現代解析学I 演習問題 (2016年4月12日)

問題 1.1.

$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ から作られる平行四辺形の面積を S とおくとき

$$S^2 = |\boldsymbol{x}|^2|\boldsymbol{y}|^2 - (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})^2$$

となることを示せ.

問題 1.2.

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ に対して, 中線定理

$$\frac{|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2 + |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}{2} = |\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2$$

を示せ. また,

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = \frac{1}{4}(|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2 - |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2)$$

を示せ.

問題 1.3.

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して, 次を示せ.

(1) $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$;

(2) $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{x}$;

(3) $\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{z}$;

(4) $(\lambda\boldsymbol{x})\times\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\times(\lambda\boldsymbol{y}) = \lambda(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})$.

問題 1.4.

$\boldsymbol{x} = (2,-3,-1)$, $\boldsymbol{y} = (1,4,-2)$ のとき $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{x}$ を計算せよ.

問題 1.5.

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$ が $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ をみたすとき, $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}\times\boldsymbol{x}$ を示せ.

問題 1.6.

$\boldsymbol{x} = (1,2,1)$, $\boldsymbol{y} = (2,1,1)$, $\boldsymbol{z} = (-1,1,2)$ のとき, $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{z}$ と $\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z})$ を求めよ (括弧の位置に注意せよ).

問題 1.7 (ベクトルの三重積)**.**

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$ に対して, 次を示せ.

(1) $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z}) = \det(\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{z})$;

(2) $(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y})\times\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z})\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z})\boldsymbol{x}$;

(3) $\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z})\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})\boldsymbol{z}$;

問題 1.8.

$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) \in C^1((0,1);\mathbb{R}^3)$ は $0 < t < 1$ に対して, $|\boldsymbol{r}(t)| > 0$ をみたすとする. このとき, 次の関数を微分せよ

(1) $\dfrac{\boldsymbol{r}(t)}{|\boldsymbol{r}(t)|}$

(2) $\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{r}(t)$.

現代解析学 I 演習問題　(2016 年 4 月 19 日)

問題 2.1.

開区間 $I \subset \mathbb{R}$ に対し, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(t) : I \to \mathbb{R}^3$ は C^1 級とする (このとき, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in C^1(I\,;\mathbb{R}^3)$ と書く). このとき, 次を示せ.

(1) $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) = \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}\cdot\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dt}$.

(2) $\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}) = \dfrac{d\boldsymbol{x}}{dt}\times\boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}\times\dfrac{d\boldsymbol{y}}{dt}$.

問題 2.2.

$r > 0$, $0 < s < 2\pi r$ に対して, $\boldsymbol{p}(s) = \left(r\cos\dfrac{s}{r}, r\sin\dfrac{s}{r}\right)$ は半径 r で原点中心の円を定めるが, $|\boldsymbol{p}'(s)| \equiv 1$ となることを示せ.

問題 2.3.

$f \in C^1(a,b)$ に対し, $\boldsymbol{p} : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ を

$$\boldsymbol{p}(t) := (t, f(t)) \quad (t \in (a,b))$$

により表す. このとき, グラフ $\boldsymbol{p}$ の長さを f を用いて表せ.

問題 2.4.

領域 $D \subset \mathbb{R}^2$, $f \in C^1(D)$ に対し, f のグラフ $\boldsymbol{p} : D \to \mathbb{R}^3$ を

$$\boldsymbol{p}(u,v) := (u, v, f(u,v)) \quad ((u,v) \in D)$$

で定める.

(1) $(u,v) \in D$ に対して, $\dfrac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial u}(u,v) \times \dfrac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial v}(u,v)$ を計算せよ.

(2) $\boldsymbol{n} := \dfrac{\dfrac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial u}(u,v) \times \dfrac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial v}(u,v)}{\left|\dfrac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial u}(u,v) \times \dfrac{\partial\boldsymbol{p}}{\partial v}(u,v)\right|}$ とおく. $\boldsymbol{n}$ を f を用いて表せ.

(3) グラフの面積 S を f を用いて表せ.

現代解析学 I 演習問題 (2016 年 4 月 26 日)

問題 3.1.

$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ に対して, $f(x, y, z) = |(x, y, z)|$ により, $\mathbb{R}^3$ のスカラー場を定めたとき, ∇f を求めよ. ただし, 原点は除いてよい.

問題 3.2.

f, g を Ω 上のスカラー場, $c \in \mathbb{R}$, $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ とするとき, 次を示せ.

(1) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$;
(2) $\nabla(cf) = c\nabla f$;
(3) $\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g)$;
(4) $\nabla(\phi(f)) = \phi'(f)\nabla f$.

問題 3.3.

$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ に対して,

$$\operatorname{div}\left(\frac{(x, y, z)}{|(x, y, z)|^3}\right)$$

を計算せよ.

問題 3.4.

$\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}$ を Ω 上のベクトル場, f を Ω 上のスカラー場, $c \in \mathbb{R}$ とするとき, 次を示せ.

(1) $\operatorname{div}(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}) = \operatorname{div} \boldsymbol{F} + \operatorname{div} \boldsymbol{G}$;
(2) $\operatorname{div}(c\boldsymbol{F}) = c \operatorname{div} \boldsymbol{F}$;
(3) $\operatorname{div}(f\boldsymbol{F}) = f \operatorname{div} \boldsymbol{F} + \nabla f \cdot \boldsymbol{F}$.

問題 3.5.

Ω 上のスカラー場 f に対し, $\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f)$ を示せ.

問題 3.6.

次のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ に対する発散を求めよ.

(1) $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x^2 y, -2xz, 2yz)$
(2) $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (xz^3, -2x^2 yz, 2yz^4)$

問題 3.7.

$f(t, x, y, z) := \dfrac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{4t}\right) \quad ((t, x, y, z) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$ とおく. このとき, $\dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f$ となることを示せ.

現代解析学I 演習問題　(2016 年 5 月 10 日)

問題 4.1.
$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ に対して,

$$\Delta \left(\frac{1}{|(x, y, z)|} \right)$$

を計算せよ.

問題 4.2.
$\mathbb{R}^3$ のベクトル場 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(x, y, z)$ を

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) := (x^2 y, -2xz, 2yz)$$

とおいたとき, $\operatorname{div} \boldsymbol{F}$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$, $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{F})$ を求めよ.

問題 4.3.
次のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ に対する回転を求めよ.

(1) $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x^2 y, -2xz, 2yz)$
(2) $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (xz^3, -2x^2 yz, 2yz^4)$

問題 4.4.
$\boldsymbol{F}$ を Ω 上のベクトル場とするとき, 次を示せ.

(1) $\boldsymbol{F}$ がスカラーポテンシャル f をもてば, $\operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$.
(2) $\boldsymbol{F}$ がベクトルポテンシャル $\boldsymbol{f}$ をもてば, $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$.

問題 4.5.
次の関数 f に対して, ∇f, $D^2 f$, Δf を求めよ.

(1) $f(x, y) = e^{xy} \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2)$
(2) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$
(3) $f(x, y) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R}))$

注意.
配布の演習書について, $\boldsymbol{i} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$, $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$ である. 講義のときには使っていない記号であり, 試験でもこの記号は使わないが, 演習問題を解くうえでは必要になるので, 各自読みかえて計算すること.

現代解析学 I 演習問題　(2016 年 5 月 17 日)

問題 5.1.

$n \geq 3$ をみたす $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\Gamma(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{|\boldsymbol{x}|^{n-2}} = \frac{1}{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{n-2}{2}}} \quad (\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\})$$

とおく. このとき $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ に対して

$$\Delta\Gamma(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_k^2}(\boldsymbol{x}) (= \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}) + \cdots + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_n^2}(\boldsymbol{x})) = 0$$

を示せ.

問題 5.2.

$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\rho(t, \boldsymbol{x}) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4t}\right) \quad (t > 0,\ \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\})$$

とおく. このとき, $t > 0$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(t, \boldsymbol{x}) = \Delta_{\mathbb{R}^n} \rho(t, \boldsymbol{x}) := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_k^2}(t, \boldsymbol{x}) (= \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1^2}(t, \boldsymbol{x}) + \cdots + \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_n^2}(t, \boldsymbol{x}))$$

を示せ.

現代解析学I 演習問題

試験対策用の問題である.

問題 6.1.

$f(x,y) := \log(x^2+y^2)$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ に対して, ∇f, Δf を計算せよ. なお, ∇, Δ はそれぞれ二次元の勾配, Laplacian, すなわち, $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$, $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ である.

問題 6.2.

$$\rho(t,x,y) := \frac{1}{4\pi t}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4t}\right) \quad ((t,x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^2)$$ とおく.

(1) $\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$ を計算せよ.
(2) $\nabla \rho$ を計算せよ. ただし, ∇ は二次元の勾配である.
(3) $\Delta \rho$ を計算せよ. ただし, Δ は二次元の Laplacian である.

問題 6.3.

$$f(x,y,z) := \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\})$$ に対して, ∇f, Δf を計算せよ. なお, ∇, Δ はそれぞれ三次元の勾配, Laplacian である.

問題 6.4.

$$\rho(t,x,y,z) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}}\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}\right) \quad ((t,x,y,z) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^2)$$ とおく.

(1) $\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$ を計算せよ.
(2) $\nabla \rho$ を計算せよ. ただし, ∇ は三次元の勾配である.
(3) $\Delta \rho$ を計算せよ. ただし, Δ は三次元の Laplacian である.

問題 6.5.

$$f(x,y) := \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\}))$$ に対して, ∇f, Δf を計算せよ. なお, ∇, Δ はそれぞれ二次元の勾配, Laplacian である.

現代解析学I 演習問題　(2016 年 5 月 31 日)

問題 7.1.
$C: \boldsymbol{r}(t) = (3t,\, 4t,\, 5t) \quad (0 \le t \le 1)$ としても講義ノートの例 4.1 と同じ曲線を定める. このときに

$$\int_C (x+y+z)\, ds$$

を求めよ.

問題 7.2.
$C: \boldsymbol{r}(t) = (t, t^2, t^3) \quad (0 \le t \le 1)$ としたときに

$$\int_C (3x^2+6y, -14yz, 20xz^2) \cdot d\boldsymbol{r}$$

を求めよ.

問題 7.3.
C を xy 平面上の原点を中心とする半径 3 の左回りの円とするとき

$$\int_C (2x-y+z, x+y-z^2, 3x-2y+4) \cdot d\boldsymbol{r}$$

を求めよ (ヒント: まず曲線 C の表示を求めよ).

現代解析学 I 演習問題　(2016 年 6 月 7 日)

問題 8.1.

$\mathbb{S}^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ を $\boldsymbol{r}(u,v) := (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$ $((u,v) \in [0,\pi] \times [0,2\pi])$ と表示するとき

$$\int_S dS, \quad \int_S \frac{x+y+z}{|(x,y,z)|}\, dS$$

をそれぞれ求めよ (ヒント: 計算する積分はやや複雑ではあるが, 関数の性質をうまく使うとわりと簡単に計算できる).

問題 8.2.

$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4, z \geq 0\}$ を

$$\boldsymbol{r}(u,v) := (2\sin u \cos v, 2\sin u \sin v, 2\cos u) \quad ((u,v) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times [0,2\pi])$$

と表示するとき

$$\int_S (4x, 4y, -2z) \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

を求めよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は S の法線ベクトル $\frac{1}{2}\boldsymbol{x}$ である.

先週の補足 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ $(a \leq t \leq b)$ は弧長パラメータではないとする. このとき C 上の連続関数 $f : C \to \mathbb{R}$ に対して,

$$\int_C f\, dx = \int_a^b f(\boldsymbol{r}(t)) \frac{dx}{dt}(t)\, dt$$

が成り立つ. $\int_C f\, dy$, $\int_C f\, dz$ も同様である.

問題 8.3.

次の線積分を計算せよ.

(1) $\int_C (xy+yz+zx)\, ds, \quad C : \boldsymbol{\varphi}(t) = (t, t^2, 0)$ $(0 \leq t \leq 1)$.

(2) $\int_C (xy+yz+zx)\, dx, \quad C : \boldsymbol{\varphi}(t) = (t, t^2, 0)$ $(0 \leq t \leq 1)$.

(3) $\int_C (x+y+z)\, ds, \quad C$: 原点から $A(12,16,20)$ に向かう線分.

(4) $\int_C (x+y+z)\, dy, \quad C$: 原点から $A(12,16,20)$ に向かう線分.

現代解析学 I 演習問題　(2016 年 6 月 14 日)

問題 9.1.

$\Omega = (0,a)\times(0,b)\times(0,c)$, $\boldsymbol{F} = (F_1,F_2,F_3)$, $\boldsymbol{n} = (n_1,n_2,n_3)$ として

$$\iiint_\Omega \frac{\partial F_2}{\partial y}\,dxdydz = \iint_{\partial\Omega} F_2 n_2\,dS$$

が成り立つことを確かめよ.

問題 9.2.

$B_2^3 := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < 4\}$ とし, $\boldsymbol{F} : \overline{B_2^3} \to \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{F}(x,y,z) := (4x,4y,-2z)$ ($(x,y,z)\in\overline{B_2^3}$) で定める.

(1) $\displaystyle\iiint_{B_2^3} \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,dxdydz$ を計算せよ.

(2) $\displaystyle\iint_{\partial B_2^3} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ を計算せよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は外向き単位法線ベクトルである.

(3) Gauss の発散定理が上記の計算で正しいこと, すなわち

$$\iiint_{B_2^3} \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,dxdydz = \iint_{\partial B_2^3} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

をたしかめよ.

問題 9.3.

$R>0$ に対して $\mathbb{S}_R^2 := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = R^2\}$ とおく. $\boldsymbol{F}(x,y,z) := (x^3,y^3,z^3)$ とおくとき $\displaystyle\iint_{\mathbb{S}_R^2} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ を求めよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は外向き単位法線ベクトルである.

問題 9.4.

$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ を有界領域, $\partial\Omega$ は滑らかとする. f, g を $\overline{\Omega}$ 上連続で滑らかなスカラー場, $\boldsymbol{F}$ を $\overline{\Omega}$ 上連続で滑らかなベクトル場とする. このとき, 次を示せ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は外向き単位法線ベクトルとする.

(1) $\displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{F}\cdot\nabla f\,dx = \int_{\partial\Omega} f\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS - \int_\Omega f\operatorname{div}\boldsymbol{F}\,dx.$

(2) $\displaystyle\int_\Omega (f\Delta g + \nabla f\cdot\nabla g)\,dx = \int_{\partial\Omega} f\nabla g\cdot\boldsymbol{n}\,dS \left(= \int_{\partial\Omega} f\frac{dg}{d\boldsymbol{n}}\,dS\right).$

(3) $\displaystyle\int_\Omega (f\Delta g - g\Delta f)\,dx = \int_{\partial\Omega} (f\nabla g\cdot\boldsymbol{n} - g\nabla f\cdot\boldsymbol{n})\,dS \left(= \int_{\partial\Omega}\left(f\frac{dg}{d\boldsymbol{n}} - g\frac{df}{d\boldsymbol{n}}\right)dS\right)$

問題 9.5.

$n\in\mathbb{N}$, $r>0$ に対して, $B_r^n := \{x\in\mathbb{R}^n : |x|<r\}$ とおく.

(1) $|B_r^n|$ で B_r^n の体積を表すことにすると $n|B_r^n| = \displaystyle\int_{B_r^n} \operatorname{div} x\,dx$ となることを示せ.

(2) $|B_r^n| = \omega_n r^n$ とおく. $\mathbb{S}_r^{n-1} := \{x\in\mathbb{R}^n : |x| = r\}$ とおき, その表面積を $|\mathbb{S}_r^{n-1}|$ と書くことにするとき, $|\mathbb{S}_r^{n-1}| = n\omega_n r^{n-1}$ となることを示せ.

現代解析学I 演習問題 (2016 年 6 月 21 日)

問題 10.1.

$\Omega := (0,a)\times(0,b)$, Q を Ω 上のスカラー場としたとき,

$$\int_{\partial\Omega} Q\,dy = \iint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy$$

となることを確かめよ.

問題 10.2.

Green の定理を用いて, 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_{\partial D}((y-\sin x)\,dx + \cos x\,dy),\quad D = \left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

(2) $\displaystyle\int_{\partial D}((3x+4y)\,dx + (2x-3y)\,dy),\quad D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 4\}$

問題 10.3.

$D\subset\mathbb{R}^2$ を滑らかな境界を持つ領域とするとき $|D| = \displaystyle\int_{\partial\Omega} x\,dy$ を示せ.

問題 10.4.

$a>0$ に対して, asteroid $C: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ で囲まれた部分 D の面積は $\dfrac{3}{8}\pi a^2$ で与えられることをたしかめよ.

問題 10.5.

半径 $r>0$ の 4 次元球の体積, 表面積を求めたい.

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$ を求めよ (ヒント: $x=\sin\theta$ とおく)

(2) 次の積分を求めよ.

$$\int_{B_r^4} dx_1dx_2dx_3dx_4 \qquad B_r^4 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2\le r^2\}$$

(3) 4 次元球の表面積を求めよ (ヒント:演習問題 9.5 を参照せよ. 球の体積がわかれば, 表面積もわかるはず).

問題 10.6.

$\Omega\subset\mathbb{R}^n$ は有界領域で, $\partial\Omega$ は滑らかとし, $0\in\Omega$ とする. このとき,

$$-\iint_{\partial\Omega}\nabla\left(\frac{1}{(n-2)|\boldsymbol{x}|^{n-2}}\right)\cdot\boldsymbol{n}\,dS = |\mathbb{S}^{n-1}|$$

となることを示せ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は Ω の外向き単位法線ベクトル, $\mathbb{S}^{n-1} = \{x\in\mathbb{R}^n : |x|=1\}$ である (ヒント: 講義の例 5.1).

現代解析学I 演習問題　(2016年6月28日)

問題 11.1.

$$\int_C F_2\,dx = \iint_S \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}n_3 - \frac{\partial F_2}{\partial z}n_1\right)dS$$ を

$$S : \boldsymbol{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \quad ((u,v)\in D), \qquad \boldsymbol{n} = \frac{\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|}$$

のときに示せ.

問題 11.2.

$S := \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=9,\ z\geq 0\}$, $C := \{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=9\}$ とおくとき,

$$\iint_S \mathrm{rot}(2x-y+z, x+y-z^2, 3x-2y+4)\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \int_C (2x-y+z, x+y-z^2, 3x-2y+4)\cdot d\boldsymbol{r}$$

を確かめよ.