現代解析学I 講義ノート –ベクトル解析–

1. 3次元ベクトルの演算

以下, $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0, 0, 1)$ とする.

注意 1.1.
ベクトルの記号として矢印を使うが, この記法は一般的ではない. ベクトルとスカラーを区別するために使っているが, 普通は文脈からわかるため, 区別しないで書くことの方が多い.

1.1. ベクトルの内積.

定義 1.1 (ベクトルの内積)**.**
$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の内積 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ を

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$

により定める. また, $\boldsymbol{x}$ のノルム $|\boldsymbol{x}|$ を

$$|\boldsymbol{x}| := \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}}$$

により定める.

注意 1.2.
$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角を $0 \leq \theta \leq \pi$ で表すと

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}| \cos\theta$$

が成り立つ. 特に,

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}$$

が成り立つ. この関係を用いて, 二つのベクトルのなす角を定めることができる. さらに, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ から作られる平行四辺形の面積を S とおくと

$$S^2 = |\boldsymbol{x}|^2 |\boldsymbol{y}|^2 - (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})^2$$

となることがわかる.

命題 1.1 (内積の性質)**.**
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, 次が成り立つ:

(1) $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}$;

(2) $\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z}$;
(3) $(\lambda \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot (\lambda \boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})$.

証明は, ベクトルを成分で表示して, それぞれ計算すればよい.

1.2. ベクトルの外積.

定義 1.2 (ベクトルの外積).
$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の外積 $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ を

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} := (x_2y_3 - x_3y_2)\boldsymbol{e}_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)\boldsymbol{e}_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)\boldsymbol{e}_3$$

により定める. 形式的に

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

とかける.

命題 1.2.
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ に対して, 次が成り立つ:
(1) $\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) = 0$
(2) $\boldsymbol{y} \cdot (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) = 0$
(3) $|\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}|^2 = |\boldsymbol{x}|^2|\boldsymbol{y}|^2 - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$

証明.
$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ と書く. (1) は

$$\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) = x_1(x_2y_3 - x_3y_2) + x_2(x_3y_1 - x_1y_3) + x_3(x_1y_2 - x_2y_1) = 0$$

よりわかる. (2) も同様である. (3) は

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}|^2 &= (x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_3y_1 - x_1y_3)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \\ &= x_2^2y_3^2 + x_3^2y_2^2 + x_3^2y_1^2 + x_1^2y_3^2 + x_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 \\ &\quad - 2x_2x_3y_2y_3 - 2x_3x_1y_3y_1 - 2x_1x_2x_2y_1y_2 \\ &\quad + x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + x_3^2y_3^2 - x_1^2y_1^2 - x_2^2y_2^2 - x_3^2y_3^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \\ &= |\boldsymbol{x}|^2|\boldsymbol{y}|^2 - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} \end{aligned}$$

からわかる. $\square$

注意 1.3.
命題 1.2 の (1) と (2) から, $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ に垂直であることがわかる. さらに, 命題 1.2 の (3) から, $|\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}|$ の大きさが, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ から作られる平行四辺形の面積と一致することがわかる.

命題 1.3 (外積の性質)**.**
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, 次が成り立つ:
(1) $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$;
(2) $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = -\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{x}$;
(3) $\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{z}$;
(4) $(\lambda \boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \times (\lambda \boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y})$.

注意 1.4.
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$ に対して, 外積に関して結合法則は成立しない. すなわち

$$(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z})$$

となる. 従って, 外積について, 括弧を省略することはできない.

1.3. **ベクトル値関数.** 開区間 $I \subset \mathbb{R}$ に対し, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) : I \to \mathbb{R}^3$ をベクトル値関数ということがある. $\boldsymbol{x}$ の微分可能性は微積分の講義でやったとおりである. すなわち

$$\lim_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{x}(t+h) - \boldsymbol{x}(t)}{h}$$

が存在するとき, $\boldsymbol{x}$ は点 t で微分可能であるといい, $\dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t)$ や $\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{x}'$ と書く.

例 1.1.
ベクトル値関数 $\boldsymbol{x} : (-1, 1) \to \mathbb{R}^3$ を

$$\boldsymbol{x}(t) := (t, t^2, t^3) \quad (t \in (-1, 1))$$

により定める. このとき,

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}(t) = (1, 2t, 3t^2)$$

となる.

命題 1.4 (ベクトル値関数の微分)**.**
開区間 $I \subset \mathbb{R}$ に対し, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t) : I \to \mathbb{R}^3$ は C^1 級とする (このとき, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in C^1(I\,; \mathbb{R}^3)$ と書く). このとき, 次が成り立つ:
(1) $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} \cdot \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \cdot \dfrac{d\boldsymbol{y}}{dt}$.
(2) $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) = \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt} \times \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} \times \dfrac{d\boldsymbol{y}}{dt}$.

証明はそれぞれ成分で表示して微分を計算すればよい.

例 1.2.
開区間 $I \subset \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) \in C^1(I\,;\mathbb{R}^3)$ に対して, 次が成り立つ.

$$\frac{d}{dt}|\boldsymbol{x}(t)|^2 = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{x}(t)\cdot\boldsymbol{x}(t)) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)\cdot\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{x}(t)\cdot\boldsymbol{x}'(t) = 2\boldsymbol{x}(t)\cdot\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}(t)$$

2. 曲線と曲面の表示

2.1. 平面曲線.

定義 2.1 (平面曲線)**.**
$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t) = (x(t), y(t)) : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ が平面曲線であるとは, $\boldsymbol{p}$ は C^∞ 級であり, $a < \forall t < b$ に対して

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}(t) \neq \boldsymbol{0}$$

が成り立つときをいう.

例 2.1.
$r > 0$, $0 < t < 2\pi$ に対して, $\boldsymbol{p}(t) := (r\cos t, r\sin t)$ とおくと, $\boldsymbol{p}$ は半径 r で原点中心の円 (の一部) を定める.

例 2.2 (グラフ)**.**
$f \in C^1(a,b)$ に対し, $\boldsymbol{p} : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ を

$$\boldsymbol{p}(t) := (t, f(t)) \quad (t \in (a,b))$$

により表すと, $\boldsymbol{p}$ は平面曲線になる. 実際に $\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt}(t) = \left(1, \dfrac{df}{dt}(t)\right) \neq \boldsymbol{0}$ である. この平面曲線 $\boldsymbol{p}$ は f のグラフである.

命題 2.1.
$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(t) : (0,a) \to \mathbb{R}^2$ を平面曲線とすると, ある変数変換 $t = t(s)$ が存在して

$$\boldsymbol{e_1}(s) := \frac{d}{ds}\boldsymbol{p}(t(s))$$

と書いたときに $|\boldsymbol{e_1}(s)| \equiv 1$ となる.

命題 2.1 の証明の概略.
パラメータ s を $0 < t < a$ に対して

$$s = \int_0^t \left|\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}(\tau)\right| d\tau$$

とおく. この逆関数 $t = t(s)$ が求める変数変換となる. □

命題 2.1 で主張していることは, 平面曲線に対して, 適当な変数変換のもとに, 速度ベクトルが常に 1 とできることを意味している. すると, $\boldsymbol{p(s) = p(t(s))}$ の s の定義域を $(0, L)$ で表すと

$$\int_0^L \left| \frac{d\boldsymbol{p}}{ds}(s) \right| ds = \int_0^L ds = L$$

となる. つまり, s が曲線の長さに関係したパラメータになることがわかる.

定義 2.2.
命題 2.1 でとれるパラメータ s を 平面曲線 $\boldsymbol{p}$ の**弧長パラメータ**という.

具体的な問題に対する弧長パラメータを求めることは (積分が求積できるかという意味で) 難しいが, 理論的な話では, 弧長パラメータを用いた方が見通しがよい.

定義 2.3.
s を弧長パラメータとする平面曲線 $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(s) = (x(s), y(s))$ に対し

$$\boldsymbol{e_2}(s) = \left(-\frac{dy}{ds}(s),\ \frac{dx}{ds}(s) \right)$$

とおくと, $\boldsymbol{e_1}(s) \cdot \boldsymbol{e_2}(s) \equiv 0$, $|\boldsymbol{e_1}(s)| \equiv |\boldsymbol{e_2}(s)| \equiv 1$ となる. $\{\boldsymbol{e_1}(s), \boldsymbol{e_2}(s)\}$ を**正規直交標構**という.

注意 2.1.
定義 2.3 において, $\boldsymbol{e_1}(s)$ は点 $\boldsymbol{p}(s)$ における単位接ベクトル, $\boldsymbol{e_2}(s)$ は点 $\boldsymbol{p}(s)$ における単位法ベクトルになる.

2.2. **曲面.**

定義 2.4 (曲面)**.**
$D \subset \mathbb{R}^2$ を領域とするとき, $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) : D \to \mathbb{R}^3$ が曲面であるとは, $\boldsymbol{p} \in C^\infty(D; \mathbb{R}^3)$ であって, $\forall (u, v) \in D$ に対して

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v}(u, v) \neq \boldsymbol{0}$$

が成り立つことをいう.

例 2.3.
$D = \left\{ (u, v) : -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2},\ -\pi < v < \pi \right\} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \times (-\pi, \pi)$ に対して, $\boldsymbol{p}(u, v) = (r \sin u \cos v, r \sin u \sin v, r \cos u)$ と定めると半径 r, 原点中心の球面 (の一部) になる.

例 2.4.

領域 $D \subset \mathbb{R}^2$, $f \in C^1(D)$ に対し, $\boldsymbol{p} : D \to \mathbb{R}^3$ を

$$\boldsymbol{p}(u,v) := (u, v, f(u,v)) \quad ((u,v) \in D)$$

で定めると, $\boldsymbol{p}$ は曲面になる. $\boldsymbol{p}$ は f のグラフである.

命題 2.2.

$\boldsymbol{p}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ を領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された曲面とする. このとき, 次が成り立つ:

(1) $\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v}(u,v)$ は点 $\boldsymbol{p}(u,v)$ における曲面の法線ベクトルになる.

(2) 曲面 $\boldsymbol{p}(u,v)$ の面積を S とおき, $\boldsymbol{p}$ は単射であるとする. このとき,

$$S = \iint_D \left| \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v} \right| dudv$$

となる.

命題 2.2 の証明の概略.

(1) を示す. 任意の $(u_0, v_0) \in D$ に対して, $\boldsymbol{c}(t) = \boldsymbol{p}(u(t), v(t))$ を $\boldsymbol{c}(0) = \boldsymbol{p}(u_0, v_0)$ となる曲面 S 上の曲線とするとき, 命題 1.2 より,

$$\frac{d\boldsymbol{c}}{dt}(0) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v}(u_0, v_0) \right) = 0$$

がわかる. $\dfrac{d\boldsymbol{c}}{dt}(0)$ が $\boldsymbol{p}(u_0, v_0)$ における接平面上のベクトルになることから, $\dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v}(u_0, v_0)$ が曲面 S の $\boldsymbol{p}(u_0, v_0)$ における法線ベクトルになることがわかる.

(2) を示すために, $\Delta u = u_1 - u_0$, $\Delta v = v_1 - v_0$ をそれぞれ u, v の微小区間, その区間における曲面の面積を ΔS とおくと

$$\begin{aligned}
\Delta S &\cong |(\boldsymbol{p}(u_1, v_0) - \boldsymbol{p}(u_0, v_0)) \times (\boldsymbol{p}(u_0, v_1) - \boldsymbol{p}(u_0, v_0))| \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\Delta S \text{ はだいたい平行四辺形}) \\
&\cong \left| \left(\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u}(u_0, v_0) \Delta u \right) \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v}(u_0, v_0) \Delta v \right) \right| \qquad (\text{平均値定理}) \\
&= \left| \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u}(u_0, v_0)) \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v}(u_0, v_0) \right| \Delta u \Delta v
\end{aligned}$$

が得られる. 分割の極限をとると $dS = \left| \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v} \right| dudv$ となるから, 曲面 S の面積は $\displaystyle\int_D \left| \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v} \right| dudv$ で与えられる. □

3. スカラー場とベクトル場

この節では, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を領域とする. 領域とは, 開集合かつ連結な集合のことであった. 連結を大雑把にいえば, 「つながっている集合」である.

3.1. スカラー場とベクトル場.

定義 3.1 (スカラー場とベクトル場)**.**
関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$ を Ω 上のスカラー場という. また, ベクトル値関数 $\boldsymbol{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ を Ω 上のベクトル場という.

以下, $\mathscr{X}(\Omega)$ で Ω 上の滑らかなベクトル場全体を表す. つまり,

$$\mathscr{X}(\Omega) := \{\boldsymbol{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3,\ \text{滑らか}\}$$

である.

注意 3.1.
この講義では, 話を簡単にするために, ベクトル場やスカラー場はすべて滑らかなもののみを考える.

定義 3.2 (等高面)**.**
Ω のスカラー場 f と, $c \in \mathbb{R}$ に対して, 集合 $\{x \in \Omega : f(x) = c\}$ を f の高さ c に対する等高面という.

例えば, Ω が地図で, $x \in \Omega$ に対して $f(x)$ が標高を対応させると考えてみて欲しい. このときに, $c \in \mathbb{R}$ を与えたときに, $f(x) = c$ をみたす線を等高線というが, これを数学用語として使っていると思っていればよい.

命題 3.1.
f を Ω 上のスカラー場, $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, $f(x_0, y_0, z_0) = c$ とし,

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\right) \neq \mathbf{0}$$

とする. このとき, $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ は高さ c の等高面 $\{x \in \Omega : f(x) = c\}$ の (x_0, y_0, z_0) における法線ベクトルになる. とくに, $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ はスカラー場 f が (x_0, y_0, z_0) において増加が最大となる方向に一致する.

命題 3.1 の証明の方針.

$(x,y,z)=(x(s),y(s),z(s))$ を $(x(0),y(0),z(0))=(x_0,y_0,z_0)$ をみたす曲線で, s は弧長パラメータであるとする. 合成関数の微分を計算することで

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}f(x(s),y(s),z(s)) &= \frac{\partial f}{\partial x}((x(s),y(s),z(s))\frac{dx}{ds}(s)\\ &\quad+\frac{\partial f}{\partial y}((x(s),y(s),z(s))\frac{dy}{ds}(s)\\ &\quad+\frac{\partial f}{\partial z}((x(s),y(s),z(s))\frac{dz}{ds}(s)\\ &=\nabla f(x(s),y(s),z(s))\cdot\frac{d((x(s),y(s),z(s))}{ds}\end{aligned}$$

となる.

$f(x(s),y(s),z(s))=c$ をみたす曲線を考えて, $s=0$ とすれば $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ が等高面の (x_0,y_0,z_0) における法線ベクトルになることがわかる. また,

$$\frac{d((x(s),y(s),z(s))}{ds}\Big|_{s=0}=\frac{\nabla f(x_0,y_0,z_0)}{|\nabla f(x_0,y_0,z_0)|}$$

となるときに, $\dfrac{d}{ds}f(x(s),y(s),z(s))$ が最も大きくなるから, $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ はスカラー場 f が (x_0,y_0,z_0) において増加が最大となる方向となる. □

定義 3.3 (流線, 積分曲線)**.**

A を Ω 内のベクトル場とする. このとき,

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}(t)=A(\boldsymbol{r}(t))$$

をみたす Ω 内の曲線 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ をベクトル場 A の流線 (または積分曲線) という.

気分だけ説明すると, Ω を川として, ベクトル場 A がその川の流れの強さ (流速) を表すと思ってみて欲しい. このときに, 水にうくもの, 例えばゴム製のあひる人形みたいなものをその川に流したときに, あひる人形が動く軌跡が流線, ないしは積分曲線である.

命題 3.2.

A を Ω 内のベクトル場, $x_0\in\Omega$ に対し, x_0 を通る, ベクトル場 A の流線がただ一つ存在する. すなわち, 微分方程式

$$\begin{cases}\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}(t)=A(\boldsymbol{r}(t))\\ \boldsymbol{r}(0)=x_0\end{cases}$$

をみたす解 $\boldsymbol{r}$ がただ一つ存在する.

証明は常微分方程式の解の存在定理による.

3.2. **微分演算子.**

定義 3.4 (勾配, gradient, nabla)**.**
形式的な微分記号のベクトル

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

をナブラ (nabla) という. Ω 上のスカラー場 f に対して

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\right)$$

と書く. ∇f を f の勾配またはグラディエント (gradient) という.

命題 3.3.
f, g を Ω 上のスカラー場, $c \in \mathbb{R}$, $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ とするとき, 次が成り立つ:
(1) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$;
(2) $\nabla(cf) = c\nabla f$;
(3) $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g)$;
(4) $\nabla(\phi(f)) = \phi'(f)\nabla f$.

定義 3.5 (発散, divergence)**.**
Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ に対し, $\boldsymbol{F}$ の発散, またはダイバージェンス (divergence) $\operatorname{div} \boldsymbol{F}$ を次で定める:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} := \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

$\operatorname{div} \boldsymbol{F}$ は形式的に, ∇ と $\boldsymbol{F}$ の内積を用いて $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F}$ と書くことがある.

命題 3.4.
$\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}$ を Ω 上のベクトル場, f を Ω 上のスカラー場, $c \in \mathbb{R}$ とするとき, 次が成り立つ:
(1) $\operatorname{div}(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}) = \operatorname{div} \boldsymbol{F} + \operatorname{div} \boldsymbol{G}$;
(2) $\operatorname{div}(c\boldsymbol{F}) = c \operatorname{div} \boldsymbol{F}$;
(3) $\operatorname{div}(f\boldsymbol{F}) = f \operatorname{div} \boldsymbol{F} + \nabla f \cdot \boldsymbol{F}$.

定義 3.6 (ラプラシアン)**.**
Ω 上のスカラー場 f に対し, f のラプラシアン Δf を次で定める:

$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Δf は形式的に, $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f$ と書くことがある.

定義 3.7 (回転, rotation, curl).
Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ に対し, $\boldsymbol{F}$ の回転 $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$ を次で定める:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} := \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

$\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$ は形式的に, ∇ と $\boldsymbol{F}$ の外積を用いて $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F}$ と書くことがある.

命題 3.5.
$\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}$ を Ω 上のベクトル場, f を Ω 上のスカラー場, $c \in \mathbb{R}$ とするとき, 次が成り立つ:

(1) $\operatorname{rot}(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}) = \operatorname{rot} \boldsymbol{F} + \operatorname{rot} \boldsymbol{G}$;
(2) $\operatorname{rot}(c\boldsymbol{F}) = c \operatorname{rot} \boldsymbol{F}$;
(3) $\operatorname{rot}(f\boldsymbol{F}) = f \operatorname{rot} \boldsymbol{F} + (\nabla f) \times \boldsymbol{F}$.

定義 3.8 (スカラーポテンシャル).
Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ に対し

$$F = -\nabla f$$

なるスカラー場 f が存在するとき, ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ はポテンシャルを持つといい, f を $\boldsymbol{F}$ のスカラーポテンシャルという.

定義 3.9 (ベクトルポテンシャル).
Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ に対し

$$\boldsymbol{F} = \operatorname{rot} \boldsymbol{f}$$

なるベクトル場 $\boldsymbol{f}$ が存在するとき, ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ はベクトルポテンシャルを持つといい, $\boldsymbol{f}$ を $\boldsymbol{F}$ のベクトルポテンシャルという.

命題 3.6.
$\boldsymbol{F}$ を Ω 上のベクトル場とするとき, 次が成り立つ.

(1) $\boldsymbol{F}$ がスカラーポテンシャル f をもてば, $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$.
(2) $\boldsymbol{F}$ がベクトルポテンシャル $\boldsymbol{f}$ をもてば, $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$.

証明.
$\boldsymbol{F}$ がスカラーポテンシャル f を持てば

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = -\operatorname{rot} \nabla f = \boldsymbol{0}$$

がわかる (最後の等式は演習). また, $\boldsymbol{F}$ がベクトルポテンシャル $\boldsymbol{f}$ をもてば,

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{f}) = 0$$

がわかる (最後の等式は演習). □

注意 3.2.
実は, 命題 3.6 は「Ω が単連結[1]」の仮定を加えることにより, 逆も成立する. すなわち, $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}=0$ が成り立てば, $\boldsymbol{F}$ はスカラーポテンシャルを持つ. また, $\operatorname{div}\boldsymbol{F}=0$ なら, $\boldsymbol{F}$ はベクトルポテンシャルを持つことが知られている.

任意のベクトル場をベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルに分解できることを紹介する. これは Helmholtz 分解と呼ばれている.

定理 3.1 (Helmholtz 分解)**.**
$\Omega\subset\mathbb{R}^3$ は単連結領域とし, (簡単のため) $\partial\Omega$ は十分に滑らかとする. $\boldsymbol{F}$ を Ω 上のベクトル場とすると, Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ が存在して, 次が成り立つ:

(1) $\boldsymbol{F}_1$ はスカラーポテンシャルをもつ. とくに $\operatorname{rot}\boldsymbol{F_1}=\boldsymbol{0}$.
(2) $\boldsymbol{F}_2$ はベクトルポテンシャルをもつ. とくに $\operatorname{div}\boldsymbol{F_2}=0$.
(3) $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$ が成り立つ.

3.3. **流体の基礎方程式.** 命題 3.6 や Helmholz 分解がどのような経緯で考察されたかをみるために, 非圧縮性粘性流体の基礎方程式である, Navier-Stokes 方程式を考える:

$$\text{(NS)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v_i}{\partial t}+\displaystyle\sum_{k=1}^{3}v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\nu\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2},\\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}+\dfrac{\partial v_3}{\partial x_3}=0.\end{cases}$$

ここで, $\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{x})=(v_1(t,\boldsymbol{x}),v_2(t,\boldsymbol{x}),v_3(t,\boldsymbol{x}))$ は $\boldsymbol{x}$ における流速ベクトル, $p(t,\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ における流体の圧力, $\nu>0$ は粘性を表している. 今までに説明した微分演算子を用いると (NS) は

$$\text{(NS)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=-\nabla p+\nu\Delta\boldsymbol{v},\\ \operatorname{div}\boldsymbol{v}=0.\end{cases}$$

問題となるのは, 流体を考える領域 $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ と $t=0$ での流速 $\boldsymbol{v}(0,\boldsymbol{x})$, さらに領域の境界における条件を与えたときに, 解がただ一つ存在するか?である. さらに, 解がどのような性質をもっているか?がさらなる問題になる. この問題を考察するうえで, $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$ から, Ω が単連結であれば $\boldsymbol{v}$ がベクトルポテ

---
[1] Ω が単連結であるとは, 任意の Ω 内の閉曲面 S に対して, S が囲う領域を D としたときに $D\subset\Omega$ が成り立つことをいう.

ンシャルを持つことから, $\boldsymbol{v} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{\omega}$ となる $\boldsymbol{\omega}$ を求めればよいことがわかる. さらに (NS) の第 1 式の両辺に rot をとると $\mathrm{rot}(\nabla p) = \mathbf{0}$ となることから

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathrm{rot}((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}) = \nu\Delta\boldsymbol{\omega}$$

と圧力のない方程式に書き換えることができる. しかし, 非線形項 $\mathrm{rot}((\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v})$ が問題を困難にしている. これらを解析するために, 命題 3.6 や Helmholtz 分解は利用されているが[2], 適切性と呼ばれる下記の問題[3]がまだ解決していない.

Navier–Stokes 方程式の解の存在と滑らかさ

$\Omega = \mathbb{R}^3$ とし, $t = 0$ での流速 $\boldsymbol{v}(0, \boldsymbol{x})$ は運動エネルギー有限条件 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} |\boldsymbol{v}(0,\boldsymbol{x})|^2\,dx < \infty$ をみたすとする. このとき, (NS) には滑らかな解 $\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x})$ が $0 < t < \infty$ でただ一つ存在する.

3.4. **勾配の導出.** Ω 上のスカラー場 f と $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$\boldsymbol{v}(f) := \frac{d}{dt} f((x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3))\Big|_{t=0}$$

は f の (x_0, y_0, z_0) における $\boldsymbol{v}$ 方向への方向微分というのであった. 合成関数の微分により,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} f((x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3))\Big|_{t=0}\\
&= \frac{\partial f}{\partial x}((x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3))v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}((x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3))v_2\\
&\quad + \frac{\partial f}{\partial z}((x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3))v_3\Big|_{t=0}\\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)v_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)v_3\\
&= \nabla f(x_0, y_0, z_0)\cdot\boldsymbol{v}
\end{aligned}$$

となることから, ∇f は方向微分の計算に現れることがわかる.

定理 3.2.

Ω 上のスカラー場 f の $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ における $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ 方向への方向微分

$$\boldsymbol{v}(f) := \frac{d}{dt} f((x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3))\Big|_{t=0}$$

[2] Helmholtz 分解は電磁気学でも用いられる.

[3] Clay 数学研究所による, ミレニアム懸賞問題の 1 つ

は $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ を用いて

$$\boldsymbol{v}(f) = \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \boldsymbol{v}$$

と表わせる.

3.5. **Jacobi 行列と発散の導出.** Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ と Ω 上の点 $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{F}((x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3))\Big|_{t=0}$$

を考える. $(x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3) = \phi(t)$ とおくと, 合成関数の微分により,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\boldsymbol{F}((x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3))\Big|_{t=0} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(\phi(t))v_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y}(\phi(t))v_2 + \frac{\partial F_1}{\partial z}(\phi(t))v_3 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(\phi(t))v_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y}(\phi(t))v_2 + \frac{\partial F_2}{\partial z}(\phi(t))v_3 \\ \frac{\partial F_3}{\partial x}(\phi(t))v_1 + \frac{\partial F_3}{\partial y}(\phi(t))v_2 + \frac{\partial F_3}{\partial z}(\phi(t))v_3 \end{pmatrix}\Bigg|_{t=0} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)v_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)v_2 + \frac{\partial F_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)v_3 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)v_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)v_2 + \frac{\partial F_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)v_3 \\ \frac{\partial F_3}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)v_1 + \frac{\partial F_3}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)v_2 + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)v_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial F_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial F_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial F_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial F_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial F_3}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial F_3}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial F_3}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \\
&= JF(x_0, y_0, z_0)\boldsymbol{v}
\end{aligned}$$

となる. ここで, $J\boldsymbol{F}(x_0, y_0, z_0)$ は $\boldsymbol{F}$ の Jacobi 行列である. 従って, Jacobi 行列はベクトル場の方向微分から自然に得られるものであり, Jacobi 行列のトレースが発散になる.

定理 3.3.
Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ の $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ における $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ 方向への方向微分

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{F}((x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3))\Big|_{t=0}$$

は, Jacobi 行列 $J\boldsymbol{F}(x_0, y_0, z_0)$ を用いて

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{F}((x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3))\Big|_{t=0} = J\boldsymbol{F}(x_0, y_0, z_0)\boldsymbol{v}$$

と表せる.

3.6. **多次元への一般化.** $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域とする. Ω 上のスカラー場 $f = f(x_1, \ldots, x_n) : \Omega \to \mathbb{R}$ に対して, 勾配 ∇f と Laplacian Δf をそれぞれ

$$\nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$
$$\Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$$

で定める. Ω 上のスカラー場 $\boldsymbol{F} = (F_1, \ldots, F_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ に対して, 発散 $\operatorname{div} \boldsymbol{F}$ を

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} := \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_k}$$

で定める.

命題 3.7.
Ω 上のスカラー場 f に対して

$$\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$$

が成り立つ.

証明.
$\operatorname{div}(\nabla f)$ を計算すると

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\nabla f) &= \operatorname{div}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial x_n} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = \Delta f\end{aligned}$$

となる. □

例 3.1.
$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_k}|\boldsymbol{x}| &= \frac{\partial}{\partial x_k}\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \\ &= \frac{2x_k}{2\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}} = \frac{x_k}{|\boldsymbol{x}|}\end{aligned}$$

より, $\nabla|\boldsymbol{x}| = \dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}$ となる. また, $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して, 命題 3.3 より

$$\nabla(|\boldsymbol{x}|^{\alpha}) = \alpha|\boldsymbol{x}|^{\alpha-1}\nabla|\boldsymbol{x}| = \alpha|\boldsymbol{x}|^{\alpha-2}\boldsymbol{x}$$

が得られる.

例 3.2.
$n \geq 3$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対して

$$\Delta(|\boldsymbol{x}|^{2-n}) = \mathrm{div}(\nabla(|\boldsymbol{x}|^{2-n})) = \mathrm{div}((2-n)|\boldsymbol{x}|^{-n}\boldsymbol{x})$$

となる. 命題 3.4 より

$$\begin{aligned}\mathrm{div}((2-n)|\boldsymbol{x}|^{-n}\boldsymbol{x}) &= (2-n)|\boldsymbol{x}|^{-n}\Delta(\boldsymbol{x}) + (2-n)\nabla(|\boldsymbol{x}|^{-n})\cdot\boldsymbol{x} \\ &= n(2-n)|\boldsymbol{x}|^{-n} - n(2-n)|\boldsymbol{x}|^{-n-2}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x} \\ &= n(2-n)|\boldsymbol{x}|^{-n} - n(2-n)|\boldsymbol{x}|^{-n} = 0\end{aligned}$$

となる. つまり, $\Delta(|\boldsymbol{x}|^{2-n}) = 0$ となる.

定義 3.10.
$\Delta f = 0$ をみたす Ω 上のスカラー場 f を Ω 上の**調和関数**という.

例 3.3.
$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対して $\Delta(\log|\boldsymbol{x}|)$ を求める. $\log|\boldsymbol{x}| = \log(\sqrt{x_1^2+x_2^2}) = \dfrac{1}{2}\log(x_1^2+x_2^2)$ に注意すれば,

$$\begin{aligned}\Delta(\log|\boldsymbol{x}|) &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\log(x_1^2+x_2^2)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\log(x_1^2+x_2^2)\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}\right) \\ &= \frac{1}{x_1^2+x_2^2} - \frac{2x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} + \frac{1}{x_1^2+x_2^2} - \frac{2x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} = 0\end{aligned}$$

となる. つまり, $\log|\boldsymbol{x}|$ は $\mathbb{R}^2 \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ 上の調和関数となる.

3.7. **偏微分方程式.** $n \in \mathbb{N}$ に対して, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域とする.

3.7.1. *Laplace* 方程式. $u : \Omega \to \mathbb{R}$ を未知関数とする偏微分方程式

$$-\Delta u(x) = 0 \qquad x \in \Omega$$

を Laplace 方程式という.

3.7.2. *Poisson* 方程式. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ を与えられた関数とする. $u : \Omega \to \mathbb{R}$ を未知関数とする偏微分方程式

$$-\Delta u(x) = f(x) \qquad x \in \Omega$$

を Poisson 方程式という.

3.7.3. 熱方程式. $u : \Omega \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を未知関数とする偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 \qquad x \in \Omega,\ t > 0$$

を熱方程式や拡散方程式という. 温度分布や拡散現象を表す基本的な偏微分方程式であり, 変数 t は時間変数, 変数 x は位置, $u(t,x)$ は時刻 t における位置 x での温度や濃度を表す.

Poisson 方程式と同じように $f : \Omega \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を与えられた関数として

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t) \qquad x \in \Omega,\ t > 0$$

も考えることもある.

3.7.4. 波動方程式. $u : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を未知関数とする偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 \qquad x \in \Omega,\ t \in \mathbb{R}$$

を波動方程式という. 波や太鼓の膜などの様子を表す基本的な偏微分方程式である. 変数 t は時間変数, 変数 x は位置, $u(t,x)$ は時刻 t における位置 x での波の高さを表す.

3.7.5. *Schrödinger* 方程式. $u : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を未知関数とする偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - i\Delta u(x,t) = 0 \qquad x \in \Omega,\ t \in \mathbb{R}$$

は Schrödinger 方程式といい, 量子力学における基礎方程式として知られている. ここで, $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位である.

Laplace 方程式, 熱方程式, 波動方程式, Schrödinger 方程式は 2 階微分を含む偏微分方程式を分類するうえで, 基礎となる方程式とみなされることが多い.

注意 3.3.

熱方程式は時刻変数が $t > 0$ となっているのに対して, 波動, Schrödinger 方程式が $t \in \mathbb{R}$ となっていることは数学的な理由がある. 現象から考えてみても, この変数のおきかたは妥当であることが想像できる. 実際に, 現在の温度や濃度の状況がわかったとしても, 過去の温度や濃度がわかるかどうかは簡単にはわからない (つまり $t < 0$ を考えることが難しい) が, 波の様子から, 過去の波の様子を推測することは, (熱や濃度に比べれば) 難しくないことがわかる.

4. 線積分と面積分

Riemann 積分の拡張として, 曲線や曲面上に定義された連続関数の積分を定義する. 分割の極限をはっきりさせるためには上積分, 下積分を用いるべきであるが, 話を簡単にするために Riemann 和の分割の極限として, 線積分や面積分を定義する.

4.1. 線積分. $C : \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ $(0 \leq s \leq L)$ を $\mathbb{R}^3$ 内の曲線とする. ここで, s は弧長パラメータ, すなわち, $\left|\dfrac{\boldsymbol{r}(s)}{ds}\right| \equiv 1$ であり, $\boldsymbol{r}(s) = (x(s), y(s), z(s))$ と成分表示する. C 上の連続関数 $f : C \to \mathbb{R}$ に対して, 線積分を定義する.

定義 4.1 (線積分)**.**
$\Delta : 0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = L$ を $[0, L]$ 区間の分割とする. このとき f の C 上の線積分を

$$\int_C f\,ds := \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{r}(s_i))(s_i - s_{i-1})$$

で定義する. ここで, $\displaystyle\lim_{|\Delta|\to 0}$ は分割 $|\Delta|$ の極限である. 同様にして,

$$\int_C f\,dx := \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{r}(s_i))(x(s_i) - x(s_{i-1}))$$
$$\int_C f\,dy := \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{r}(s_i))(y(s_i) - y(s_{i-1}))$$
$$\int_C f\,dz := \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{r}(s_i))(z(s_i) - z(s_{i-1}))$$

と定義する.

この定義は, 1 変数関数における積分の拡張になっており, 1 変数関数における積分特有の性質をもっている. 例えば

- $-C$ を C の向きを逆にした曲線としたときに
$$\int_{-C} f\,ds = -\int_C f\,ds$$
- $C = C_1 + C_2$ と分割すると
$$\int_{C_1+C_2} f\,ds = \int_{C_1} f\,ds + \int_{C_2} f\,ds$$

が成り立つ．これらは f を 1 変数関数としたときに

$$\int_b^a f\,dx = -\int_a^b f\,dx, \quad \int_b^a f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx$$

が成り立つことを思い出せば, なんとなく想像がつくだろう.

定義 4.2 (ベクトル場の線積分)**.**
$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ は領域で $C \subset \Omega$, $\boldsymbol{A} \in \mathscr{X}(\Omega)$, すなわち $\boldsymbol{A} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ は滑らかとする．また, Δ は定義 4.1 と同じとする．このとき, ベクトル場の線積分を

$$\int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} := \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(s)) \cdot (\boldsymbol{r}(s_i) - \boldsymbol{r}(s_{i-1}))$$

で定義する.

具体的な計算手法を説明する．$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ $(a \leq t \leq b)$ は弧長パラメータではないとする．$t = t(s)$ $(0 \leq s \leq L)$ と弧長パラメータ表示したときに

$$\int_C f\,ds = \int_0^L f(\boldsymbol{r}(t(s)))\,ds = \int_a^b f(\boldsymbol{r}(t)) \left| \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}(t) \right| dt \tag{4.1}$$

となり,

$$\int_C \boldsymbol{A} \cdot\, d\boldsymbol{r} = \int_a^b \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(t)) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}(t)\,dt \tag{4.2}$$

が成り立つ．なぜなら, s は弧長パラメータだったから, $t(s)$ は s について単調増加とすることができ,

$$\frac{d\boldsymbol{r}(t(s))}{ds} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}(t(s))\frac{dt}{ds}(s), \quad 1 = \left|\frac{d\boldsymbol{r}(t(s))}{ds}\right| = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}(t(s))\right| \frac{dt}{ds}(s)$$

から, (形式的に) 両辺 ds をかけると

$$d\boldsymbol{r} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt, \quad ds = \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| dt$$

となるからである.

例 4.1.
$C : \boldsymbol{r}(t) = (3t^2, 4t^2, 5t^2)$ $(0 \leq t \leq 1)$ として,

$$\int_C (x + y + z)\,ds$$

を求めてみよう.

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = |(6t, 8t, 10t)| = 2t|(3,4,5)| = 10\sqrt{2}t$$

となるから

$$\int_C (x+y+z)\,ds = \int_0^1 (3t^2+4t^2+5t^2)(10\sqrt{2}t)\,dt = 30\sqrt{2}$$

が得られる.

例 4.1 において, $C : \boldsymbol{r}(t) := (3t, 4t, 5t)$ としても, 同じ曲線を表している. このときに線積分の値が異なるようでは困るが, 実際には次が成り立つ.

命題 4.1.
線積分は曲線のパラメータ表示に依らない.

証明の概略.
(4.1) において, 単調増加な変数変換 $t = t(\zeta)$ $(\alpha \leq \zeta \leq \beta)$ を考えると,

$$\frac{d\boldsymbol{r}(t(\zeta))}{d\zeta} = \frac{d\boldsymbol{r}(t(\zeta))}{dt}\frac{dt(\zeta)}{d\zeta}, \quad dt = \frac{dt(\zeta)}{d\zeta}d\zeta$$

だから

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\boldsymbol{r}(t))\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}(t)\right|dt &= \int_\alpha^\beta f(\boldsymbol{r}(t(\zeta)))\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}(t(\zeta))\right|\frac{dt(\zeta)}{d\zeta}\,d\zeta \\ &= \int_\alpha^\beta f(\boldsymbol{r}(t(\zeta)))\left|\frac{d\boldsymbol{r}(t(\zeta))}{d\zeta}\right|d\zeta\end{aligned}$$

となる. (4.2) も同様である. □

例 4.2.
$C : \boldsymbol{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, t) \quad (0 \leq t \leq \pi)$ は円柱ら線を表す. ここで,

$$\int_C (y, -z, x)\cdot d\boldsymbol{r}$$

を求めてみよう.

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = (-2\sin t, 2\cos t, 1)$$

だから,

$$\begin{aligned}\int_C (y,-z,x)\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_0^{\pi} (2\sin t, -t, 2\cos t)\cdot(-2\sin t, 2\cos t, 1)\,dt \\ &= \int_0^{\pi} (-4\sin^2 t - 2t\cos t + 2\cos t)\,dt \\ &= 4-2\pi\end{aligned}$$

となる.

4.2. **面積分.** 曲面 $S : \boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(u,v) \quad ((u,v)\in D)$ に対して $f : S \to \mathbb{R}$ を連続関数とする. $\Delta = \{D_1, \dots, D_N\}$ を D の分割とし, $|\boldsymbol{p}(D_i)|$ を $\boldsymbol{p}(D_i)$ の面積とする.

定義 4.3 (面積分)**.**
f の S 上の面積分を

$$\int_S f\,dS := \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{N} f(Q_i)|\boldsymbol{p}(D_i)|$$

で定義する. ただし, $Q_i \in \boldsymbol{p}(D_i)$ は任意とする

注意 4.1.
面積分の定義の右辺は Q_i の取り方によらない. これは, f の一様連続性を用いて示すことができる. さらに, 面積分の定義では, 曲面のパラメータ表示を用いて定義しているが, 実際には曲面のパラメータ表示 $\boldsymbol{p}$ に依らずに定まることが知られている.

特に $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を領域, $S \subset \Omega$, $\boldsymbol{A} \in \mathscr{X}(\Omega)$ に対して, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(P)$ を $P \in S$ に対する単位法線ベクトルとしたときに

$$\int_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

が重要である.

さて, 具体的な計算方法を説明する. $D_i \in \Delta$ とすると

$$|\boldsymbol{p}(D_i)| \approx \left|\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v}\right| \delta u \delta v$$

が成立する. ここで, δu と δv はそれぞれ D_i の u 方向, v 方向の長さである. ここで, 分割の極限をとると

$$dS = \left|\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v}\right| dudv$$

が成り立ち,

$$\int_S f\,dS = \iint_D f(\boldsymbol{p}(u,v)) \left| \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v} \right| dudv$$

となる. また,

$$\boldsymbol{n} := \frac{\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v}\right|}$$

とおくと, これはたしかに S の単位法線ベクトルになっており,

$$\begin{aligned} \int_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\,dS &= \iint_D \boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}(u,v)) \cdot \frac{\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v}\right|} \left| \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v} \right| dudv \\ &= \iint_D \boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v} \right) dudv \end{aligned}$$

が成り立つ.

例 4.3.

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4,\ z \geq 0\}$ とおき,

$$\int_S (2x^2+2y^2-z^2)\,dS$$

を求める. 曲面 S は

$$S : \boldsymbol{p}(u,v) = (2\sin u\cos v, 2\sin u \sin v, 2\cos u) \quad \left((u,v) \in (0,\frac{\pi}{2}) \times (-\pi,\pi)\right)$$

とかけるから

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v} \right| &= 4\,|(\cos u\cos v, \cos u \sin v, -\sin u) \times (-\sin u\sin v, \sin u\cos v, 0)| \\ &= 4\sin u \end{aligned}$$

となり, 求める積分は

$$\begin{aligned} &\int_S (2x^2+2y^2-z^2)\,dS \\ &= \iint_{(0,\frac{\pi}{2})\times(-\pi,\pi)} (2(2\sin u\cos v)^2 + 2(2\sin u\sin v)^2 - (2\cos u)^2)(4\sin u)\,dudv \\ &\qquad = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} du \int_{-\pi}^{\pi} (2\sin^2 u - \cos^2 u)(\sin u)\,dv = \cdots = 32\pi \end{aligned}$$

となる.

例 4.4.

$\mathbb{S}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$ とおき,

$$\int_{\mathbb{S}_2} (4x, 4y, -2z) \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

を求める. ただし, $\boldsymbol{n} = \dfrac{(x, y, z)}{2}$ とおく. 内積を計算すると

$$(4x, 4y, -2z) \cdot \boldsymbol{n} = 2x^2 + 2y^2 - z^2$$

となるから, 例 4.3 と同様に計算することで,

$$\int_{\mathbb{S}_2} (4x, 4y, -2z) \cdot \boldsymbol{n}\, dS = 64\pi$$

となることがわかる.

例 4.5.

$r > 0$ に対して, $\mathbb{S}_r := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}$ とおく. このとき, $\boldsymbol{n}$ を外向き単位法線ベクトル (囲まれている側を内向きとする) としたときに

$$\int_{\mathbb{S}_r} \frac{(x, y, z)}{|(x, y, z)|^3} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

を求める. 点 $(x, y, z) \in \mathbb{S}_r$ における外向き法線ベクトルは $\boldsymbol{n} = \dfrac{(x, y, z)}{r}$ となるから, $\mathbb{S}_r$ 上で

$$\frac{(x, y, z)}{|(x, y, z)|^3} \cdot \boldsymbol{n} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^4} = \frac{1}{r^2}$$

となる (つまり, 被積分関数は (x, y, z) に依らない). 従って,

$$\int_{\mathbb{S}_r} \frac{(x, y, z)}{|(x, y, z)|^3} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \int_{\mathbb{S}_r} \frac{1}{r^2}\, dS = \frac{1}{r^2} \times |\mathbb{S}_r| = 4\pi$$

となる.

例 4.6.

$B_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$ とおき,

$$\int_{B_2} \mathrm{div}(4x, 4y, -2z)\, dxdydz$$

を求める. $\mathrm{div}(4x, 4y, -2z) = 6$ だから

$$\int_{B_2} \mathrm{div}(4x, 4y, -2z)\, dxdydz = \int_{B_2} 6\, dxdydz = 6 \times \frac{4}{3}\pi \times 2^3 = 64\pi$$

となる. この値が例 4.4 と一致する理由を次の章で説明する.

5. 積分定理

1 変数関数における微積分の基本定理の多変数版を説明する．そのために, 1 変数関数における微積分の基本定理をもう一度考え直してみる．$f \in C^1(0,1) \cap C([0,1])$ に対して

$$\int_0^1 \frac{df}{dx}\,dx = f(1) - f(0) \tag{5.1}$$

であった．ここで, $(0,1)$ 区間における境界 $x = 0, 1$ の外向き単位法線ベクトル (といっても, この場合はスカラーであるが) を $\boldsymbol{n}(x)$ とおくと,

$$\boldsymbol{n}(x) = 1 \quad (x = 1), \qquad \boldsymbol{n}(x) = -1 \quad (x = 0)$$

となるから, (5.1) の右辺は

$$\sum_{x=0,1} f(x)\boldsymbol{n}(x)$$

とかける．このことは**左辺の 1 次元積分が右辺の 0 次元積分 (この場合は和) に等しい**ということを表している．すなわち, **導関数を積分すると, 一つ次元の低い積分に書きかえられる**ということを主張している．このことを多次元に一般化したものが, 次の Gauss の発散定理である．

5.1. Gauss の発散定理.

定理 5.1 (Gauss の発散定理)**.**
　$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を有界で境界が滑らかな領域とし, $F \in \mathscr{X}(\Omega)$ とする．このとき,

$$\iiint_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{F}\,dxdydz = \iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

が成り立つ．ただし, $\boldsymbol{n}$ は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルである．

系 5.1.
　Ω を有界で境界が滑らかな領域とし, f を Ω 上のスカラー場とすると,

$$\iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x}\,dxdydz = \iint_{\partial\Omega} f n_1\,dS,$$
$$\iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial y}\,dxdydz = \iint_{\partial\Omega} f n_2\,dS,$$
$$\iiint_\Omega \frac{\partial f}{\partial z}\,dxdydz = \iint_{\partial\Omega} f n_3\,dS$$

が成り立つ．ただし, $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$ は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルである．

系 5.1 の証明.
　$\boldsymbol{F} = (f, 0, 0)$ などに Gauss の発散定理を用いる．　□

定理 5.1 が成り立つ理由.

$\Omega = (0,a) \times (0,b) \times (0,c)$, $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$, $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$ として

$$\iiint_\Omega \frac{\partial F_1}{\partial x}\,dxdydz = \iint_{\partial\Omega} F_1 n_1\,dS (= \iint_{\partial\Omega} (F_1, 0, 0) \cdot \boldsymbol{n}\,dS)$$

が成り立つことを確かめてみる. $S_a := \{(a,y,z) : 0 < y < b, 0 < z < c\}$, $S_0 := \{(0,y,z) : 0 < y < b, 0 < z < c\}$ とおくと

$$n_1 = \begin{cases} 1 & (x,y,z) \in S_a \\ -1 & (x,y,z) \in S_a \\ 0 & (x,y,z) \in \partial\Omega, (x,y,z) \notin S_0, (x,y,z) \notin S_a \end{cases}$$

となることから

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega} F_1 n_1\,dS &= \iint_{S_a} F_1\,dS - \iint_{S_0} F_1\,dS \\ &= \iint_{(0,b)\times(0,c)} F_1(a,y,z)\,dydz - \iint_{(0,b)\times(0,c)} F_1(0,y,z)\,dydz \\ &= \iint_{(0,b)\times(0,c)} dydz \int_0^a \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z)\,dx \\ &= \iiint_\Omega \frac{\partial F_1}{\partial x}\,dxdydz \end{aligned}$$

となる. □

注意 5.1.

Gauss の発散定理 (定理 5.1) の証明が難しい点は, **領域が長方形とは限らない**ということである. 領域の形状を考慮しなければいけない点が一次元における積分定理 (5.1) との大きな違いである.

例 5.1.

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ は有界領域で, $\partial\Omega$ は滑らかとし, $\mathbf{0} \in \Omega$ とする. このとき,

$$-\iint_{\partial\Omega} \nabla \left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|} \right) \cdot \boldsymbol{n}\,dS = 4\pi$$

となる. ただし, $\boldsymbol{n}$ は Ω の外向き単位法線ベクトルである.

証明.

$B_r = B_r(0) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3 : |\boldsymbol{y}| < r\}$ として, $r > 0$ を $B_r \subset \Omega$ をみたすようにとると, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ に対して, $\Delta(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}) = 0$ だから, Gauss の発散定理により,

$$
\begin{aligned}
&-\iint_{\partial\Omega} \nabla\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\right)\cdot \boldsymbol{n}\, dS \\
&= -\iiint_{\Omega\setminus B_r} \Delta\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\right) dxdydz + \iint_{\partial B_r}\left(\nabla\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\right)\cdot \boldsymbol{n}\right) dS \\
&= \iint_{\partial B_r}\left(\nabla\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\right)\cdot \boldsymbol{n}\right) dS
\end{aligned}
$$

となる. ここで,

$$
\nabla\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\right) = -\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^3}, \qquad \boldsymbol{n} = -\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}
$$

だから (外向きと内向きが通常考えるものとひっくりかえっていることに注意),

$$
\begin{aligned}
\iint_{\partial B_r} \nabla\left(\frac{1}{|\boldsymbol{x}|}\right)\cdot \boldsymbol{n}\, dS &= \iint_{\partial B_r} \frac{|\boldsymbol{x}|^2}{|\boldsymbol{x}|^4}\, dS \\
&= \iint_{\partial B_r} \frac{1}{r^2}\, dS = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi
\end{aligned}
$$

となる. □

注意 5.2.
例 5.1 の計算は, 複素関数論における Cauchy の積分定理と Cauchy の積分公式 (留数定理) にだいたい対応している. 調和関数と正則関数がだいたい同じようなものだと思ってみるとよい.

系 5.2.
$\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{n}$ は定理 5.1 の仮定と同じとし, f を Ω 上のスカラー場とする. このとき,

$$
\iiint_{\Omega} \Delta f\, dxdydz = \iint_{\partial\Omega} (\nabla f \cdot \boldsymbol{n})\, dS
$$

が成り立つ.

証明.
$\Delta f = \mathrm{div}(\nabla f)$ に Gauss の発散定理を使う. □

Gauss の発散定理は一般の次元で成り立つ. 結果のみを書くことにする.

定理 5.2 (Gaussの発散定理 (一般次元)).
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界領域とし, $\partial\Omega$ は滑らかとする. このとき, $F \in \mathscr{X}(\Omega)$ に対して

$$\int_\Omega \operatorname{div} F\, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu\, d\sigma$$

が成り立つ. ただし, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $F = (F_1, \ldots, F_n)$ に対して, $\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial F_i}{\partial x_i}$ であり, ν は $\partial\Omega$ 上の外向単位法線ベクトル場, $d\sigma$ は $\partial\Omega$ の面素である.

5.2. **Greenの定理.** 空間次元が2次元のときは, 各変数における線積分を用いて微積分の基本定理を拡張することもできる. 定理を述べるために, 言葉を一つ定義する. 単純閉曲線とは, 自己交差のない閉曲線のことである.

定理 5.3 (Greenの定理).
$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を有限個の単純閉曲線で囲まれた有界領域とする. P, Q を Ω 上のスカラー場とすると

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial\Omega} (P\, dx + Q\, dy)$$

が成り立つ. ただし, 右辺において, $\partial\Omega$ の向きは Ω を左手にみて進む向きとする (自然な向きという).

定理 5.3 が成り立つ理由.
$\Omega = (0, a) \times (0, b)$ で考える.

$$\begin{aligned} &C_1 : (t, 0) \quad t : 0 \to a \\ &C_2 : (a, t) \quad t : 0 \to b \\ &C_3 : (t, b) \quad t : a \to 0 \\ &C_1 : (0, t) \quad t : b \to 0 \end{aligned}$$

とおくと, $\partial\Omega = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ であり,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} P\, dx &= \left(\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} \right) P\, dx \\ &= \int_{C_1} P\, dx + \int_{C_3} P\, dx \quad (\because C_2 \text{と} C_4 \text{は} x \text{成分が変化しない}) \\ &= \int_0^a P(t, 0)\, dt + \int_a^0 P(t, b)\, dt = -\int_0^a (P(t, b) - P(t, 0))\, dt \\ &= -\int_0^a dt \int_0^b \frac{\partial P}{\partial y}(t, y)\, dy = -\int_\Omega \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy \end{aligned}$$

となる. 同様にして, $\displaystyle\int_{\partial\Omega} Q\,dy = \int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy$ も成り立つ. □

Green の定理から, 複素関数論で有名な Cauchy の積分定理が得られる. 話を簡単にするために, $\mathbb{C}$ 上正則な関数で考える.

定理 5.4 (Cauchy の積分定理)**.**
f を $\mathbb{C}$ 上正則な関数, $C \subset \mathbb{C}$ を単純閉曲線とすると

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

が成り立つ.

定理 5.4 の理由.
$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$ と書くと, Cauchy-Riemann の方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

が成り立つ. すると, $dz = dx + idy$ と書けるから, Ω を C で囲まれた領域とすると, Green の定理と Cauchy-Riemann の方程式から

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_C (u+iv)(dx+idy)\\ &= \int_C (u\,dx - v\,dy) + i\int_C (v\,dx + u\,dy)\\ &= \int_{\Omega}\left(-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)dxdy + i\int_{\Omega}\left(-\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dxdy = 0\end{aligned}$$

が成り立つ. □

系 5.3.
$D \subset \mathbb{R}^2$ を滑らかな境界を持つ領域とすると, 次が成り立つ.

(1) $\displaystyle |D| = -\int_{\partial\Omega} y\,dx$

(2) $\displaystyle |D| = \int_{\partial\Omega} x\,dy$

(3) $\displaystyle |D| = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} (-y\,dx + x\,dy)$

証明.
(3) は $((1)+(2))/2$ を考えればよい. (1) のみ示す. Green の定理を用いると

$$-\int_{\partial\Omega} y\,dx = \iint_D \frac{\partial}{\partial y} y\,dxdy \iint_D dxdy = |D|$$

が得られる. □

例 5.2 (楕円の面積)**.**

$a, b > 0$ に対して, 楕円 $C : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ で囲まれた部分 D の面積は πab で与えられる.

例 5.2 の高校での方法.

第一象限を考えると楕円は $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ と書けるから,

$$\begin{aligned}
|D| &= 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx \\
&= 4b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\cos^2\theta}\sin\theta\,d\theta \quad (x = a\cos\theta\text{と変数変換}) \\
&= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\,d\theta \\
&= 2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos 2\theta)\,d\theta = \pi ab
\end{aligned}$$

となる. □

例 5.2 の Green の定理を用いた方法.

楕円をパラメータ表示すると,

$$(x, y) = (a\cos t, b\sin t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

となる. $\dfrac{dx}{dt} = -a\sin t$, $\dfrac{dy}{dt} = a\cos t$ だから Green の定理 (系 5.3) を用いると,

$$\begin{aligned}
|D| &= \frac{1}{2}\int_C (-y\,dx + x\,dy) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (-(b\sin t)(-a\sin t) + (a\cos t)(b\cos t))\,dt \\
&= \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = \pi ab
\end{aligned}$$

となる. □

例 5.3 (asteroid の面積)**.**

$a > 0$ に対して, asteroid $C : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ で囲まれた部分 D の面積は $\dfrac{3}{8}\pi a^2$ で与えられる.

証明.

asteroid をパラメータ表示すると,

$$(x, y) = (a\cos^3 t, b\sin^3 t) \quad (0 \le t \le 2\pi)$$

となる. あとは例 5.2 と同様に計算すればよい. □

5.3. **Stokes の定理.** ベクトル場の線積分を用いた積分定理を考える. これは面積分と線積分を繋ぐ積分定理である.

定理 5.5 (Stokes の定理)**.**

S を $\mathbb{R}^3$ 内の曲面で, S の連続な単位法線ベクトル場 $\boldsymbol{n}$ が存在するとし, この曲面を囲う曲線を C とする. ただし, C の向きは, $\boldsymbol{\nu}$ を ∂S の外向単位法線, $\boldsymbol{\tau}$ を C の接ベクトルとしたとき, $\det(\boldsymbol{\nu}\ \boldsymbol{\tau}\ \boldsymbol{n}) > 0$ となるように定める. このとき, $S \subset \Omega$ をみたす領域 Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ について

$$\iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

が成り立つ.

注意 5.3.

Möbius の輪は, 連続な単位法線ベクトル場を持たない曲面の例である.

定理 5.5 が成り立つ理由.

$\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$, $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$ と書くと,

$$\begin{aligned}
&\iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS \\
&= \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) n_1 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) n_2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) n_3 \right\} dS, \\
&\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C (F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz)
\end{aligned}$$

となる. そこで, $\displaystyle\int_C F_1\, dx = \iint_S \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} n_2 - \frac{\partial F_1}{\partial y} n_3 \right) dS$ を

$$S : \boldsymbol{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad ((u, v) \in D), \qquad \boldsymbol{n} = \frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right|}$$

のときに示す.

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \right)$$

だから

$$n_2\,dS = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right) dudv, \qquad n_3\,dS = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) dudv$$

となる. 合成関数の微分法より

$$\frac{\partial F_1}{\partial u} = \frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial v} = \frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$

だから, Green の定理により

$$\begin{aligned}
&\iint_S \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} n_2 - \frac{\partial F_1}{\partial y} n_3\right) dS \\
&= \iint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right) - \frac{\partial F_1}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\right) dudv \\
&= \iint_D \left(\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} - \left(\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u}\right) dudv \\
&= \iint_D \left(\left(\frac{\partial F_1}{\partial u} - \frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} - \left(\frac{\partial F_1}{\partial v} - \frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u}\right) dudv \\
&= \iint_D \frac{\partial}{\partial u}\left(F_1\frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(F_1\frac{\partial x}{\partial u}\right) dudv \\
&= \int_{\partial D} F_1\frac{\partial x}{\partial v}\,dv + F_1\frac{\partial x}{\partial u}\,du = \int_{\partial D} F_1\,dx
\end{aligned}$$

が得られる. □

上記で Stokes の定理の証明に Green の定理を用いた. 実は, Stokes の定理と Gauss の発散定理と Green の定理はすべて同じ主張である.

Stokes の定理から Gauss の発散定理の導出.

滑らかな境界を持つ領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, Ω に対する単位法線ベクトル $\boldsymbol{n} = (0,0,1)$, 滑らかなベクトル場 $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2)$ に対して $\boldsymbol{G} = (-F_2, F_1, 0)$ とおくと

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{n} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{F}, \qquad \int_\Omega \mathrm{rot}\,\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_\Omega \mathrm{div}\,\boldsymbol{F}\,dxdy$$

となる. 他方, $\partial\Omega$ を正の向きに進む弧長パラメータ $0 \le s \le L$ を用いて $(x(s), y(s), 0)$ と表すと, $dx = x'(s)\,ds$, $dy = y'(s)\,ds$ だから

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{G}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_{\partial\Omega} (-F_2\,dx + F_1\,dy) \\
&= \int_0^L (F_2(-x'(s)) + F_1 y'(s))\,ds = \int_0^L (F_1, F_2)\cdot(y'(s), -x'(s))\,ds
\end{aligned}$$

が得られる. $\partial\Omega$ の ($\mathbb{R}^3$ 内の曲線とみたときの) 接ベクトルは $(x'(s), y'(s), 0)$, 外向単位法線ベクトルは $(y'(s), -x'(s), 0)$ となるから, $\boldsymbol{n} = (y'(s), -x'(s))$ は $\partial\Omega$ の ($\mathbb{R}^2$ 内の曲線とみたときの) 外向単位法線ベクトルとなるから, Stokes の定理より

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dxdy = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, ds$$

が得られる. □

Gauss の発散定理から Green の定理の導出.

滑らかな境界を持つ領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ と Ω 上のスカラー場 P, Q に対して $\boldsymbol{F} = (Q, -P)$ とおくと

$$\iint_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dxdy = \iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

となる. 他方, $\partial\Omega$ を正の向きに進む弧長パラメータ $0 \le s \le L$ を用いて $(x(s), y(s))$ と表すと, $dx = x'(s)\, ds$, $dy = y'(s)\, ds$ であり, 外向単位法線ベクトルは $\boldsymbol{n} = (y'(s), -x'(s))$ より

$$\int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, ds = \int_0^L (Qy'(s) + Px'(s))\, ds = \int_{\partial\Omega} Qdx + Pdy$$

□

Stoke の定理を別の表記で書いてみる. 一変数の変数変換 $y = \phi(x)$ に対して, 形式的に $dy = \phi'(x)\, dx = \dfrac{dy}{dx} dx$ と書くことがあった. これを多変数で考えると, 合成関数の微分を考えることになり

$$dF_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x}\, dx + \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dy + \frac{\partial F_1}{\partial z}\, dz$$

となる. そこで, dx, dy, dz をベクトルを思うことにして, dF_1 と dx の外積を考えてみると

$$\begin{aligned} dF_1 \times dx &= \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\, dx + \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dy + \frac{\partial F_1}{\partial z}\, dz \right) \times dx \\ &= \frac{\partial F_1}{\partial z}\, dz \times dx - \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dx \times dy \end{aligned}$$

となり, 同様の計算を F_2, F_3 にも行って, 外積記号を忘れることにすると

$$dF_1 dx + dF_2 dy + dF_3 dz = \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \begin{pmatrix} dydz \\ dzdx \\ dxdy \end{pmatrix}$$

が得られる. 他方, 曲線 C を $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ と書くと

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

となるから,

$$dy \times dz = \left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right) \times \left(\frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv\right) = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right) du \times dv$$

となる. 他方

$$n_1\, dS = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right) dudv$$

となり, 外積記号 $\times$ を忘れることにすると, $n_1\, dS = dydz$ が得られる. 同様にして, $n_2\, dS = dzdx$, $n_3\, dS = dxdy$ となることから

$$dF_1dx + dF_2dy + dF_3dz = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{F} \cdot \begin{pmatrix} dydz \\ dzdx \\ dxdy \end{pmatrix} = \mathrm{rot}\, \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

が得られる. 従って, Stokes の定理は形式的に

$$\int_{\partial S} F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz = \iint_S dF_1\, dx + dF_2\, dy + dF_3\, dz$$

と書くことができ, さらに $dF_1\, dx + dF_2\, dy + dF_3\, dz = d(F_1dx + F_2dy + F_3dz)$ と書くことにすれば

$$\int_{\partial S} F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz = \iint_S d(F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz) \tag{5.2}$$

と書くことができる. Stokes の定理の一般形は (5.2) であり, Gauss の発散定理や Green の定理もすべて (5.2) から導出することができる.

この (5.2) のきれいな等式をきちんと定式化するには, 必要なことがいろいろある. まずは, **微分形式とよばれる dx, dy, dz を定式化すること**, dx, dy, dz **などに作用させた外積を定式化すること**, **関数 f における df など, 高校の積分変数変換で形式的に計算していた外微分とよばれる演算を定義すること**, **微分形式に対する積分を定義すること**, そして, これらすべてを定式化したあとで, **微分形式に対する Stokes の定理** (5.2) **が成り立つこと**を示さなければならない. この講義では, この定式化をきちんと理解することを目標にはしないが, 講義の最後に, どのようにして微分形式を定式化するかを説明する. この定式化は $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル解析だけでなく, 曲面上のベクトル解析に一般化できるという点で強力である. さらに, 曲面にすらならない対象 (例えば石鹸膜やシャボン玉など) に対しても微分形式 (の一般化) が定式化できる場合があり, 応用上も有効であることに注意しておく.

6. 微分形式と積分定理

Ω 上のスカラー場 f に対して,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

と書いた. これらの記号はよく積分の後ろの記号として使っている. そこで, これらに (天下り的ではあるが), 演算と積分を定義して, 積分定理をみなおしてみる.

6.1. 微分形式. Ω 上の微分形式とは, Ω 上の関数と微分 dx, dy, dz を加えたり掛けたりしてできるものである. 掛け算は外積 $\wedge$ と呼ばれ

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0, \quad dy \wedge dx = -dx \wedge dy \quad \text{etc}$$

に従うものとする. 具体的には

0-形式 (0-form)	Ω 上のスカラー場 f
1-形式 (1-form)	$f\,dx + g\,dy + h\,dz$
2-形式 (2-form)	$f\,dy \wedge dz + g\,dz \wedge dx + h\,dx \wedge dy$
3-形式 (3-form)	$f\,dx \wedge dy \wedge dz$

である. ここで, f, g, h は Ω 上のスカラー場である.

1-形式 α, β を $\alpha = \alpha_1\,dx + \alpha_2\,dy + \alpha_3\,dz$, $\beta = \beta_1\,dx + \beta_2\,dy + \beta_3\,dz$ とかくと, $\alpha \wedge \beta$ は 2-形式となり

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge \beta &= (\alpha_1\,dx + \alpha_2\,dy + \alpha_3\,dz) \wedge (\beta_1\,dx + \beta_2\,dy + \beta_3\,dz) \\
&= \alpha_1\beta_1\,dx \wedge dx + \alpha_1\beta_2\,dx \wedge dy + \alpha_1\beta_3\,dx \wedge dz \\
&\quad + \alpha_2\beta_1\,dy \wedge dx + \alpha_2\beta_2\,dy \wedge dy + \alpha_2\beta_3\,dy \wedge dz \\
&\quad + \alpha_3\beta_1\,dz \wedge dx + \alpha_3\beta_2\,dz \wedge dy + \alpha_3\beta_3\,dz \wedge dz \\
&= \alpha_1\beta_2\,dx \wedge dy - \alpha_1\beta_3\,dz \wedge dx - \alpha_2\beta_1\,dx \wedge dy \\
&\quad + \alpha_2\beta_3\,dy \wedge dz + \alpha_3\beta_1\,dz \wedge dx - \alpha_3\beta_2\,dy \wedge dz \\
&= (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\,dy \wedge dz + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\,dx \wedge dz \\
&\quad + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\,dx \wedge dy
\end{aligned}$$

となる.

6.2. 外微分. 微分形式に対する外微分を定義する. 0-形式 f に対して, 外微分 df を

$$df := \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

で定義し, 1-形式 $\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$ に対して, 外微分 $d\omega$ を

$$
\begin{aligned}
d\omega &:= df \wedge dx + dg \wedge dy + dh \wedge dz \\
&= \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy
\end{aligned}
$$

で定義し, 2-形式 $\omega = f\,dy \wedge dz + g\,dz \wedge dx + h\,dx \wedge dy$ に対して, 外微分 $d\omega$ を

$$
\begin{aligned}
d\omega &:= df \wedge dy \wedge dz + dg \wedge dz \wedge dx + dh \wedge dx \wedge dy \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}
$$

で定義する. 外微分は微分形式の次数を 1 つあげることに注意しよう.

6.3. **微分形式と積分.** 微分形式から積分を定義する. 1-形式 $\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$ が曲線 C 上で定義されているとき, ω の積分を

$$\int_C \omega := \int_C f\,dx + g\,dy + h\,dz$$

で定義する. 2-形式 $\omega = f\,dy \wedge dz + g\,dz \wedge dx + h\,dx \wedge dy$ が曲面 S 上で定義されているときに, ω の積分を

$$\int_S \omega := \int_S (fn_x + gn_y + hn_z)\,dS$$

で定義する. ただし, $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$ は S の単位法線ベクトルである (正確には, 法線ベクトルの向きを決めなければいけないが, ここでは述べない. 詳しくは参考文献を参照せよ). 3-形式 $\omega = f\,dx \wedge dy \wedge dz$ が有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 上で定義されているとき, ω の積分を

$$\int_\Omega \omega := \int_\Omega f\,dxdydz$$

で定義する.

さて, $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3) \in \mathscr{X}(\Omega)$ とおくと, Gauss の発散定理は

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{F}\,dxdydz = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,dS$$

であった. ここで, 2-形式 ω を

$$\omega := F_1\,dy \wedge dz + F_2\,dz \wedge dx + F_3\,dx \wedge dy$$

とおくと,

$$d\omega = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz = (\operatorname{div} \boldsymbol{F})\,dx \wedge dy \wedge dz$$

となる．また,

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\partial\Omega} (F_1 n_x + F_2 n_y + F_3 n_z)\, dS = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

だったことから

$$\int_{\Omega} d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega \tag{6.1}$$

が得られる．また, $D \subset \mathbb{R}^2$ を有界な領域, P, Q を D 上のスカラー場とすると, Green の定理は

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial D} (P\, dx + Q\, dy)$$

であったが, これも $\omega = P\, dx + Q\, dy$ と定めると (6.1) と同様な等式

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$$

が得られる．さらに, S を $\mathbb{R}^3$ 内の曲面で, 曲面を囲う曲線を $C = \partial S$ とおくと, $S \subset \Omega$ をみたす領域 Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ について Stokes の定理

$$\iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \int_{\partial S} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

が成り立つが, これも 1-形式 $\omega = F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz$ とおくと (6.1) と同様な等式

$$\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega$$

が得られる．つまり, 3 つの積分定理は微分形式を用いると, すべて (6.1) の形をしていることがわかる．従って, (6.1) さえ証明できてしまえば, 3 つの積分定理はすべて証明できることになる．これ以上深くは立ち入らないが, この微分形式はより一般に多様体の上で定義することができ, 多様体の上での積分定理が成り立つ．$\mathbb{R}^n$ の場合で (話を簡単にするために) 少し制限の強い形で紹介する．

定理 6.1 (Stokes の定理)**.**

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域, $\partial\Omega$ は滑らかとする．ω を Ω 上の k 次微分形式とすると, 向き付け可能な境界をもつ, コンパクトな $(k+1)$ 次元曲面 $S = S^{k+1}$ に対して,

$$\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega$$

が成り立つ．

7. Laplace 方程式

このセクションでは, ベクトル記号 $\boldsymbol{x}$ を使わずに x と書く. また, $dS = d\sigma$ と書く. $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を有界領域とし, $\partial\Omega$ は滑らかとする. ν を $\partial\Omega$ 上の外向き単位法線ベクトルとする. さらに $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ に対して

$$C^k(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R}, C^k\text{級}\}$$
$$C_0(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R}, \text{連続}, u|_{\partial\Omega} = 0\}$$

と書く.

7.1. Laplace 方程式の導出. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続とし, $F(\xi) := \int_0^\xi f(\eta)\,d\eta$ とおく. このとき, $v \in C^1(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ に対して, エネルギー

$$E[v] := \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla v|^2 + F(v)\right) dx$$

を考える. $\frac{1}{2}|\nabla v|^2$ の項は運動エネルギー, $F(v)$ はポテンシャルエネルギーということがある. 変分原理とは「エネルギー E は最小が実現される」である. 数式で書くと

$$\text{(V)} \qquad E[u] = \inf_{v \in C^1(\Omega) \cap C_0(\Omega)} E[v]$$

となる u が実現されるということである. そこで, このような u はどのような性質を持つか？を考える. 以下, u はとりあえずいくらでも微分できる関数としておく.

任意の $t \in \mathbb{R}$, $\phi \in C^1(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ に対して, u が (V) をみたすなら

$$E[u] = E[u + 0\phi] \le E[u + t\phi]$$

だから, $\frac{d}{dt}E[u + t\phi]|_{t=0} = 0$ となるはずである. そこで, 微分を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E[u + t\phi] &= \frac{d}{dt}\int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla(u + t\phi)|^2 + F(u + t\phi)\right) dx \\ &= \int_\Omega \left(\nabla u \cdot \nabla\phi + t|\nabla\phi|^2 + F'(u + t\phi)\phi\right) dx\end{aligned}$$

だから $F'(u + t\phi) = f(u + t\phi)$ に注意すると, Gauss の発散定理 (問題 9.4 の (2)) から

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E[u + t\phi]\Big|_{t=0} &= \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla\phi + f(u)\phi)\,dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \phi\nabla u \cdot \nu\,d\sigma + \int_\Omega (-\Delta u + f(u))\,\phi\,dx\end{aligned}$$

が得られる. $\phi \in C_0(\Omega)$ より, $\phi|_{\partial\Omega} = 0$ だから, $\frac{d}{dt}E[u+t\phi]|_{t=0} = 0$ とくみあわせると

$$\int_\Omega (-\Delta u + f(u))\,\phi\,dx = 0$$

が得られる. $\phi \in C^1(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ は任意だったから,

$$-\Delta u + f(u) = 0 \tag{EL}$$

が得られる (変分法の基本補題という). この (EL) を エネルギー E に対する Euler-Lagrange 方程式という. とくに $f \equiv 0$ なら

$$-\Delta u = 0 \tag{L}$$

が得られる. (L) を Laplace 方程式といい, (L) をみたす $u \in C^2(\Omega)$ を調和関数という.

定理 7.1 (平均値の定理)**.**
　$u \in C^2(\Omega)$ が調和関数ならば, 任意の Ω 内の開球 $B = B_R(y) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x-y| < R\} \subset \Omega$ に対して

$$u(y) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \int_{B_R(y)} u(x)\,dx$$

が成り立つ.

　調和関数は, 球の中心の値が, その球の積分平均で決まってしまうことを平均値の定理は主張している.

証明.
　1. 話を簡単にするため, $y = 0$ とする (平行移動すればよい). $0 < \rho < R$ に対して, Gauss の発散定理により

$$0 = \int_{B_\rho(0)} \Delta u\,dx = \int_{B_\rho(0)} \mathrm{div}(\nabla u)\,dx = \int_{\partial B_\rho(0)} \nabla u(x)\cdot\nu(x)\,d\sigma(x)$$

となる. 右辺の面積分を計算してみる. $x = \rho(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \sin u) =: \rho\omega$ ($(u,v) \in (0,\pi)\times(-\pi,\pi) =: U$) と球面を表示すると $d\sigma = \rho^2 \sin u\,dudv$, $\nu(x) = \frac{x}{\rho} = \omega$ より

$$\nabla u(x)\cdot\nu(x) = \nabla u(\rho\omega)\cdot\omega = \frac{\partial}{\partial\rho}u(\rho\omega)$$

だから,

$$\begin{aligned}0 &= \rho^2 \iint_U \frac{\partial}{\partial\rho} u(\rho\omega)\sin u\, dudv \\ &= \rho^2 \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\iint_U u(\rho\omega)\sin u\, dudv\right) = \rho^2 \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{-2}\int_{\partial B_\rho(0)} u\, d\sigma\right)\end{aligned}$$

となり, $\rho^{-2}\int_{\partial B_\rho(0)} u\, d\sigma$ は ρ について定数となる. つまり, $0<\rho<R$ に対して

$$\frac{1}{4\pi R^2}\int_{\partial B_R(0)} u\, d\sigma = \frac{1}{4\pi\rho^2}\int_{\partial B_\rho(0)} u\, d\sigma \tag{7.1}$$

が得られる.

2. $\rho\downarrow 0$ のときに $\frac{1}{4\pi\rho^2}\int_{\partial B_\rho(0)} u\, d\sigma \to u(0)$ を示す.

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{4\pi\rho^2}\int_{\partial B_\rho(0)} u\, d\sigma - u(0)\right| &= \left|\frac{1}{4\pi\rho^2}\int_{\partial B_\rho(0)} (u(x)-u(0))\, d\sigma(x)\right| \\ &\le \frac{1}{4\pi\rho^2}\int_{\partial B_\rho(0)} |u(x)-u(0)|\, d\sigma(x) \\ &\le \sup_{y\in\overline{B_\rho(0)}} |u(y)-u(0)|\end{aligned}$$

より, u は $y=0$ で連続だから

$$\sup_{y\in\overline{B_\rho(0)}} |u(y)-u(0)| \to 0 \quad (\rho\downarrow 0)$$

となる. よって, (7.1) で $\rho\downarrow 0$ とすることで,

$$\frac{1}{4\pi R^2}\int_{\partial B_R(0)} u\, d\sigma = u(0) \tag{7.2}$$

が得られた. R を ρ にとりかえると (7.2) から

$$\int_{\partial B_\rho(0)} u\, d\sigma = 4\pi\rho^2 u(0) \quad (0<\rho<R)$$

となるから $0<\rho<R$ について積分すると

$$\int_{B_R(0)} u\, dx = \frac{4}{3}\pi R^3 u(0)$$

が得られる. □

8. 極小曲面方程式

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ は有界領域で境界は滑らかとする. $\partial\Omega$ 上で定義された滑らかな関数 $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ が与えられたとき, $u|_{\partial\Omega} = f$ をみたす $u : \Omega \to \mathbb{R}$ のグラフ

$$\Gamma := \{(x, y, u(x, y)) : (x, y) \in \Omega\}$$

の面積を最小化する問題を考える. この問題は石鹸膜がどのような形をしているか？に関係がある.

Γ の面積は問題 2.4 により $\int_\Omega \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dxdy$ となることがわかる. ここで, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ である. すると

$$E[v] := \int_\Omega \sqrt{1 + v_x^2 + v_y^2}\, dxdy$$

としたときに

$$E[u] = \inf_{\substack{v \in C^1(\Omega) \\ v|_{\partial\Omega} = f}} \int_\Omega \sqrt{1 + v_x^2 + v_y^2}\, dxdy \tag{V}$$

をみたす u を探す問題に帰着される. そこで, § 7 と同じようにして, E に対する Euler-Lagrange 方程式を導出する.

任意の $t \in \mathbb{R}$, $\phi \in C^\infty(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ に対して, u が (V) をみたすなら, 前回と同じく $\frac{d}{dt} E[u + t\phi]|_{t=0} = 0$ となるはずである. そこで, 微分を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E[u + t\phi] &= \frac{d}{dt} \int_\Omega \sqrt{1 + (u + t\phi)_x^2 + (u + t\phi)_y^2}\, dxdy \\ &= \int_\Omega \frac{(u + t\phi)_x \phi_x + (u + t\phi)_y \phi_y}{\sqrt{1 + (u + t\phi)_x^2 + (u + t\phi)_y^2}}\, dxdy \end{aligned}$$

だから Gauss の発散定理から

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} E[u + t\phi]\Big|_{t=0} \\ &= \int_\Omega \frac{u_x \phi_x + u_y \phi_y}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}}\, dxdy \\ &= \int_\Omega \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right) \cdot \nabla \phi\, dxdy \\ &= \int_{\partial\Omega} \phi \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right) \cdot \nu\, d\sigma - \int_\Omega \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}} \right) \phi\, dxdy \end{aligned}$$

が得られる. $\phi \in C_0(\Omega)$ より, $\phi|_{\partial\Omega} = 0$ だから, $\frac{d}{dt}E[u+t\phi]|_{t=0} = 0$ とくみあわせると

$$-\int_\Omega \operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right)\phi\,dxdy = 0$$

が得られる. $\phi \in C^1(\Omega) \cap C_0(\Omega)$ は任意だったから,

$$\text{(EL)} \qquad -\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right) = 0$$

が得られる.

定理 8.1 (極小曲面方程式)**.**
$u : \Omega \to \mathbb{R}$ が (V) をみたすなら

$$\text{(MS)} \qquad \begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{\nabla u}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right) = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u\Big|_{\partial\Omega} = f \end{cases}$$

をみたす.

$\boldsymbol{p} = (x, y, u(x,y))$, $\boldsymbol{e} = \frac{(-u_x, -u_y, 1)}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}$ とおくとき, $\boldsymbol{p}$ は Γ のパラメータ表示, $\boldsymbol{e}$ は Γ の単位法線ベクトルであり,

$$E = \boldsymbol{p}_x \cdot \boldsymbol{p}_x, \qquad F = \boldsymbol{p}_x \cdot \boldsymbol{p}_y, \qquad G = \boldsymbol{p}_y \cdot \boldsymbol{p}_y,$$
$$L = \boldsymbol{p}_{xx} \cdot \boldsymbol{e}, \qquad M = \boldsymbol{p}_{xy} \cdot \boldsymbol{e}, \qquad N = \boldsymbol{p}_{yy} \cdot \boldsymbol{e}$$

を Γ の第一基本量, 第二基本量,

$$E\,dxdx + 2F\,dxdy + G\,dydy, \quad L\,dxdx + 2M\,dxdy + N\,dydy$$

をそれぞれ第一基本形式, 第二基本形式というのであった. u を用いると

$$E = 1+u_x^2, \qquad F = u_x u_y, \qquad G = 1+u_y^2,$$
$$L = \frac{u_{xx}}{\sqrt{(1+u_x^2+u_y^2)}}, \quad M = \frac{u_{xy}}{\sqrt{(1+u_x^2+u_y^2)}}, \quad N = \frac{u_{yy}}{\sqrt{(1+u_x^2+u_y^2)}},$$

と書ける. すると平均曲率 h は

$$h = \frac{EN+GL-2FM}{2(EG-F^2)} = \frac{(1+u_x^2)u_{yy} + (1+u_y^2)u_{xx} - 2u_{xy}u_x u_y}{2(1+u_x^2+u_y^2)\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}$$

となる. 他方, 少し頑張って計算すると

$$-\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right)=\frac{(1+u_x^2)u_{yy}+(1+u_y^2)u_{xx}-2u_{xy}u_xu_y}{(1+u_x^2+u_y^2)\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}$$

となる. よって次のことがわかる.

定理 8.2 (極小曲面方程式の幾何学的特徴づけ)**.**
u が (MS) をみたすなら, グラフ Γ の平均曲率はいたるところ 0 となる.

このことから, 石鹸膜は, 平均曲率がいたるところ 0 となる曲面であるといいかえることができる. このことは, たんに石鹸膜をみていても理解しがたい点であろう. Euler-Lagrange 方程式を導出したことで理解ができるといってもよい.

実際に, 平均曲率がいたるところ 0 の曲面や平均曲率がいたるところ一定の曲面はよく研究されている. また, 極小曲面がどのような曲面であるかについては, インターネットで検索してみることをおすすめする.