現代解析学I 第1回小テスト

2016年5月24日 第4時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を認める.
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題1は全員が答えよ. 問題2以降について, 2題以上を選択して答えよ.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, **答えのみを書くこと**. 分母の有理化はしなくてよい.

(1) $\boldsymbol{x} = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{y} = (0, 2, 1)$, $\boldsymbol{z} = (1, -1, 1)$ とする.

(a) $(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{z}$ を求めよ.

(b) $\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z})$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a} = (2, -3, -1)$, $\boldsymbol{b} = (1, 4, -2)$ とする.

(a) $2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$ と同じ向きの単位ベクトル (長さが1のベクトル) を求めよ.

(b) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に直交する単位ベクトルを求めよ.

(3) $\boldsymbol{F}(t) := (e^{-2t}, \log(t^3 + 1), -\cos t)$ とおく.

(a) $\dfrac{d\boldsymbol{F}}{dt}$ を求めよ.

(b) $\dfrac{d^2\boldsymbol{F}}{dt^2}$ を求めよ. ただし, 第2成分は通分をせよ.

(4) $f(x, y, z) := xz^2 - y^3 z$ とおく.

(a) $\nabla f(1, 1, 1)$ を求めよ.

(b) $(1, 1, 1)$ を通る, f の等高面の単位法線ベクトルを求めよ.

(5) $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) := (x^2 y, -2xz^2, y^3 z),$$
$$\boldsymbol{G}(x, y, z) := (x + 3e^y, y - 2\sin z, \cos x + az)$$

とおく.

(a) $\operatorname{div} \boldsymbol{F}$ を求めよ.

(b) すべての $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ に対して, $\operatorname{div} \boldsymbol{G} = 0$ となるように, a を定めよ.

(6) $\boldsymbol{F}(x, y, z) := (2xy, -3xz, yz)$ とおく.

(a) $\operatorname{div} \boldsymbol{F}$ を求めよ.

(b) $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$ を求めよ.

(7) $f(x,y,z) := \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\})$ とおく.

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ を求めよ.

(b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ を求めよ.

(c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ を求めよ.

(d) Δf を求めよ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

問題 1 の答え

(1) (a) $(1,4,3)$

(b) $(-1,5,1)$

(2) (a) $\frac{1}{\sqrt{149}}(7,6,-8)$

(b) $\frac{\pm 1}{\sqrt{230}}(10,3,11)$

(3) (a) $(-2e^{-2t}, \frac{3t^2}{t^3+1}, \sin t)$

(b) $(4e^{-2t}, \frac{-3t^4+6t}{(t^3+1)^2}, \cos t)$

(4) (a) $(1,-3,1)$

(b) $\frac{\pm 1}{\sqrt{11}}(1,-3,1)$

(5) (a) y^3+2xy

(b) $a=-2$

(6) (a) $3y$

(b) $(3x+z, 0, -2x-3z)$

(7) (a) $-\frac{x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}$

(b) $-\frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3} + \frac{3x^2}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5}$

(c) $\frac{3xy}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^5}$

(d) 0

問題 4 の答え

(1) $(\frac{x^2+y^2+z^2}{4t^2} - \frac{3}{2t})$

(2) $\nabla\rho = -\frac{\rho}{2t}(x,y,z)$, $\Delta\rho = (\frac{x^2+y^2+z^2}{4t^2} - \frac{3}{2t})\rho$

問題 5 の答え

(1) $(2-n)|\boldsymbol{x}|^{-n}x_1$

(2) $\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x_1^2} = (2-n)|\boldsymbol{x}|^{-n} - (2-n)n|\boldsymbol{x}|^{-n-2}x_1^2$ である. 同様に他の成分も計算して和をとればよい.

問題 2.

$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$ とする.

(1) $(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z})$ を示せ.

(2) $(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{z} = \det(\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{z})$ を示せ.

問題 3.

開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 上のスカラー場 f とベクトル場 $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$ について, 次の等式をそれぞれ示せ.

(1) $\operatorname{div}(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}) = \operatorname{div} \boldsymbol{F} + \operatorname{div} \boldsymbol{G}$

(2) $\operatorname{div}(f\boldsymbol{F}) = f \operatorname{div} \boldsymbol{F} + \nabla f \cdot \boldsymbol{F}$

問題 4.

$t > 0$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$\rho(t, x, y, z) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4t}\right)$$

とおく.

(1) $\dfrac{\partial \rho}{\partial t}(t, x, y, z) = C(t, x, y, z)\rho(t, x, y, z)$ と書いた時, $C(t, x, y, z)$ を求めよ.

(2) $\nabla \rho$, $\Delta \rho$ をそれぞれ求めよ. ただし, ∇ や Δ は (x, y, z) 変数に対する勾配, Laplacian である.

問題 5.

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ に対して,

$$\Gamma(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{|\boldsymbol{x}|^{n-2}}$$

とおく.

(1) $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial x_1}$ を求めよ.

(2) $-\Delta \Gamma = 0$ となることを示せ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

現代解析学I 第1回追テスト

担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を認める.
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1 は全員が答えよ. 問題 2 以降について, 2 題以上を選択して答えよ.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, **答えのみを書くこと**. 分母の有理化はしなくてよい.

(1) $\boldsymbol{x} = (1, 1, 0)$, $\boldsymbol{y} = (0, -2, 1)$, $\boldsymbol{z} = (-2, 1, 2)$ とする.

(a) $(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{z}$ を求めよ.

(b) $\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z})$ を求めよ.

(2) $\boldsymbol{a} = (2, 3, 1)$, $\boldsymbol{b} = (-1, 2, 1)$ とする.

(a) $3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ と同じ向きの単位ベクトル (長さが 1 のベクトル) を求めよ.

(b) $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に直交する単位ベクトルを求めよ.

(3) $\boldsymbol{F}(t) := (e^{t^2}, \log(t^2 + 1), \sin t)$ とおく.

(a) $\dfrac{d\boldsymbol{F}}{dt}$ を求めよ.

(b) $\dfrac{d^2\boldsymbol{F}}{dt^2}$ を求めよ. ただし, 第 2 成分は通分をせよ.

(4) $f(x, y, z) := x^3 + y^2 z - z^2$ とおく.

(a) $\nabla f(1, 1, 1)$ を求めよ.

(b) $(1, 1, 1)$ を通る, f の等高面の単位法線ベクトルを求めよ.

(5) $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) := (xy^2, -2y^3 z^2, xyz),$$
$$\boldsymbol{G}(x, y, z) := (-x + 3e^y, y - 2\sin z, \cos x + az)$$

とおく.

(a) $\operatorname{div} \boldsymbol{F}$ を求めよ.

(b) すべての $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ に対して, $\operatorname{div} \boldsymbol{G} = 0$ となるように, a を定めよ.

(6) $\boldsymbol{F}(x, y, z) := (2x^2, -3xyz, xz^2)$ とおく.

(a) $\operatorname{div} \boldsymbol{F}$ を求めよ.

(b) $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$ を求めよ.

(7) $f(x,y,z) := \dfrac{e^x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\})$ とおく.

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ を求めよ.

(b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ を求めよ.

(c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ を求めよ.

(d) Δf を求めよ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

問題 2.

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$ とする.

(1) $\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z})\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})\boldsymbol{z}$ を示せ.

(2) $(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{z})\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z})\boldsymbol{x}$ を示せ.

問題 3.

開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 上のスカラー場 f とベクトル場 $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}$ について, 次の等式をそれぞれ示せ. l

(1) $\mathrm{rot}(\boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}) = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{F} + \mathrm{rot}\,\boldsymbol{G}$

(2) $\mathrm{rot}(f\boldsymbol{F}) = f\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F} + \nabla f \times \boldsymbol{F}$

問題 4.

$n \in \mathbb{N}$, $t > 0$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\rho(t, \boldsymbol{x}) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4t}\right)$$

とおく.

(1) $\dfrac{\partial \rho}{\partial t}(t, \boldsymbol{x}) = C(t, \boldsymbol{x})\rho(t, \boldsymbol{x})$ と書いた時, $C(t, \boldsymbol{x})$ を求めよ.

(2) $\nabla\rho$, $\Delta\rho$ をそれぞれ求めよ. ただし, ∇ や Δ は $\boldsymbol{x}$ 変数に対する勾配, Laplacian である.

問題 5.

$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ に対して,

$$\Gamma(\boldsymbol{x}) := \log(x^2 + y^2)$$

とおく.

(1) $\dfrac{\partial \Gamma}{\partial x}$ を求めよ.

(2) $-\Delta\Gamma = 0$ となることを示せ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.