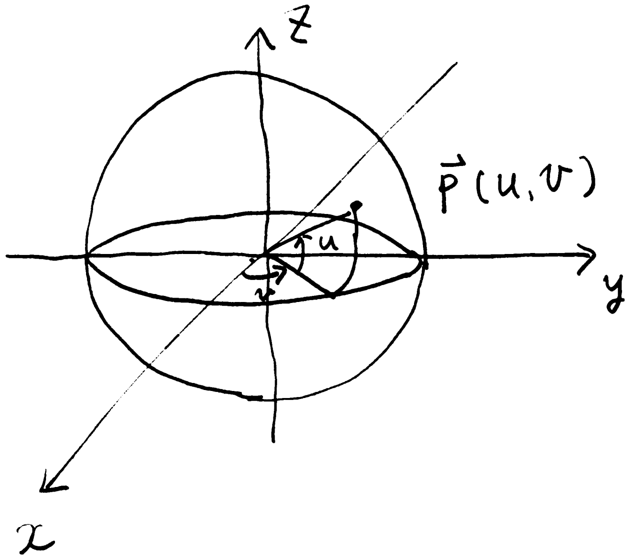
$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v}(u,v) \neq \vec{0} \quad ({}^\forall (u,v) \in D)$$

例 3.2

$$D = \left\{ (u,v) \;;\; -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2},\ -\pi < v < \pi \right\}$$

$$\vec{p}(u,v) := (r \cos u \cos v,\ r \cos u \sin v,\ r \sin u)$$

とおくと $\vec{p}$ は半径 r, 原点中心の球面 (の一部)



命題3.2

$$S : \vec{p} = \vec{p}(u,v) \quad ((u,v)\in D) \quad \text{曲面}$$

(1) $\dfrac{\partial \vec{p}}{\partial u}(u,v) \times \dfrac{\partial \vec{p}}{\partial v}(u,v)$ は点 $\vec{p}(u,v)$ における

曲面Sの法線ベクトル.

(2) $\vec{p}$が単射ならば

$$\iint_D \left| \frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v} \right| du dv$$

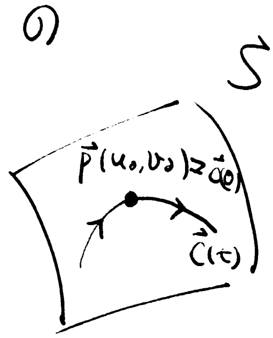
は曲面Sの面積となる.

証明の概略

(1) ${}^\forall(u_0, v_0) \in D$ に対し. $\vec{c}(t) = \vec{p}(u(t), v(t))$

を $\vec{c}(0) = \vec{p}(u_0, v_0)$ となる曲面S上の

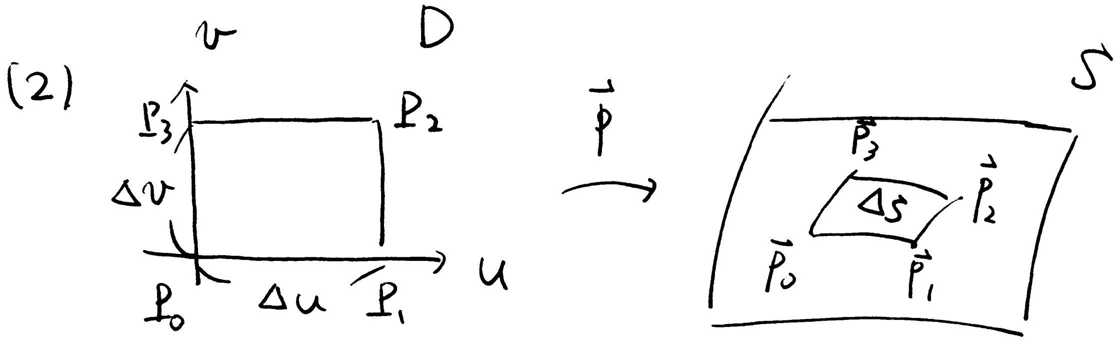
任意の曲線とするとき.



$$\frac{d\vec{c}}{dt}(0) \cdot \left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial u}(u_0,v_0) \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v}(u_0,v_0) \right) = 0$$

を示せばよい. 命題2.2を用いる.
2.3

(2)



$$\Delta S \underset{\uparrow}{\simeq} \left| (\vec{p}_1 - \vec{p}_0) \times (\vec{p}_3 - \vec{p}_0) \right|$$

ΔSは平行四辺形

$$\underset{\uparrow}{\simeq} \left| \left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial u}(P_0) \Delta u \right) \times \left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial v}(P_0) \Delta v \right) \right|$$

平均値定理

$$= \left| \frac{\partial \vec{p}}{\partial u}(P_0) \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v}(P_0) \right| \Delta u \Delta v$$

分割の極限をとると

$$(S\ \text{の面積}) = \iint_D \left| \frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v} \right| du\,dv.$$

□

この節の参考文献

小林昭七　「曲面と曲線の微分幾何」
裳華房　1995.

§4 スカラー場とベクトル場

この節では $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を領域(開集合かつ連結)とする.

§§4.1 スカラー場とベクトル場

定義4.1 (スカラー場とベクトル場)

関数 $f: \Omega \to \mathbb{R}$ を Ω 上のスカラー場という.

ベクトル値関数 $\vec{F}: \Omega \to \mathbb{R}^3$ を Ω 上のベクトル場という.

$$\mathfrak{X}(\Omega) := \{\vec{F} : \Omega\text{上のベクトル場, 滑らか}\}$$

注意4.1

この講義では,スカラー場,ベクトル場は滑らかとする.

定義4.2 (等高面)

f: Ω 上のスカラー場. $c \in \mathbb{R}$.

$\{x \in \Omega : f(x) = c\} = f^{-1}(\{c\})$ を高さ c の等高面という.

命題4.1

f: Ω 上のスカラー場, $x_0 \in \Omega$, $f(x_0) = c$.

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0)\right) \neq \vec{0}$$

ならば次が成り立つ.

(i) $\nabla f(x_0)$ は $\{x \in \Omega : f(x) = c\}$ の x_0 における法線ベクトル

(ii) $\nabla f(x_0)$ は,スカラー場 f が x_0 において増加を最大とする方向.

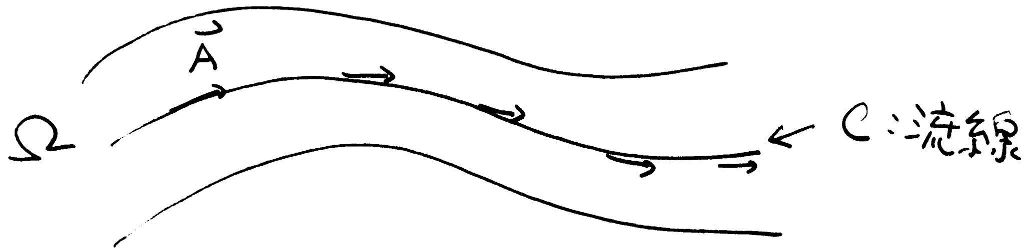
定義4.3 (流線．積分曲線)

$\vec{A}$：Ω上のベクトル場　C：$\vec{r}=\vec{r}(t)$ $(t\in I)$ 曲線．

Cが $\vec{A}$ の流線（積分曲線）

$$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow} \quad \frac{d\vec{r}}{dt}(t) = \vec{A}\left(\vec{r}(t)\right) \qquad t\in I.$$

〈気分〉



命題4.2

$\vec{A}\in\mathfrak{X}(\Omega)$．$x_0\in\Omega$ に対し．

x_0を通る $\vec{A}$ の流線がただ1つ存在する．i.e.

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{r}}{dt}(t) = \vec{A}\left(\vec{r}(t)\right) & t\in I. \\ \vec{r}(0) = x_0 \end{cases}$$

の解 $\vec{r}$ がただ一つ存在する．

証明は

ポントリャーギン，千葉克裕訳「常微分方程式」共立出版 1963

の 定理2（§3）と §2に参照せよ．

§§4.2 微分演算子

定義 4.4 (勾配, ナブラ, gradient)

$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ と形式的に定義する Ω上の スカラー場 f

に対し $\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0)\right)$ とかく.

命題 4.3

f, g: Ω 上のスカラー場, $c \in \mathbb{R}$, $\phi \in C^1(\mathbb{R})$

(1) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

(2) $\nabla(cf) = c\nabla f$

(3) $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$

(4) $\nabla(\phi(f)) = \phi'(f)\nabla f$

定義 4.5 (スカラーポテンシャル)

$\vec{F} \in \mathfrak{X}(\Omega)$, f: Ω 上のスカラー場

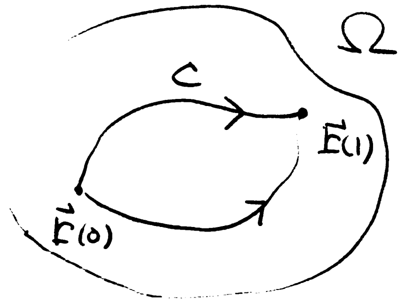
f が $\vec{F}$ のスカラーポテンシャル

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\vec{F} = -\nabla f$.

〈スカラーポテンシャルの意味〉

$\vec{F} = -\nabla f$ より

$C : \vec{r} = \vec{r}(s) \quad (0 \leq s \leq 1)$



を任意の曲線としたとき.

$$\frac{d}{ds} f(\vec{r}(s)) = \nabla f(\vec{r}(s)) \cdot \vec{r}\,'(s) = -\vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot \vec{r}\,'(s).$$

$0 \leq s \leq 1$ で積分すると

$$f(\vec{r}(1)) - f(\vec{r}(0)) = -\int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(s)) \cdot \vec{r}\,'(s)\, ds$$

$$= -\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \leftarrow \text{イミはあとで.}$$

つまり. 最後の積分は曲線 C の始点と終点のみで決まる.

定義 4.6（発散, divergence）

$\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) \in \mathfrak{X}(\Omega)$ に対し

$$\operatorname{div} \vec{F} := \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

で定める. 形式的には $\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$ とかける.

命題 4.4

$\vec{F}, \vec{G} \in \mathfrak{X}(\Omega)$, f: Ω 上のスカラー場, $c \in \mathbb{R}$

(1) $\operatorname{div}(\vec{F} + \vec{G}) = \operatorname{div} \vec{F} + \operatorname{div} \vec{G}$

(2) $\operatorname{div}(c\vec{F}) = c \operatorname{div} \vec{F}$

(3) $\operatorname{div}(f\vec{F}) = f \operatorname{div} \vec{F} + \nabla f \cdot \vec{F}$

証明 (3)のみ示す. $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ とかく.

$$\mathrm{div}(f\vec{F}) = \frac{\partial(fF_1)}{\partial x} + \frac{\partial(fF_2)}{\partial y} + \frac{\partial(fF_3)}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}F_1 + \frac{\partial f}{\partial y}F_2 + \frac{\partial f}{\partial z}F_3$$

$$+ f\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) = \nabla f \cdot \vec{F} + f\,\mathrm{div}\,\vec{F} \quad \square$$

定義 4.7 (Laplacian)

f: Ω 上の スカラー場

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

と定める. 形式的には $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$ であり.

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \mathrm{div}(\nabla f).$$

となる.

定義 4.8 (回転. rotation, curl)

$\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) \in \mathfrak{X}(\Omega)$.

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} := \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

と定める. 形式的には $\mathrm{rot}\,\vec{F} = \nabla \times \vec{F}$ である.

命題4.5

$\vec{F}, \vec{G} \in \mathfrak{X}(\Omega)$. f: Ω上のスカラー場, $c \in \mathbb{R}$.

(1) $\mathrm{rot}(\vec{F}+\vec{G}) = \mathrm{rot}\,\vec{F} + \mathrm{rot}\,\vec{G}$.

(2) $\mathrm{rot}(c\vec{F}) = c\,\mathrm{rot}\,\vec{F}$.

(3) $\mathrm{rot}(f\vec{F}) = f\,\mathrm{rot}\,\vec{F} + \nabla f \times \vec{F}$.

定義4.9 (ベクトルポテンシャル)

$\vec{F} \in \mathfrak{X}(\Omega)$. $\vec{f} \in \mathfrak{X}(\Omega)$

$\vec{f}$が$\vec{F}$のベクトルポテンシャル

$\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\vec{F} = \mathrm{rot}\,\vec{f}$

命題4.6

$\vec{F} \in \mathfrak{X}(\Omega)$

(1) $\vec{F}$がスカラーポテンシャルを持つ $\Rightarrow$ $\mathrm{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$

(2) $\vec{F}$がベクトル 〃 $\Rightarrow$ $\mathrm{div}\,\vec{F} = 0$.

証明

(1) $\vec{F} = -\nabla f$ となるスカラー場fがとれるので

$\mathrm{rot}\,\vec{F} = -\mathrm{rot}(\nabla f) = \vec{0}$ ←各自

(2) $\vec{F} = \mathrm{rot}\,\vec{f}$ となる $\vec{f} \in \mathfrak{X}(\Omega)$ がとれるので

$\mathrm{div}\,\vec{F} = \mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{f}) = 0$ ←各自

注意4.2

Ωが単連結. すなわち「Ω内の任意の閉曲面Sに対し. Sが囲う領域Dについて$D\subset\Omega$」が成り立つとき.

命題4.6は逆が成り立つ. i.e.

$\mathrm{rot}\,\vec{F}=\vec{0}$ $\Rightarrow$ $\vec{F}$はスカラーポテンシャルを持つ.

$\mathrm{div}\,\vec{F}=0$ $\Rightarrow$ $\vec{F}$はベクトルポテンシャルを持つ

〈ベクトルポテンシャルの意味〉

静電場$\vec{E}$と磁場$\vec{H}$に対して. 次が成り立つ.

(定常Maxwell方程式の一部)

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}=\vec{0},\quad \mathrm{div}\,\vec{H}=0$$ (誘電率一定を仮定している)

注意4.2より$\vec{B}$はベクトルポテンシャルを持つ. とくに$\mathrm{div}\,\vec{f}=0$となるベクトルポテンシャル$\vec{f}$がとれて.

$$\vec{H}=\mathrm{rot}\,\vec{f},\quad \mathrm{div}\,\vec{f}=0$$

とできる. $\vec{f}$をクーロンゲージといい. $\vec{f}$を調べることで電場と磁場の関係をより詳細に調べることができる.

定理4.1 (Helmholz分解)

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$：領域，$\partial\Omega$は滑らか．

$\vec{F} \in \mathfrak{X}(\Omega)$

$\Longrightarrow \exists \vec{F}_1, \vec{F}_2 \in \mathfrak{X}(\Omega)$ s.t.

(1) $\vec{F}_1$はスカラーポテンシャルを持つ．さらに $\mathrm{rot}\,\vec{F}_1 = \vec{0}$

(2) $\vec{F}_2$はベクトルポテンシャルを持つ．さらに $\mathrm{div}\,\vec{F}_2 = 0$

(3) $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

$\mathfrak{X}_\sigma(\Omega) := \{ \vec{F} \in \mathfrak{X}(\Omega) : \mathrm{div}\,\vec{F} = 0 \}$

$\mathfrak{X}_\perp(\Omega) := \{ \vec{F} \in \mathfrak{X}(\Omega) : \mathrm{rot}\,\vec{F} = \vec{0} \}$

とおくとHelmholz分解は．

$$\mathfrak{X}(\Omega) = \mathfrak{X}_\perp(\Omega) \oplus \mathfrak{X}_\sigma(\Omega)$$

とかける．この分解定理は流体力学や電磁気学を数学として扱うときによく用いられている．

§5 線積分と面積分

§§5.1 線積分

$C : \vec{r} = \vec{r}(s) : (0, L) \to \mathbb{R}^3$ 空間曲線

s : 弧長パラメータ (i.e. $\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| \equiv 1$)

$\vec{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$

$f : C \to \mathbb{R}$ 連続

<u>定義 5.1</u> (線積分)

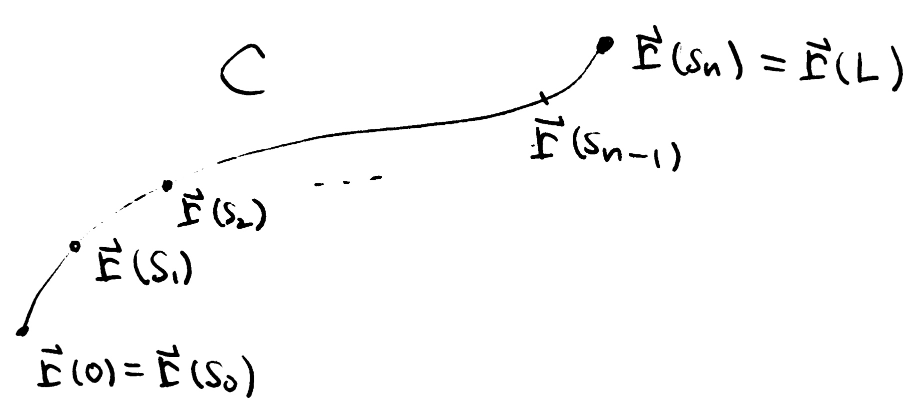
$\Delta : 0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = L$ $[0, L]$の分割

$$\int_C f\, ds := \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\vec{r}(s_i))(s_i - s_{i-1})$$

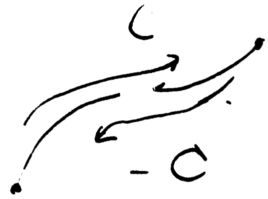
$$\int_C f\, dx := \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\vec{r}(s_i))(x(s_i) - x(s_{i-1}))$$

$$\int_C f\, dy := \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\vec{r}(s_i))(y(s_i) - y(s_{i-1}))$$

$$\int_C f\, dz := \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\vec{r}(s_i))(z(s_i) - z(s_{i-1}))$$



$-C$: Cの向きを逆にした曲線



$$\Rightarrow \int_{-C} f\,ds = -\int_C f\,ds$$

$C = C_1 + C_2$

$$\Rightarrow \int_C f\,ds = \int_{C_1+C_2} f\,ds$$

$$= \int_{C_1} f\,ds + \int_{C_2} f\,ds$$

これらは

$$\int_1^0 f(x)\,dx = -\int_0^1 f(x)\,dx, \quad \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx$$

と同じ.

<u>定義 5.2</u>（ベクトル場の線積分）

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$: 領域, $C \subset \Omega$ 曲線. $\vec{A} \in \mathfrak{X}(\Omega)$.

Δ : 定義 5.1 と同じ.

$$\int_C \vec{A} \cdot d\vec{r} := \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{A}(\vec{r}(s_i)) \cdot (\vec{r}(s_i) - \vec{r}(s_{i-1}))$$

〈具体的な計算〉

$\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)):(a.b)\to\mathbb{R}^3$, $t=t(s)$, $0\leq s\leq L$.

t：弧長パラメータとは限らない, s：弧長パラメータ.
$t(0)=a$. $t(L)=b$.

このとき.

$$\int_C f\,ds=\int_0^L f(\vec{r}(t(s)))\,ds$$

定義5.1

$$=\int_a^b f(\vec{r}(t))\left|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right|dt$$

(理由)

$$\frac{d\vec{r}(t(s))}{ds}=\frac{d\vec{r}}{dt}(t(s))\frac{dt(s)}{ds} \text{ より } \left|\frac{d\vec{r}(t(s))}{ds}\right|=\left|\frac{d\vec{r}}{dt}(t)\right|\frac{dt}{ds}$$

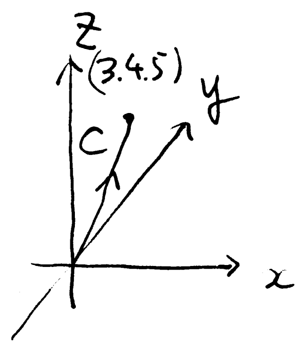
sは弧長パラメータより $\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right|\equiv 1$. $\therefore\ ds=\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|dt$

同様に

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}dt,\quad \int_C f\,dx=\int_a^b f(\vec{r}(t))\frac{dx}{dt}dt.$$

<u>例5.1</u>

$C:\vec{r}(t)=(3t^2,4t^2,5t^2)\quad(0\leq t\leq 1)$



曲線は右図. このとき.

$$\int_C(x+y+z)\,ds$$

を求める.

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = |(6t, 8t, 10t)| = 2t\,|(3,4,5)| = 2t\sqrt{9+16+25}$$

$$= 10\sqrt{2}\,t$$

より

$$\int_C (\underline{x}+\underline{\underline{y}}+\underline{\underline{\underline{z}}})\,ds = \int_0^1 (\underline{3t^2}+\underline{\underline{4t^2}}+\underline{\underline{\underline{5t^2}}})(10\sqrt{2}\,t)\,dt.$$

$$= 120\sqrt{2}\int_0^1 t^3\,dt = 30\sqrt{2}.$$

<u>例5.2</u>

$C : \vec{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, t)\ (0 \leq t \leq \pi)$ 円柱螺線

$\int_C (y, -z, x) \cdot d\vec{r}$ を求める.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (-2\sin t, 2\cos t, 1)$$

だから

$$\int_C (y, -z, x) \cdot d\vec{r} = \int_0^\pi (2\sin t, -t, 2\cos t) \cdot (-2\sin t, 2\cos t, 1)\,dt.$$

$$= \int_0^\pi (-4\sin^2 t - 2t\cos t + 2\cos t)\,dt$$

$$= \cdots = 4 - 2\pi$$

$2\sin^2 t = 1 - \cos 2t.$

§§5.2 面積分

曲面 $S : \vec{p} = \vec{p}(u, v) ; D \to \mathbb{R}^3$

$f : S \to \mathbb{R}$ 連続

$\Delta : \{D_1, \cdots, D_N\}$ Dの分割

定義5.3 (面積分)

$$\int_S f\, dS := \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{N} f(Q_i) |\vec{p}(D_i)|$$

ただし、$|\vec{p}(D_i)|$は$\vec{p}(D_i)$の面積、$Q_i \in \vec{p}(D_i)$ は任意とする (fの一様連続性から、右辺はQ_iのとり方に依らない).

特に $\Omega \subset \mathbb{R}^3$: 領域、$S \subset \Omega$、$\vec{A} \in \mathfrak{X}(\Omega)$.

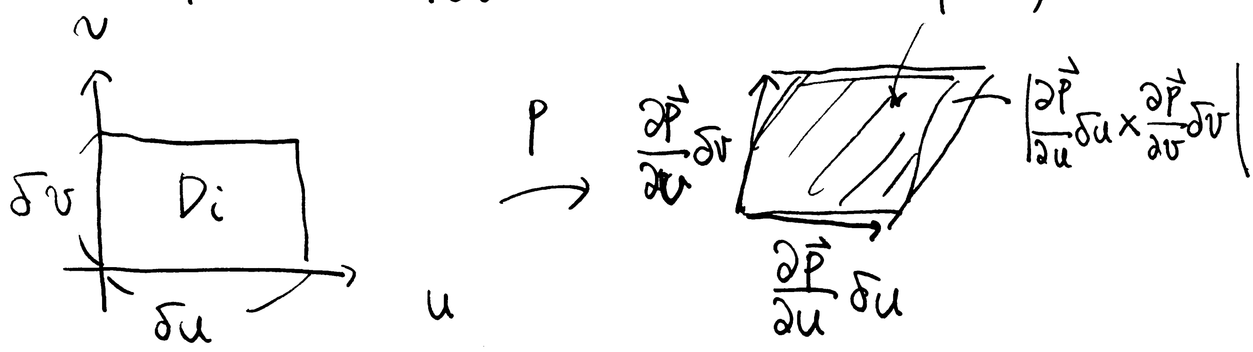
$\vec{n} = \vec{n}(p)$: $p \in S$ に対する単位法線ベクトル

に対し $\int_S \vec{A} \cdot \vec{n}\, dS$ が重要.

〈具体的な計算〉

$D_i \in \Delta$ とすると、

$$|\vec{p}(D_i)| \fallingdotseq \left| \frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v} \right| \delta u \delta v$$



$$|\Delta| \to 0 \quad \Longrightarrow \quad dS = \left|\frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v}\right| du\,dv$$

より

$$\int_S f\,dS = \iint_D f(\vec{p}(u,v)) \left|\frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v}\right| du\,dv .$$

また、$\vec{n} = \dfrac{\frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v}\right|}$ とおくと $\vec{n}$ は S の単位法線

ベクトルとなり、

$$\int_S \vec{A} \cdot \vec{n}\,dS = \iint_D \vec{A}\left(\vec{p}(u,v)\right) \cdot \frac{\frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v}\right|} \left|\frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v}\right| du\,dv$$

$$= \iint_D \vec{A}(\vec{p}(u,v)) \cdot \frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v}\,du\,dv .$$

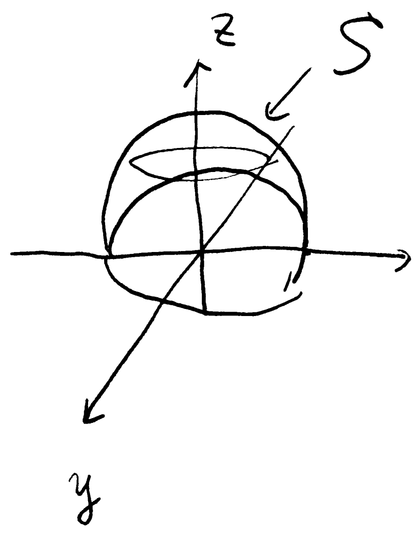
例15.3

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=4,\ z \geq 0\}$$

として

$$\int_S (2x^2+2y^2-z^2)\,dS$$

を求める.



$$S : \vec{p} = \vec{p}(u, v) = {}^t\begin{pmatrix} 2\cos u \cos v \\ 2\cos u \sin v \\ 2\sin u \end{pmatrix} \quad (u, v) \in (0, \tfrac{\pi}{2}) \times (-\pi, \pi)$$

と表示すれば

$$\left| \frac{\partial \vec{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial v} \right| = 4 \left| {}^t\begin{pmatrix} -\sin u \cos v \\ -\sin u \sin v \\ \cos u \end{pmatrix} \times {}^t\begin{pmatrix} -\cos u \sin v \\ \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix} \right|$$

$$\underset{(各自)}{=} 4\cos u$$

より

$$\int_S (2x^2 + 2y^2 - z^2)\, dS$$

$$= \iint_{(0, \frac{\pi}{2}) \times (-\pi, \pi)} \left(2(2\cos u \cos v)^2 + 2(2\cos u \sin v)^2 - (2\sin^2 u)\right)(4\cos u)\, du dv$$

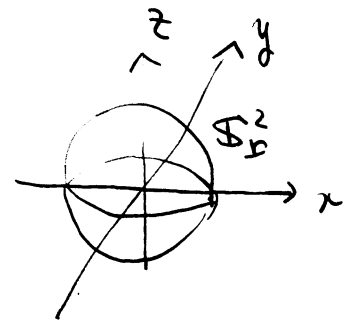
$$= 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} du \int_{-\pi}^{\pi} (2\cos^2 u - \sin^2 u) \cdot (\cos u)\, dv = \cdots = 32\pi.$$

例5.4

$r > 0$. $\mathbb{S}_r^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$.

$\vec{n}$: 外向き単位法線ベクトル

(囲まれている部分が内向き)



$$\int_{\mathbb{S}_r^2} \frac{(x, y, z)}{|(x, y, z)|^3} \cdot \vec{n}\, dS$$

を求める.

$(x,y,z) \in S_r^2$ に対し $\vec{n} = \dfrac{(x,y,z)}{|(x,y,z)|} = \dfrac{(x,y,z)}{r}$ だから

$$\frac{(x,y,z)}{|(x,y,z)|^3} \cdot \vec{n} = \frac{1}{r^4}(x,y,z)\cdot(x,y,z) = \frac{r^2}{r^4} = \frac{1}{r^2}$$

となる。i.e 被積分関数は (x,y,z) に依らない。

$$\therefore \int_{S_r^2} \frac{(x,y,z)}{|(x,y,z)|^3} \cdot \vec{n}\, dS = \int_{S_r^2} \frac{1}{r^2} dS$$

$$= \frac{1}{r^2} \times |S_r^2| = 4\pi .$$

◎ 線積分や面積分をやる理由（のひとつ）

四 地球を平らでなくて球としたい。

四 じゃばらホースの流れを知りたい。

◎ 線積分や面積分の具体的な計算は

できないことが多い （mathematica でも たぶん難しい）

↑

曲線や曲面の表示が難しい。

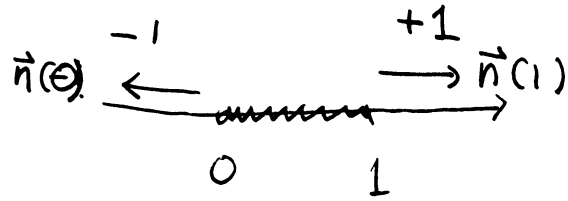
§6 積分定理

$f : [0.1] \to \mathbb{R}$　C^1級

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{df}{dx} dx = f(1) - f(0)$$

$\vec{n} = \vec{n}(x)$: (0.1)区間の境界 $x = 0.1$ における

外向単位法線



i.e. $\vec{n}(0) = -1$, $\vec{n}(1) = 1$

$$\therefore \int_0^1 \frac{df}{dx} dx = \sum_{x \in \partial(0.1)} f(x) \vec{n}(x)$$

1次元の積分　　　　0次元の積分

§§6.1　Gaussの発散定理

<u>定理 6.1</u> (Gaussの発散定理)

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$: 有界領域, $\partial\Omega$は滑らか. $\vec{F} \in \mathfrak{X}(\Omega)$

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{F} \, dxdydz = \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$$

3次元　　　　2次元

ただし, $\vec{n}$は$\partial\Omega$の外向単位法線ベクトル.

系6.1

Ω：定理6.1と同じ　f：Ω上のスカラー場

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\Omega} f\, n_x\, dS$$

ただし．$\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ は $\partial\Omega$ の外向単位法線ベクトル．

y, z も同様．

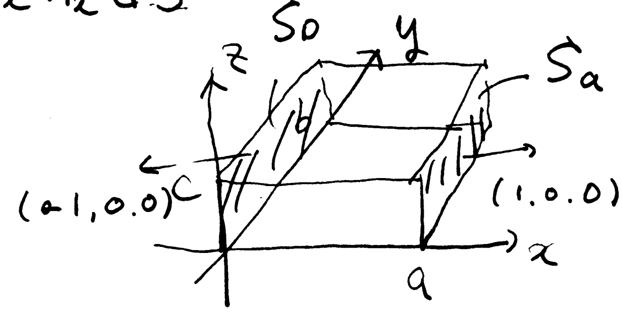
証明　$\vec{F} = (f, 0, 0)$ に Gauss の発散定理を使う □

定理6.1の理由

$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$，$\Omega = (0, a) \times (0, b) \times (0, c)$ として．

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial F_x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\Omega} F_x\, n_x\, dS$$

を示す



このとき．Ωは右図の直方体で．S_0，S_a 以外の面では $n_x = 0$ より

$$\iint_{\partial\Omega} F_x\, n_x\, dS = \iint_{S_a} F_x\, dS - \iint_{S_0} F_x\, dS$$

$$S_a = \{(a, y, z) : 0 < y < b,\ 0 < z < c\}$$

$$S_0 = \{(0, y, z) : 0 < y < b,\ 0 < z < c\}$$

より

$$\iint_{S_a} F_x\,dS - \iint_{S_0} F_x\,dS = \iint_{(0,b)\times(0,c)} F_x(a,y,z)\,dydz - \iint_{(0,b)\times(0,c)} F_x(0,y,z)\,dydz$$

$$= \iint_{(0,b)\times(0,c)} dydz \int_0^a \frac{\partial F_x}{\partial x}(x,y,z)\,dx$$

$$= \iiint_{\Omega} \frac{\partial F_x}{dx}\,dx\,dy\,dz \qquad \square.$$

例16.1

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$：有界領域，$\partial\Omega$は滑らか，$0 \in \Omega$

$$\Rightarrow\ -\iint_{\partial\Omega} \nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right)\cdot\vec{n}\,dS = 4\pi.$$

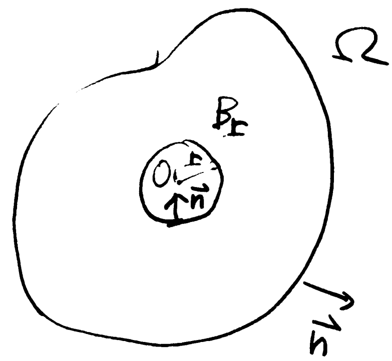
ただし．$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$，$\vec{n}$は$\partial\Omega$の外向単位法線ベクトル．

∵ $\vec{x} \neq 0$ で $\Delta\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right) = 0$ だから

$B_r = B_r(0) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : |\vec{x}| < r\}$

とおくと $B_r \subset \Omega$ となる $r > 0$

に対し



$$-\iint_{\partial\Omega} \nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right)\cdot\vec{n}\,dS = -\iint_{\partial\Omega} \nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right)\cdot\vec{n}\,dS$$

$$-\iint_{\partial B_r} \nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right)\cdot\vec{n}\,dS + \iint_{\partial B_r} \nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right)\cdot\vec{n}\,dS$$

↑

正確には$\partial(\Omega \setminus B_r)$ （向きを考えるため）

$$= -\iiint_{\Omega \setminus B_r} \underbrace{\mathrm{div}\left(\nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right)\right)}_{\Delta\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right)=0} dxdydz$$

Gaussの発散定理

$$+ \iint_{\partial B_r} \nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right)\cdot \vec{n}\, dS$$

$$= \iint_{\partial B_r} \nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right)\cdot \vec{n}\, dS$$

ここで $\nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right) = -\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$, $\vec{n} = -\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ より

「$\Omega \setminus B_r$ での外向」=「B_r での内向」

$$-\iint_{\partial B_r} \nabla\left(\frac{1}{|\vec{x}|}\right)\cdot \vec{n}\, dS = \iint_{\partial B_r} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}\cdot\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}\, dS$$

$$= \iint_{\partial B_r} \frac{1}{r^2}\, dS = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi .$$

$\vec{x}$ に依らない

∂B_r の面積.

となる.

<u>注意 6.1</u>

この計算は複素関数論における Cauchy の積分定理と留数定理にだいたい対応する. 調和関数と正則関数がだいたい同じものと思うとよい.

系 6.2

Ω, $\vec{n}$：定理6.1と同じ．f：Ω上のスカラー場

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} \Delta f \, dx\,dy\,dz = \iint_{\partial\Omega} \nabla f \cdot \vec{n} \, dS$$

証明 $\Delta f = \mathrm{div}(\nabla f)$ にGaussの発散定理．

定理 6.2 (Gaussの発散定理（一般次元）)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$：有界領域，$\partial\Omega$は滑らか．$F \in \mathfrak{X}(\Omega)$.

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \mathrm{div}\, F \, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma$$

ただし．$x = (x_1, \cdots, x_n)$，$F = (F_1, \cdots, F_n)$に対し $\mathrm{div} F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$，

ν：$\partial\Omega$上の外向単位法線，$d\sigma$：$\partial\Omega$の面素．

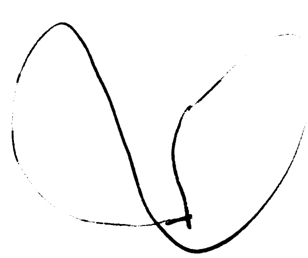
§§6.2 Greenの定理

$\mathbb{R}^2$においては．Gaussの発散定理を別の形でかくこともできる．

単純閉曲線：自己交差のない閉曲線

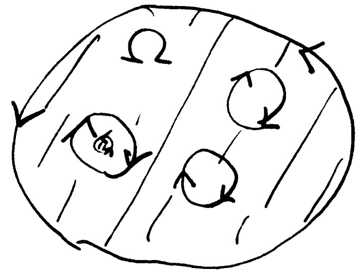
単純

単純でない．



定理6.3（Greenの定理）

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$：有限個の単純閉曲線で囲まれた有界領域



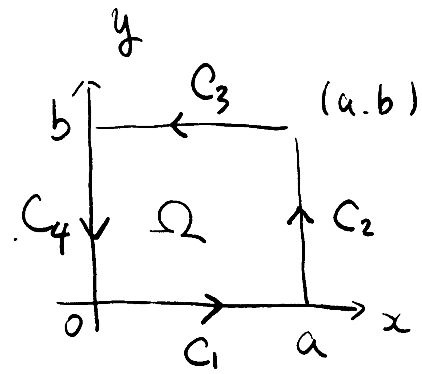
P, Q：Ω上のスカラー場

$$\Rightarrow \iint_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_{\partial\Omega}(P\,dx+Q\,dy)$$

ただし．$\partial\Omega$の向きは．Ωを左手にみて進む向き．

理由

$\Omega=(0,a)\times(0,b)$ のときに示す．



$$\partial\Omega = C_1+C_2+C_3+C_4$$

とする．ただし

C_1：$(t,0)$，$t:0\to a$

C_2：(a,t)　$t:0\to b$

C_3：(t,b)　$t:a\to 0$

C_4：$(0,t)$　$t:b\to 0$

である．このとき．

$$\int_{\partial\Omega} P\,dx = \left(\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3}+\int_{C_4}\right)P\,dx$$

x成分が変化しないので
積分は0

$$= \int_{C_1} P\,dx - \int_{-C_3} P\,dx$$

$$= \int_0^a P(t,0)\,dt - \int_0^a P(t,b)\,dt$$

$$\frac{dx}{dt} = 1$$

$$= -\int_0^a \Big(\underbrace{P(t,b) - P(t,0)}_{= \int_0^b \frac{\partial P}{\partial y}(t,y)\,dy}\Big)\,dt$$

$$= -\int_0^a \int_0^b \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

同様にして $\displaystyle\int_{\partial\Omega} Q\,dy = \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$

〈Greenの定理の応用〉

<u>定理6.4</u> (Cauchyの積分定理)

f: $\mathbb{C}$上正則. $C \subset \mathbb{C}$ 単純閉曲線

$$\Longrightarrow \int_C f(z)\,dz = 0.$$

<u>略証</u> $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$ とかくと

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u + iv)(dx + i\,dy)$$

$$= \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (v\,dx + u\,dy)$$

$$= \iint_\Omega \underbrace{\left(-\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{=0} dx\,dy + i\int_C \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{=0} dx\,dy = 0$$

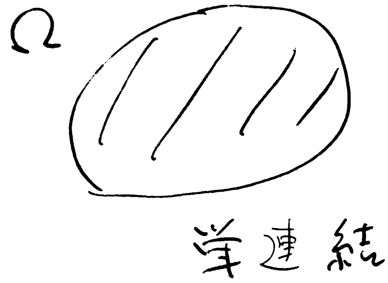
Greenの定理

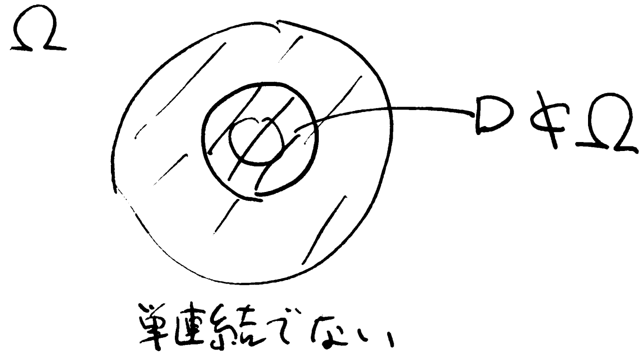
ΩはCで囲まれた領域

Cauchy-Riemannの方程式.

定義 6.1

Ω が単連結 $\underset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ Ω 内の任意の単純閉曲線が囲う領域 D について $D \subset \Omega$





系6.3

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$：単連結領域．$P, Q$：$\Omega$ 上のスカラー場

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{in } \Omega.$$

$\Longrightarrow$ $\exists f$：Ω 上のスカラー場 s.t. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = P$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = Q$.

注意

これは $y = y(x)$ の微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{P(x, y(x))}{Q(x, y(x))}$$

が完全形であるための必要十分条件を与えている．

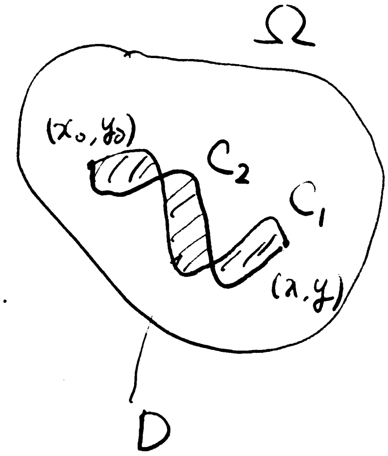
証明

1. $(x_0, y_0) \in D$を固定し、$^\forall (x, y) \in D$に対して

$$f(x, y) := \int_C \left(P(\xi, \eta)\, d\xi + Q(\xi, \eta)\, d\eta \right) \quad \text{---} (*)$$

と定義する。ここでCは(x_0, y_0)から(x, y)へ向かう曲線とする。

$(*)$の右辺がCの取り方に依らずにwell-definedであることを示す。



C_1, C_2をともに(x_0, y_0)から(x, y)へ向かう曲線とすると、$C_1 - C_2$は閉曲線より、$C_1 - C_2$が囲う集合をDとすると、

Ωが単連結より$D \subset \Omega$

よってGreenの定理より

$$0 = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$$

$$= \int_{C_1 - C_2} (P\, dx + Q\, dy)$$

$$= \int_{C_1} (P\, dx + Q\, dy) + \int_{C_2} (P\, dx + Q\, dy)$$

よって$\displaystyle \int_{C_1} (P\, dx + Q\, dy) = \int_{C_2} (P\, dx + Q\, dy)$

2. 十分小さな h に対し

$$\frac{f(x+h, y)-f(x,y)}{h} = \frac{1}{h}\int_{C_h}(P\,d\xi + Q\,d\eta) \quad \left(C_h : (x+h,y)\to(x,y)\right)$$

$$= \frac{1}{h}\int_{C_h} P\,d\xi$$

η 成分は
変化していない。

$h\to 0$ とすれば $\frac{\partial f}{\partial x} = P$. 同様にして $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$ $\square$

§§ 6.3 Stokesの定理.

定理 6.5 (Stokesの定理)

$S\subset\mathbb{R}^3$: 曲面. 連続な単位法線ベクトル場 $\vec{n}$ が存在.

C: 曲面を囲う曲線.

$\vec{F}$: $S\subset\Omega$ をみたす $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場

$$\Rightarrow \iint_S \mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad (*)$$

ただし、C の向きは、$\vec{u}$ を ∂S の外向単位法線、$\vec{t}$ を C の接ベクトルとしたときに
$\det(\vec{u},\vec{t},\vec{n})>0$ となるように定める.

注意

Möbius の車輪は、連続な単位法線ベクトル場

を持たない曲面の例である.

理由

$\vec{F} = (F^1, F^2, F^3)$, $\vec{n} = (n^1, n^2, n^3)$ とすると(*)は

$$\iint_S \{ (\underset{\uparrow\ \frac{\partial F^3}{\partial y}}{F^3_y} - F^2_z) n^1 + (F^1_z - F^3_x) n^2 + (F^2_x - F^1_y) n^3 \} dS$$

$$= \int_C (F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz)$$

となる. $\displaystyle\int_C F^1 dx = \iint_S (F^1_z n^2 - F^1_y n^3) dS$ を

$S : \vec{r} = \vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ $\quad ((u,v) \in D)$.

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|}$$ のときに示す.

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (y_u z_v - z_u y_v,\ z_u x_v - x_u z_v,\ x_u y_v - y_u x_v)$$

より $n^2 dS = (z_u x_v - x_u z_v) du dv$, $n^3 dS = (x_u y_v - y_u x_v) du dv$

となる. 合成関数の微分法より

$$F^1_u = F^1_x x_u + F^1_y y_u + F^1_z z_u$$

$$F^1_v = F^1_x x_v + F^1_y y_v + F^1_z z_v$$

より

$$\iint_S (F^1_z n^2 - F^1_y n^3) dS = \iint_D \left(\frac{\partial F^1}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial F^1}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) du dv$$

$$= \iint_D \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(F^1 \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(F^1 \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right\} du dv$$

$$\overset{\text{Greenの定理}}{=} \int_{\partial D} \left(F^1 \frac{\partial x}{\partial u} du + F^1 \frac{\partial x}{\partial v} dv \right)$$

$$= \int_C F^1 dx$$

□

Stokesの公式から，Gaussの発散定理（2次元），Greenの公式が得られる．$\Omega \subset \mathbb{R}^2$を有界領域，$\vec{n}=(0,0,-1)$として示す．

<u>Stokesの定理 ⇒ Greenの公式</u>

$$\vec{F} = (Q, P, 0) \text{ とすると}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{n} = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \vec{F}\cdot d\vec{r} = Q\,dx + P\,dy$$

だから

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_C (Q\,dx + P\,dy)$$

<u>Greenの公式 ⇒ Gaussの発散定理</u>

$$P = F^1,\ Q = -F^2 \text{ として．}$$

$$\iint_\Omega \underbrace{\left(\frac{\partial F^1}{\partial x} + \frac{\partial F^2}{\partial y}\right)}_{= \mathrm{div}(F^1, F^2)} dx\,dy = \int_{\partial\Omega} \Big(-F^2 \underbrace{dx}_{=\frac{dx}{ds}ds} + F^1 \underbrace{dy}_{=\frac{dy}{ds}ds}\Big)$$

$$= \int_{\partial\Omega} \begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y'(s) \\ -x'(s) \end{pmatrix} ds$$

$$= \int_{\partial\Omega} \begin{pmatrix} F^1 \\ F^2 \end{pmatrix} \cdot \vec{n}\,ds.$$

つまり，Stokesの定理から，積分定理がすべて導出できる．実はGaussの定理からStokesの定理を導出することもできる．

〈Stokesの定理の応用〉

系6.4. (スカラーポテンシャルの存在)

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$：単連結領域，$\vec{F} \in \mathfrak{X}(\Omega)$，$\mathrm{rot}\,\vec{F} = 0$

$\Rightarrow$ $^{\exists} f$：スカラー場 s.t. $\vec{F} = -\nabla f$

証明

$(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ を固定し．$^{\forall}(x, y, z) \in \Omega$ に対し

$$f(x, y, z) := -\int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

とおく．Stokesの定理により．右辺は曲線のとり方に依らない(系6.3を参照)$-\nabla f = \vec{F}$ となることも系6.3と同様である □

スカラー場は一意ではない．実際 $\vec{F} = -\nabla f$ なら．$c \in \mathbb{R}$ に対し $\vec{F} = -\nabla(f + c)$ となる．

§7 微分形式と積分定理

$$\int_\Omega f\, dxdydz, \quad \int_C f\, dx, \quad \int_C f\, dz, \quad \frac{dy}{dx}$$

これらにイミを与えたい.

以下. $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ は領域とする.

§§7.1 微分形式

定義7.1 (微分形式)

Ω 上の微分形式 とは. Ω 上の関数 f と 微分 dx, dy. dz を加えたり. 外積 $\wedge$ をしたりしたもの. ここで外積は.

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx. \qquad \text{etc.}$$

$$dx \wedge (dy + dz) = dx \wedge dy + dx \wedge dz \qquad \text{etc.}$$

に従うとする.

㊟ $dx \wedge dx = -dx \wedge dx$ より $dx \wedge dx = 0$.

例

0-形式 Ω 上のスカラー場 f ($f \in C^\infty(\Omega)$ とかく)

1-形式 $f\,dx + g\,dy + h\,dz$ ($f, g, h \in C^\infty(\Omega)$)

2-形式 $f\,dy \wedge dz + g\,dz \wedge dx + h\,dx \wedge dy$ (〃)

3-形式 $f\,dx \wedge dy \wedge dz$ ($f \in C^\infty(\Omega)$)

例　1-形式 α, β を

$$\alpha = \alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_3 dz, \quad \beta = \beta_1 dx + \beta_2 dy + \beta_3 dz$$

とかくと $\alpha \wedge \beta$ は 2形式で

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge \beta &= (\alpha_1 dx + \alpha_2 dy + \alpha_3 dz) \wedge (\beta_1 dx + \beta_2 dy + \beta_3 dz) \\
&= \alpha_1 \beta_1 \underbrace{dx \wedge dx}_{=0} + \alpha_1 \beta_2 dx \wedge dy + \alpha_1 \beta_3 \underbrace{dx \wedge dz}_{=-dz \wedge dx} \\
&\quad + \alpha_2 \beta_1 \underbrace{dy \wedge dx}_{-dx \wedge dy} + \alpha_2 \beta_2 \underbrace{dy \wedge dy}_{=0} + \alpha_2 \beta_3 dy \wedge dz \\
&\quad + \alpha_3 \beta_1 dz \wedge dx + \alpha_3 \beta_2 \underbrace{dz \wedge dy}_{-dy \wedge dz} + \alpha_3 \beta_3 \underbrace{dz \wedge dz}_{=0} \\
&= (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) dy \wedge dz + (\alpha_3 \beta_1 \wedge \alpha_1 \beta_3) dz \wedge dx \\
&\qquad + (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) dx \wedge dy
\end{aligned}$$

となる.

§§7.2　外微分

定義7.2　(外微分)

0-形式 f に対する外微分 df を

$$df := \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

で定める. 1-形式 $\omega = f dx + g dy + h dz$ に対する外微分 $d\omega$ を

$$d\omega := df \wedge dx + dg \wedge dy + dh \wedge dz$$

で定める. 2-形式についても同様である.

例

定義7.2の $d\omega$ をもう少し計算してみる.

$$
\begin{aligned}
d\omega &= df\wedge dx + dg\wedge dy + dh\wedge dz \\
&= (f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz)\wedge dx \qquad \left(f_x = \frac{\partial f}{\partial x},\ \text{etc.}\right) \\
&\quad + (g_x\,dx + g_y\,dy + g_z\,dz)\wedge dy \\
&\quad + (h_x\,dx + h_y\,dy + h_z\,dz)\wedge dz \\
&= (h_y - g_z)\,dy\wedge dz + (f_z - h_x)\,dz\wedge dx \\
&\qquad + (g_x - f_y)\,dx\wedge dy .
\end{aligned}
$$

㊟ 外微分をすると. 微分形式の次数が1つ上がる.

問　0-形式 f, 1-形式 ω について 次を示せ.
$d(df)=0$,　$d(d\omega)=0$

問　2-形式 $\omega = f\,dy\wedge dz + g\,dz\wedge dx + h\,dx\wedge dy$ について
$d\omega$ を計算せよ.

問　3-形式 ω に対する外微分 $d\omega$ は通常考えない. なぜか?

§§7.3　微分形式と積分

$\omega = f(x)\,dx$ のとき.

$$\int_a^b \omega = \int_a^b f(x)\,dx$$

と定義するのは自然であろう. これを一般化する.

定義7.3

1-形式 $\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$ が曲線 C 上で定義されているとき．ω の C 上での積分を

$$\int_C \omega := \int_C (f\,dx + g\,dy + h\,dz) = \int_C (f, g, h) \cdot d\vec{r}$$

で定義する．

2-形式 $\omega = f\,dy\wedge dz + g\,dz\wedge dx + h\,dx\wedge dy$ が曲面 S 上で定義されているとき．ω の S 上での積分を

$$\int_S \omega := \int_S (f n_1 + g n_2 + g n_3)\, dS$$

で定義する．ただし $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ は S の(向付)単位法線ベクトル．

3-形式 $\omega = f\,dx\wedge dy\wedge dz$ が有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 上で定義されているとき．ω の Ω 上での積分を

$$\int_\Omega \omega := \int_\Omega f\,dx\,dy\,dz$$

で定義する．

<Stokesの定理>

$\vec{F} = (f, g, h) \in \mathfrak{X}(\Omega)$ に対し．

$$\int_S \mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \int_{\partial S} (f\,dx + g\,dy + h\,dz) \quad \text{—}(*)$$

であった．$\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$ とおくと $(*)$ の右辺は

$\int_{\partial S} \omega$ となる．

ところで

$$\mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{n} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{各自}}}{=} (h_y - g_z)\,n_1 + (f_z - h_x)\,n_2 + (g_x - f_y)\,n_3$$

より $\displaystyle\int_S \mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \int_S d\omega$.

従って

$$\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega \qquad \text{—(**)}$$

が成り立つ.

〈Greenの公式〉

有界単連結領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ に対し $\omega = P\,dx + Q\,dy$ とおき、(**)をみとめると.

$$\int_{\partial D} (P\,dx + Q\,dy) = \int_{\partial D} \omega$$

$$= \int_D d\omega = \int_D \Big(\underbrace{dP \wedge dx}_{\frac{\partial P}{\partial y} dy\wedge dx} + \underbrace{dQ \wedge dy}_{\frac{\partial Q}{\partial x} dx\wedge dy}\Big) = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

<u>定理7.1</u> (Stokesの公式)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$: 領域. $\partial\Omega$ は滑らか. ω : Ω 上の k 次微分形式

$S = S^{k+1}$: 向き付け可能な境界を持つコンパクト $(k+1)$ 次元曲面

$$\Rightarrow \int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega$$

§8 Laplace 方程式

以下．ベクトル記号 文は使わない．$dS = d\sigma$ とかく．

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ：有界領域，$\partial\Omega$ は滑らか．
ν は $\partial\Omega$ 上の外向単位法線ベクトル場

$$C^k(\overline{\Omega}) := \{u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ C^k \text{級}\} \qquad (k \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

$$C^k_0(\overline{\Omega}) := \{u \in C^k(\overline{\Omega}) : \underbrace{u|_{\partial\Omega} = 0}_{u(x)=0\ ({}^\forall x \in \partial\Omega)}\}$$

§§8.1 Laplace 方程式の導出

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 連続．　　$F(\xi) := \int_0^\xi f(\eta)\, d\eta$

§1 でかき間違えた？

$$E[u] := \int_\Omega \Big\{ \underbrace{\frac{1}{2}|\nabla u|^2}_{\text{運動エネルギー}} + \underbrace{F(u)}_{\text{ポテンシャルエネルギー}} \Big\} dx \qquad (u \in C^1_0(\Omega))$$

〈変分原理〉

「Energy E は最小が実現される」

$$(V) \qquad E[w] := \inf_{u \in C^1_0(\Omega)} E[v]$$

となる $u \in C^2_0(\overline{\Omega})$ はどのような性質を持つか？

書き間違いではない．

$^\forall t \in \mathbb{R}$, $^\forall \phi \in C_0^1(\bar{\Omega})$に対し、$u$が(V)をみたすなら

$$E[u] = E[u+0\phi] \leq E[u+t\phi]$$

だから $\frac{d}{dt}E[u+t\phi]\Big|_{t=0} = 0$ となるはず。

$$\frac{d}{dt}E[u+t\phi] = \frac{d}{dt}\int_\Omega \left\{ \frac{1}{2}\underbrace{|\nabla(u+t\phi)|^2}_{=|\nabla u|^2+2t\nabla u\cdot\nabla\phi+t^2|\nabla\phi|^2} + F(u+t\phi) \right\} dx$$

$$= \int_\Omega \left\{ \nabla u\cdot\nabla\phi + t|\nabla\phi|^2 + F'(u+t\phi)\phi \right\} dx.$$

より

$$\frac{d}{dt}E[u+t\phi]\Big|_{t=0} = \int_\Omega \{ \nabla u\cdot\nabla\phi + \underbrace{F'(u)}_{=f(u)}\phi \} dx$$

Greenの第1公式

$$\to = \int_{\partial\Omega} \underbrace{\phi}_{=0} \nabla u\cdot\nu\, d\sigma + \int_\Omega (-\Delta u + f(u))\phi\, dx$$

$$= \int_\Omega (-\Delta u + f(u))\phi\, dx.$$

ϕは任意だったことと $\frac{d}{dt}E[u+t\phi]\Big|_{t=0} = 0$ より

$$\text{(EL)} \quad -\Delta u + f(u) = 0$$

が得られた(Euler-Lagrange方程式という)。とくに$f\equiv 0$なら

$$(L) \qquad -\Delta u = 0$$

が得られる。(L)を Laplace 方程式といい、(L)をみたす $u \in C^2(\Omega)$ を調和関数という。

§8.2 平均値の定理

Thm. 8.1 (平均値の定理)

$u \in C^2(\Omega)$ が調和関数 (i.e. $-\Delta u = 0$)

$\Rightarrow$ ${}^\forall B = B_R(y) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x-y| < R\} \subset \Omega$ に対し

$$u(y) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int_{B_R(y)} u(x)\,dx$$

$\frac{4}{3}\pi R^3$: $B_R(y)$ の体積.

(注) 調和関数は、ball の中心の値が、その ball の積分平均で決まってしまう.

pf. 1. 話を簡単にするため、$y=0$ とする (平行移動すればよい)

$0 < \rho < R$ に対し、Gauss の発散定理より

$$0 = \int_{B_\rho(0)} \Delta u\,dv = \int_{B_\rho(0)} \operatorname{div}(\nabla u)\,dx$$

$$= \int_{\partial B_\rho(0)} \nabla u(x) \cdot \nu(x)\,d\sigma(x)$$

右辺の面積分を計算してみる.

$$x = \rho(\cos u\cos v,\ \cos u\sin v,\ \sin u) =: \rho\omega$$
$$\left((u,v) \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right) \times (-\pi, \pi) =: U \right)$$

と球面を表示すると (cf. 例 5.3)

$$d\sigma = \rho^2 \cos u\, du\, dv. \qquad \nu(x) = \frac{x}{\rho} = \omega.$$

より

$$\nabla u(x) \cdot \nu(x) = \nabla u(\rho\omega) \cdot \omega = \frac{\partial}{\partial \rho} u(\rho\omega)$$

だから.

$$0 = \int_{\partial B_\rho(0)} \nabla u(x) \cdot \nu(x)\, d\sigma(x)$$
$$= \rho^2 \iint_U \frac{\partial}{\partial \rho} u(\rho\omega) \cos u\, du\, dv$$
$$= \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \rho^{-2} \iint_U u(\rho\omega) \underbrace{\rho^2 \cos u\, du\, dv}_{= d\sigma} \right\}$$
$$= \rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \rho^{-2} \iint_{\partial B_\rho(0)} u\, d\sigma \right\}$$

となるから. $\rho^{-2} \iint_{\partial B_\rho(0)} u\, d\sigma$ は $0 < \rho < R$ に関して定数.

つまり $0 < {}^\forall \rho < R$ に対し

$$\frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial B_R(0)} u\, d\sigma = \frac{1}{4\pi \rho^2} \int_{\partial B_\rho(0)} u\, d\sigma \qquad —(*)$$

2. (*)で $\rho \downarrow 0$ とするために

$$\frac{1}{4\pi\rho^2}\int_{\partial B_\rho(0)} u \, d\sigma \to u(0) \qquad (\rho \downarrow 0) \quad -(**)$$

を示す.

$$\left|\frac{1}{4\pi\rho^2}\int_{\partial B_\rho(0)} u \, d\sigma - u(0)\right| = \left|\frac{1}{4\pi\rho^2}\int_{\partial B_\rho(0)} (u(x) - u(0)) \, d\sigma(x)\right|$$

$$\leq \frac{1}{4\pi\rho^2}\int_{\partial B_\rho(0)} \underbrace{|u(x) - u(0)|}_{\leq \sup_{z \in \overline{B_\rho(0)}} |u(z) - u(0)|} d\sigma(x)$$

$$\leq \sup_{x \in \overline{B_\rho(0)}} |u(x) - u(0)|$$

と u が $y=0$ の(閉)近傍上で一様連続だから

$$\sup_{x \in \overline{B_\rho(0)}} |u(x) - u(0)| \to 0 \qquad (\rho \downarrow 0)$$

となる. よって(**)が示せたので(*)より

$$u(0) = \frac{1}{4\pi R^2}\int_{\partial B_R(0)} u \, d\sigma. \quad -(***)$$

が得られた.

3. (*)と(***)より

$$\int_{\partial B_\rho(0)} u \, d\sigma = 4\pi\rho^2 u(0) \qquad (0 < {}^\forall\rho < R)$$

となるので両辺 $0<\rho<R$ について積分すると

$$\int_{B_\rho(0)} u \, dx = \frac{4}{3}\pi\rho^3 u(0)$$

となる

□

§§ 8.3 最大値原理

Thm. 8.2 (最大値原理)

$u \in C^2(\overline{\Omega})$ が調和関数 (i.e. $-\Delta u = 0$)

$^\exists y \in \Omega$ s.t. $u(y) = \sup_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$ (i.e. Ω の内部に最大点がある)

$\Longrightarrow$ u は定数関数

⑪ 対偶をとると. u が定数でない $\Rightarrow$ 内部で最大値をとらない.

Rem. 8.1

Thm. 8.2 で u のかわりに $-u$ を考えると

$^\exists y \in \Omega$ s.t. $u(y) = \inf_{x \in \overline{\Omega}} u(x) \Rightarrow$ u は定数

も得られる.

Cor. 8.1

$u \in C^2(\overline{\Omega})$ が調和関数

$$\Longrightarrow \inf_{y \in \partial\Omega} u(y) \leq u(x) \leq \sup_{y \in \partial\Omega} u(y)$$

Ω でなくて境界だけでよい

Thm. 8.3

$u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ が

$$\begin{cases} -\Delta u = -\Delta v & \text{in } \Omega \\ u = v & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

をみたす $\Rightarrow$ $u = v$ in Ω

pf. of Thm. 8.3

$w = u - v$ とおくと

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{in } \Omega \\ w = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

より $\sup\limits_{y \in \partial\Omega} w = \inf\limits_{y \in \partial\Omega} w = 0$. Cor. 8.1 より

$w(x) = 0$ ($^\forall x \in \Omega$) だから $u = v$ in Ω □

Thm. 8.4 (比較原理)

$u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ が

$$\begin{cases} -\Delta u = -\Delta v & \text{in } \Omega \\ u \leq v & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

をみたす $\Rightarrow$ $u \leq v$ on $\partial\Omega$

pf. of Thm. 8.4

$w = u - v$ とおくと

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{in } \Omega \\ w \leq 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

より $\sup\limits_{y \in \partial\Omega} w \leq 0$. Cor. 8.1 より $w(x) \leq 0$ ($^\forall x \in \Omega$)

から $u \leq v$ in Ω がわかる □

pf. of Thm. 8.2

1. $M := \sup_{x \in \overline{\Omega}} u(x)$ とおき.

$$\Omega_M := \{ x \in \Omega : u(x) = M \}$$

とおく. $y \in \Omega_M$ より $\Omega_M \neq \phi$. また. u は conti. で

$\{M\} \subset \mathbb{R}$ は closed だから $\Omega_M = u^{-1}(\{M\})$ も closed.

2. Ω_M が open となることを示す. $^\forall z \in \Omega_M$ に対し

$u - M$ は調和関数だから. Thm. 8.1 (平均値の定理)

より $B_R(z) \subset \Omega$ となる $R > 0$ に対し

$$\underset{\substack{\uparrow \\ z \in \Omega_M}}{0} = u(z) - M = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int_{B_R(z)} (u - M)\, dx \underset{\substack{\uparrow \\ M = \sup_{y \in \overline{\Omega}} u(y)}}{\leq 0}$$

となるから $u - M \leq 0$ in $B_R(z)$ に注意すると

$u - M = 0$ in $B_R(z)$ となる. i.e. $u(x) = M$ $(^\forall x \in B_R(z))$

従って $B_R(z) \subset \Omega_M$ となるから Ω_M は open.

3. Ω は connected であり. Ω_M が open かつ

closed で $\Omega_M \neq \phi$ より $\Omega_M = \Omega$ となる.

従って $u(x) = M$ $(^\forall x \in \Omega)$ となる $\square$

§8.3 Greenの表現公式

Def. 8.1 (Laplace方程式の基本解)

$y \in \Omega$ に対し

$$\Gamma(x-y) := \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|} \qquad (x \in \Omega)$$

をLaplace方程式の基本解という.

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x-y) = -\frac{1}{4\pi}\frac{x_i-y_i}{|x-y|^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\Gamma(x-y) = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{3(x_i-y_i)(x_j-y_j)}{|x-y|^5} - \frac{1}{|x-y|^3}\right\}$$

より

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x-y)\right| \leq \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|^2}$$

$$\Delta_x \Gamma(x-y) = 0 \qquad (x \neq y)$$

がわかる.

問 上記の計算を確認せよ.

Thm.8.5 (Greenの表現公式)

$u \in C^2(\overline{\Omega})$, $y \in \Omega$ に対し

$$u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x)\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) \right) d\sigma(x) - \int_{\Omega} \Gamma(x-y)\, \Delta u \, dx \quad -(*)$$

が成り立つ.

Cor.8.2

$u \in C^2(\overline{\Omega})$ が調和関数

$$\Rightarrow \quad u(y) = \int_{\partial\Omega} \left(\Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x)\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y) \right) d\sigma(x) \quad -(**)$$

とくに. uは無限回微分可能.

pf. of Cor.8.2

$(**)$は$(*)$で$\Delta u = 0$を用いればよい.

$(*)$の右辺の非積分関数はyについて無限回微分可能だから. uも無限回微分可能になる

□

Rem.8.2

Cor.8.2から「調和関数は境界の情報だけで決まる」こともわかる.

pf. of Thm. 8.5

$y\in\Omega$に対し $B_\rho(y)\subset\Omega$ となる $\rho>0$ をとり、Green の第二公式を用いると

$$\int_{\Omega\setminus B_\rho(y)} \Big(\Gamma(x-y)\,\Delta u(x) - u(x)\,\underbrace{\Delta\Gamma(x-y)}_{=0}\Big)\,dx$$

$$= \int_{\partial(\Omega\setminus B_\rho(y))} \Big(\Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x)\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y)\Big)\,d\sigma(x)$$

$$= \int_{\partial\Omega} \Big(\Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x)\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y)\Big)\,d\sigma(x) \qquad \text{—(***)}$$

$$+ \int_{\partial B_\rho(y)} \Big(\Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x)\frac{\partial \Gamma}{\partial \nu}(x-y)\Big)\,d\sigma(x)$$

ただし、νは $\partial(\Omega\setminus B_\rho(y))$ での外向単位法線ベクトル

$B_\rho(y)$からみると内向.

ここで

$$\left|\int_{\partial B_\rho(y)} \Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\,d\sigma(x)\right| \underset{|x-y|=\rho}{\leq} \frac{1}{4\pi\rho}\int_{\partial B_\rho(x)} \underbrace{\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\right|}_{=|\nabla u\cdot\nu|\leq|\nabla u|}\,d\sigma(x)$$

$$\leq 4\pi\rho \sup_{x\in B_\rho(y)} |\nabla u| \to 0$$

$(\rho\downarrow 0)$

$$\int_{\partial B_\rho(y)} u(x)\frac{\partial P}{\partial \nu}(x-y)\,d\sigma(x) \underset{\substack{\uparrow \\ |x-y|=\rho \\ \nu=\frac{-(x-y)}{\rho}}}{=} \frac{1}{4\pi\rho^3}\int_{\partial B_\rho(y)} u(x)\,(x-y)\cdot\frac{(x-y)}{\rho}\,d\sigma(x)$$

$$= \frac{1}{4\pi\rho^2}\int_{\partial B_\rho(y)} u(x)\,d\sigma(x) \longrightarrow u(y) \quad (\rho\downarrow 0).$$

となるから (***) で $\rho\downarrow 0$ とすると

$$\int_\Omega P(x-y)\,\Delta u(x)\,dx = \int_{\partial\Omega}\left(P(x-y)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) - u(x)\frac{\partial}{\partial \nu}P(x-y)\right)d\sigma(x) - u(y)$$

が得られる □

〈まとめ〉

調和関数は次の性質を持つ.

(i) 積分平均で決まる.

(ii) 最大. 最小は境界で達成される.

(iii) 境界の情報で決まってしまう.

§9 非線形方程式

$1<p<\infty$, ポテンシャル $f(u)=u^p$ として,

$$(E)\quad \begin{cases} -\Delta u = u^p & \text{in } B_1 \\ u=0 & \text{on } \partial B_1 \end{cases}$$

を考える. ただし $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x|<1\}$ である.

<u>Thm. 9.1</u>

$p>5 \Longrightarrow$ (E)に正値解は存在しない.

のつまり $p>5$ で符号が変化しないとき,

(E)の解は $u \equiv 0$ in B_1 に限られる.

<u>pf.</u> (E)に正値解があるとする.

<u>1.</u> (E)の両辺に $x \cdot \nabla u$ をかけると

$$-(x\cdot\nabla u)\,\Delta u = (x\cdot\nabla u)\,u^p$$

だから, 両辺 B_1 上で積分すると

$$-\int_{B_1} (x\cdot\nabla u)\,\Delta u\, dx = \int_{B_1} (x\cdot\nabla u)\,u^p\, dx \qquad -(*)$$

となる.

2. $((*)\text{の左辺}) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Greenの}\\ \text{第一公式}}}{=} \int_{B_1} \nabla(x\cdot\nabla u)\cdot\nabla u\,dx - \int_{\partial B_1} (x\cdot\nabla u)(\nabla u\cdot\nu)\,d\sigma$

$$=: I_1 + I_2 \quad \text{とおく.}$$

$$I_1 = \int_{B_1} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{3} x_j \frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx$$

$$= \int_{B_1} \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx + \int_{B_1} \sum_{j=1}^{3} x_j \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)}_{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}|\nabla u|^2}\,dx$$

$$= \int_{B_1} |\nabla u|^2\,dx + \int_{B_1} x\cdot\nabla|\nabla u|^2\,dx$$

Gauss の発散定理

$$= \int_{B_1} |\nabla u|^2\,dx - \frac{1}{2}\int_{B_1} \underbrace{\mathrm{div}\,x}_{=3}\,|\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\partial B_1} |\nabla u|^2 \underbrace{(x\cdot\nu)}_{x\cdot\frac{x}{|x|}=|x|=1}\,d\sigma$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{B_1} |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\partial B_1} |\nabla u|^2\,d\sigma.$$

$$I_2 = -\int_{\partial B_1}\left(\frac{x}{|x|}\cdot\nabla u\right)(\nabla u\cdot\nu)\,d\sigma = -\int_{\partial B_1}(\nabla u\cdot\nu)^2\,d\sigma.$$

ここで

$$x = r(\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\sin\theta, \sin\phi) =: r\omega$$

$$\left(-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2},\quad -\pi < \theta < \pi\right)$$

と極座標変換すると、$u=0$ on ∂B_1 より

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|_{\partial B_1} = \left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right|_{\partial B_1} = 0$$

また $\left.\dfrac{\partial}{\partial r}u(x)\right|_{\partial B_1} = \nabla u \cdot \omega = \nabla u \cdot \nu$ より

$$I_2 = -\int_{\partial B_1} |\nabla u|^2 \, d\sigma = -\int_{\partial B_1} \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\sigma$$

従って

$$((*)\text{の右辺}) = -\frac{1}{2}\int_{B_1} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\partial B_1} \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\sigma$$

3. $((*)\text{の右辺}) = \displaystyle\int_{B_1} x \cdot \nabla\left(\frac{1}{p+1}u^{p+1}\right) dx$

$$\underset{\text{Gaussの発散定理}}{=} -\int_{B_1} \operatorname{div} x \left(\frac{1}{p+1}u^{p+1}\right) dx + \int_{\partial B_1} (x\cdot\nu)\left(\underset{=0}{\frac{1}{p+1}u^{p+1}}\right) d\sigma$$

$$= -\frac{3}{p+1}\int_{B_1} u^{p+1} dx$$

4. (E) に u をかけて積分すると

$$-\int_{B_1} u \Delta u \, dx = \int_{B_1} u^{p+1} dx$$

ここで

$$(\text{左辺}) \underset{\text{Greenの第1公式}}{=} \int_{B_1} (\nabla u \cdot \nabla u) \, dx - \int_{\partial B_1} \underset{=0}{u} (\nabla u \cdot \nu) \, d\sigma = \int_{B_1} |\nabla u|^2 dx$$

だから(*)より

$$-\frac{1}{2}\int_{B_1} u^{p+1}\,dx - \frac{1}{2}\int_{\partial B_1}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\sigma = -\frac{3}{p+1}\int_{B_1} u^{p+1}\,dx$$

すなわち.

$$\left(\frac{3}{p+1}-\frac{1}{2}\right)\int_{B_1} u^{p+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{\partial B_1}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 d\sigma \quad -(**)$$

が得られる. ここで((**)の右辺) ≥ 0 より. ((**)の左辺) < 0

なら矛盾となる. つまり

$$\frac{3}{p+1}-\frac{1}{2}<0 \iff \frac{3}{p+1}<\frac{1}{2} \iff \frac{p+1}{3}>2$$
$$\iff p>5$$

となれば矛盾が得られる.

<u>Rem. 9.1</u>

この計算で得られた恒等式(**)をPohozaev

の恒等式という. (Pohozaev 1965)