現代解析学I 定期試験問題

平成 25 年 7 月 30 日 第 2 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を許す
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1, 2 は必答. 問題 3, 4 から一問選んで答えよ. ただし, 二問とも答えた場合は, 問題 3 のみ採点する. 計算過程は省略せずに書くこと.

問題 1.

$\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ に対して, $\nabla \left(\dfrac{e^{\alpha|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} \right)$, $\Delta \left(\dfrac{e^{\alpha|\vec{x}|}}{|\vec{x}|} \right)$ を計算せよ. そして, $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ 上で次の偏微分方程式

$$-\Delta u + 4u = 0$$

をみたす解 $u : \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}$ を一つ求めよ.

問題 2.

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を有界領域, $\vec{0} \in \Omega$ かつ $\partial\Omega$ は滑らかとし, $\vec{n}$ を $\partial\Omega$ 上での外向き単位法線ベクトルとする.

(1) $-\Delta (\log |\vec{x}|)$ を計算せよ. ただし, Δ は二次元の Laplacian である.

(2) 次の積分を求めよ:

$$\int_{\partial\Omega} \nabla (\log |\vec{x}|) \cdot \vec{n} \, dS.$$

問題 3.

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を有界領域とし, $\partial\Omega$ は滑らかとする. V を Ω の体積, A を $\partial\Omega$ の面積 (すなわち Ω の表面積) とする.

(1) 積分に対する Schwarz の不等式を用いて, 次の不等式を示せ.

$$V^2 \leq \frac{1}{9} \left(\int_{\partial\Omega} |x|^2 \, dS \right) A. \tag{IPI}$$

(2) (IPI) において, Ω が原点中心, 半径 $r > 0$ の球となるときに, 等号が成立することを示せ.

問題 4.

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を有界領域とし, 境界 $\partial\Omega$ は滑らかとする. 微分形式における Stokes の定理

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$$

を認めて, 発散定理

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} \vec{F}\, dx = \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

を導出せよ.

以下余白, 計算用紙として使ってよい