現代解析学 I 演習問題 その 1 (2013 年 5 月 14 日)

問題 1.1.
$\vec{x},\, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$(\vec{x}\text{と}\vec{y}\text{から作られる平行四辺形の面積})^2 = |\vec{x}|^2|\vec{y}|^2 - (\vec{x}\cdot\vec{y})^2$$

を示せ (ヒント: $\vec{x}$ と $\vec{y}$ から作られる三角形の面積は $\frac{1}{2}|\vec{x}||\vec{y}|\sin\theta$ となることを使う)

問題 1.2.
$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ に対して, 次の等式を示せ.

$$\frac{|\vec{x}+\vec{y}|^2 + |\vec{x}-\vec{y}|^2}{2} = |\vec{x}|^2 + |\vec{y}|^2, \qquad \vec{x}\cdot\vec{y} = \frac{1}{4}(|\vec{x}+\vec{y}|^2 - |\vec{x}-\vec{y}|^2).$$

問題 1.3.
次の各問いに答えよ.

(1) $\vec{x} = (1,1,1)$, $\vec{y} = (2,-1,1)$, $\vec{z} = (-1,3,2)$ のとき, $(\vec{x}\times\vec{y})\times\vec{z}$ と $\vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{z})$ を求めよ.

(2) $\vec{x},\vec{y},\vec{z} \in \mathbb{R}^3$ が $\vec{x}+\vec{y}+\vec{z} = \vec{0}$ をみたすとき, $\vec{x}\times\vec{y} = \vec{y}\times\vec{z} = \vec{z}\times\vec{x}$ を示せ.

問題 1.4.
$\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z} \in \mathbb{R}^3$ に対して,

$$(\vec{x}\times\vec{y})\cdot\vec{z} = \vec{x}\cdot(\vec{y}\times\vec{z}) = \det(\vec{x},\, \vec{y},\, \vec{z})$$

となることを示せ.

問題 1.5.
$t \in \mathbb{R}$ に対して, $\vec{F}(t) = (t, t^2, t^3)$, $\vec{G}(t) = (2t^2+3, -3t+2, 4)$ とおく. このとき, $\vec{F}\cdot\vec{G}$, $\vec{F}\times\vec{G}$ を微分せよ (一次導関数を求めよ).

問題 1.6.
$r > 0$, $0 < s < 2\pi r$ に対して,

$$\vec{p}(s) := \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right)$$

とおくと, $\vec{p}$ は半径 r, 原点中心の円を定める.

(1) $\dfrac{d\vec{p}}{ds}(s)$ を求め, s が弧長パラメータとなることを示せ.

(2) $\vec{e_1}(s) := \dfrac{d\vec{p}}{ds}(s)$, $\vec{e_2}(s) := \vec{e_2}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{e_1}(s)$ とおく. このとき, 次を示せ.

$$\vec{e_1}(s)\cdot\vec{e_2}(s) \equiv 0, \quad |\vec{e_2}(s)| \equiv 1, \quad \text{かつ}\ \det(\vec{e_1}(s)\ \vec{e_2}(s)) \equiv 1$$

(3) $\dfrac{d\vec{p}}{ds}(s)$ と $\dfrac{d^2\vec{p}}{ds^2}(s)$ が直交することを示せ.

(4) $\dfrac{d\vec{p}}{ds}(s)$ と $\dfrac{d^2\vec{p}}{ds^2}(s)$ が直交するから,

$$\frac{d^2\vec{p}}{ds^2}(s) = \kappa(s)\vec{e_2}(s)$$

と書くことができる. この $\kappa(s)$ を求めよ. $\kappa(s)$ を曲率という.

問題 1.7.

$\mathbb{R}^3$ のベクトル場 $\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)$ を

$$\vec{F}(x,y,z):=(x^2y,-2xz,2yz)$$

とおいたとき, $\operatorname{div}\vec{F}$, $\operatorname{rot}\vec{F}$, $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{F})$ を求めよ.

問題 1.8.

$\vec{x}\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ に対して, $-\Delta\left(\dfrac{1}{|\vec{x}|}\right)$ を計算せよ.

問題 1.9.

$\Omega\subset\mathbb{R}^3$ を領域とする.

(1) f,g を Ω 上のスカラー場とするとき, $f\Delta g+g\Delta f-\Delta(fg)$ を計算せよ.
(2) f を Ω 上のスカラー場, $\vec{F}\in\mathscr{X}(\Omega)$ とするとき, $\operatorname{div}(f\vec{F})$, $\operatorname{rot}(f\vec{F})$ を計算せよ.
(3) f を Ω 上のスカラー場, $\phi\in C^2(\mathbb{R})$ とするとき, $\Delta(\phi(f))$ を計算せよ.

問題 1.10.

$\Omega\subset\mathbb{R}^3$ を領域とする.

(1) f を Ω 上のスカラー場とするとき, $\operatorname{rot}(\nabla f)=\vec{0}$ を示せ.
(2) $\vec{f}\in\mathscr{X}(\Omega)$ とするとき, $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{f})=0$ を示せ.

問題 1.11.

$\vec{F}=(F_1,F_2,F_3)\in\mathscr{X}(\mathbb{R}^3)$ は $\operatorname{rot}\vec{F}=\vec{0}$ をみたすとする. このとき,

$$f(x,y,z)=\int_0^x F_1(t,y,z)\,dt+\int_0^y F_2(0,t,z)\,dt+\int_0^z F_3(0,0,t)\,dt$$

とおくと $\nabla f=\vec{F}$ をみたすことを示せ. この結果を使って, $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 $\vec{G}(x,y,z)=(2xyz^3,x^2z^3,3x^2yz^2)$ がスカラーポテンシャルを持つことを示し, スカラーポテンシャルを一つ求めよ.

問題 1.12.

$c\in\mathbb{R}$ を定数, $(t,x,y,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ に対して, 真空中の電場 $\vec{E}=\vec{E}(t,x,y,z)$ と磁場 $\vec{H}=\vec{H}(t,x,y,z)$ は Maxwell 方程式 (M) をみたすことをが知られている.

$$\text{(M)}\qquad \begin{cases}\operatorname{rot}\vec{H}-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\vec{0}, & \operatorname{rot}\vec{E}+\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t}=\vec{0}\\ \operatorname{div}\vec{E}=0, & \operatorname{div}\vec{H}=0\end{cases}$$

このとき, $\vec{E}$, $\vec{H}$ は波動方程式

$$\text{(W)}\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}-c^2\Delta\vec{H}=\vec{0}\\ \dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}-c^2\Delta\vec{E}=\vec{0}\end{cases}$$

をみたすことを示せ[1].

[1] Maxwell はこの方程式を用いて, 電場と磁場から電磁波の存在を理論的に予想した. 電磁波は Hertz によって実際に発見された.

現代解析学I 演習問題 その2 (2013年6月18日)

問題 2.1 から問題 2.6 については, 積分定理を用いずに計算せよ.

問題 2.1.

$C : \vec{r}(t) = (3t, 4t, 5t)$ $(0 \le t \le 1)$ としても例 5.1(講義ノート参照) と同じ曲線を定める. このときに

$$\int_C (x + y + z)\, ds$$

を計算せよ.

問題 2.2.

$C : \vec{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ $(0 \le t \le 1)$ としたときに

$$\int_C (3x^2 + 6y, -10yz, 16xz^2) \cdot d\vec{r}$$

を求めよ.

問題 2.3.

C を xy 平面上の原点を中心とする半径 3 の左回りの円とするとき

$$\int_C (2x + y - z, x + y - z^2, 3x - 9y + 7z^3) \cdot d\vec{r}$$

を求めよ (ヒント: まず曲線 C の表示を求めよ).

問題 2.4.

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ z \ge 0\}$ として

$$\int_S \mathrm{rot}(2x + y - z, x + y - z^2, 3x - 9y + 7z^3) \cdot \vec{n}\, dS$$

を求めて Stokes の定理が成り立つことを確かめよ. ただし, $\vec{n} = \frac{(x,y,z)}{3}$ とする.

問題 2.5.

$\mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |(x, y, z)| = 1\}$ とするとき,

$$\int_{\mathbb{S}^2} (x + y + z)\, dS$$

を求めよ.

問題 2.6.

$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |(x, y, z)| < 2\}$ とする. Ω 上のベクトル場 $\vec{F}$ を $\vec{F}(x, y, z) = (2x, 2y, -z)$ とおいて

$$\iiint_\Omega \mathrm{div}\, \vec{F}\, dxdydz = \iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$$

が成り立つ, すなわち Gauss の発散定理が成り立つことを確かめよ.

問題 2.7.

Green の定理の証明をまねて, Ω が長方形のときに, 次を示せ.

$$\iint_\Omega \frac{\partial Q}{\partial x}\, dxdy = \int_{\partial\Omega} Q\, dy.$$

問題 2.8.

C を原点を中心とする半径 2 の円とするとき

$$\int_C (xy(x-y)\,dx + x^2 y\,dy)$$

を求めよ.

問題 2.9 (Green の第一公式, 第二公式)**.**

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を有界領域とし, $\partial\Omega$ は滑らか, $\vec{n}$ を $\partial\Omega$ 上の外向き単位法線ベクトル, f, g を Ω 上のスカラー場とする.

(1) 次の等式を示せ (Green の第一公式という).

$$-\int_\Omega \Delta f g\,dxdydz = -\int_{\partial\Omega} g\nabla f \cdot \vec{n}\,dS + \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g\,dxdydz.$$

(2) 次の等式を示せ (Green の第二公式という).

$$\int_\Omega f\Delta g\,dxdydz - \int_\Omega g\Delta f\,dxdydz = \int_{\partial\Omega} (f(\nabla g \cdot \vec{n}) - g(\nabla f \cdot \vec{n}))\,dS.$$

問題 2.10.

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を有界領域で, 境界 $\partial\Omega$ は滑らかとする. Ω 上のスカラー場 u, f が次の Neumann 境界条件付 Poisson 方程式

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \nabla u \cdot \vec{n} = 0, & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

をみたすとする. ただし, $\vec{n}$ は $\partial\Omega$ 上の外向き単位法線ベクトルである. このとき, 任意の滑らかな Ω 上のスカラー場 ϕ に対して

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\phi\,dxdydz = \int_\Omega f\phi\,dxdydz$$

を示せ.

問題 2.11.

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を有界領域で, 境界 $\partial\Omega$ は滑らかとする. Ω 上の滑らかな関数 u, f が次の Dirichlet 境界条件付 Poisson 方程式

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{in } \Omega \\ u = 0, & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

をみたすとする. このとき, $\partial\Omega$ 上で $\phi \equiv 0$ をみたす, 滑らかな Ω 上の関数 ϕ に対して

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\phi\,dxdydz = \int_\Omega f\phi\,dxdydz$$

を示せ.

問題 2.12.

$n \in \mathbb{N}$ と $r > 0$ に対して, $B_r^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$ とおく. さらに $V(r)$ を B_r^n の体積, $A(r)$ を B_r^n の表面積 (すなわち ∂B_r^n の面積) とするとき, 次を示せ.

$$\frac{d}{dr}V(r) = A(r).$$

現代解析学I レポート問題

2012年度現代解析学IIIの合格者はこのレポートをもって期末試験にかえる．6題中5題以上を解答すること.

問題 3.1 (問題 1.11 と同じ)**.**
$\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) \in \mathscr{X}(\mathbb{R}^3)$ は $\mathrm{rot}\,\vec{F} = \vec{0}$ をみたすとする．このとき,

$$f(x,y,z) = \int_0^x F_1(t,y,z)\,dt + \int_0^y F_2(0,t,z)\,dt + \int_0^z F_3(0,0,t)\,dt$$

とおくと $\nabla f = \vec{F}$ をみたすことを示せ.

問題 3.2 (問題 1.12 と同じ)**.**
Maxwell は電場と磁場の関係式を導出して, 電場と磁場から電磁波の存在を理論的に予想した．電磁波は Hertz によって実際に発見された．このことを, 追体験してみよう.

(1) $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ を $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 ベクトル場のラプラシアンを

$$\Delta\vec{v} = (\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3)$$

で定める．このとき,

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{v}) = -\Delta\vec{v} + \nabla(\mathrm{div}\,\vec{v})$$

を示せ.

(2) $c \in \mathbb{R}$ を定数, $(t,x,y,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ に対して, 真空中の電場 $\vec{E} = \vec{E}(t,x,y,z)$ と磁場 $\vec{H} = \vec{H}(t,x,y,z)$ は Maxwell 方程式 (M) をみたすことをが知られている.

$$\text{(M)} \qquad \begin{cases} \mathrm{rot}\,\vec{H} - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}, & \mathrm{rot}\,\vec{E} + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \vec{0} \\ \mathrm{div}\,\vec{E} = 0, & \mathrm{div}\,\vec{H} = 0 \end{cases}$$

このとき, $\vec{E}$, $\vec{H}$ は波動方程式

$$\text{(W)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - c^2\Delta\vec{H} = \vec{0} \\ \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c^2\Delta\vec{E} = \vec{0} \end{cases}$$

をみたすことを示せ

問題 3.3 (問題 2.9 と同じ)**.**
$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を有界領域とし, $\partial\Omega$ は滑らか, $\vec{n}$ を $\partial\Omega$ 上の外向き単位法線ベクトル, f, g を Ω 上のスカラー場とする.

(1) 次の等式を示せ (Green の第一公式という).

$$-\int_\Omega \Delta f g\,dxdydz = -\int_{\partial\Omega} g\nabla f \cdot \vec{n}\,dS + \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g\,dxdydz.$$

(2) 次の等式を示せ (Green の第二公式という).

$$\int_\Omega f\Delta g\,dxdydz - \int_\Omega g\Delta f\,dxdydz = \int_{\partial\Omega} \left(f(\nabla g \cdot \vec{n}) - g(\nabla f \cdot \vec{n})\right)\,dS.$$

問題 3.4 (問題 2.10 と同じ)**.**

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を有界領域で, 境界 $\partial\Omega$ は滑らかとする. Ω 上のスカラー場 u, f が次の Neumann 境界条件付 Poisson 方程式

$$\text{(P)} \qquad \begin{cases} -\Delta u = f, & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \nabla u \cdot \vec{n} = 0, & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

をみたすとする. ただし, $\vec{n}$ は $\partial\Omega$ 上の外向き単位法線ベクトルである. このとき, 任意の滑らかな Ω 上のスカラー場 ϕ に対して

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \phi \, dxdydz = \int_\Omega f\phi \, dxdydz \tag{3.1}$$

を示せ. なお, (3.1) は u の 1 階微分しか使っていないこと, つまり $u \in C^1(\Omega)$ で意味を持つことに注意せよ. この事実を使って, (P) の弱解が定義される.

問題 3.5.

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を滑らかな境界を持つ領域とする. $1 < p < \infty$ に対して

$$E_p[v] := \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p \, dx$$

とおく. 今 $u \in C^2(\Omega)$ が存在して

$$E_p[u] := \inf_{v \in C^1(\Omega)} E_p[v], \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = 0$$

をみたすとする[2]. ただし, ν は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルと する[3].

(1) $\phi \in C^\infty(\Omega)$, $t \in \mathbb{R}$ に対して, $\dfrac{d}{dt}E_p[u + t\phi]$ を計算せよ. ただし, $\nabla\phi$ は残したままでよい.

(2) $E_p[u] = E_p[u + 0\phi] \le E_[u + t\phi]$ だから, $\left.\dfrac{d}{dt}E_p[u + t\phi]\right|_{t=0} = 0$ となるはずである. Gauss の発散定理を用いて,

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

を導け. なお, $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ を p-Laplacian という.

問題 3.6.

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を領域, $u \in C^2(\Omega)$ を劣調和関数とする. すなわち,

$$-\Delta u \le 0 \quad \text{in } \Omega$$

をみたすとする. このとき $B_r(x) \subset \Omega$ をみたす開球に対して

$$u(x) \le \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} u(y) \, dy$$

を示せ.

---

[2]実は, $u \in C^2(\Omega)$ は期待できないことが知られているが, 今は気にしないことにする.

[3]この法線方向微分が 0 となる条件は実は必要ない.

現代解析学 I 挑戦的演習問題

以下, Gauss の発散定理はすべての次元で成立することを認めてよい.

問題 4.1.

n 次元単位球 $B_1^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ 上で, 次の非線形楕円型方程式を考える.

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p & \text{in } B_1^n, \\ u > 0 & \text{in } B_1^n, \\ u = 0 & \text{on } \partial B_1^n. \end{cases} \tag{4.2}$$

このとき, $n \geq 3$ かつ $p > \frac{n+2}{n-2}$ ならば, 方程式 (4.2) の解が存在しないことを示せ.

注意.

$\frac{n+2}{n-2}$ を **Sobolev の臨界指数**という.

問題 4.2.

滑らかな境界を持つ有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ が星型条件

$$(x \cdot \nu) \geq 0 \quad (\forall x \in \partial\Omega)$$

をみたすとする. このとき次の非線形楕円型方程式

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p & \text{in } \Omega, \\ u > 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.3}$$

に対して, $p > 5$ ならば方程式 (4.3) の解が存在しないことを示せ (ヒント: 難しいのは境界積分をどのように計算すればよいかである. 境界の各点において, 接平面を考えて, その接平面の基底を方向にとする方向微分を考えてみよ).

問題 4.3.

3 次元単位球 $B_1^3 := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ 上で, 次の非線形楕円型方程式を考える.

$$\begin{cases} -\Delta_p u := -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = u^q & \text{in } B_1^3, \\ u > 0 & \text{in } B_1^3, \\ u = 0 & \text{on } \partial B_1^3. \end{cases} \tag{4.4}$$

このとき, (4.4) の解が存在しないための p, q の条件を求めよ. 余裕があれば, 3 次元単位球を n 次元単位球にとりかえて考えてみよ (ヒント: やり方は, 問題 3.1 とあまり変わらない. 計算が面倒になるだけ).

参考文献

Lawrence C. Evans, Partial differential equations, Graduate Studies in Mathematics, **19**, American Mathematical Society, 1998. の 9.4.2 節