現代解析学I 第2回小テスト

2016 年 7 月 5 日 第 4 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を認める.
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1 は全員が答えよ. 問題 2 以降について, 2 題以上を選択して答えよ.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, **答えのみを書くこと**. 分母の有理化はしなくてよい.

(1) $C : \boldsymbol{r}(t) := (3t^3, 4t^3, 0)$ $(0 \le t \le 2)$ に対して次の問いに答えよ.

(a) 線積分 $\displaystyle\int_C (x+y+z)\,ds$ を求めよ.

(b) 線積分 $\displaystyle\int_C (x+y+z)\,dy$ を求めよ.

(2) 円柱らせん $C : \boldsymbol{r}(t) = (3\cos t, 3\sin t, 2t) \quad (0 \le t \le 2\pi)$ を考える.

(a) 線積分 $\displaystyle\int_C (x+y+z)\,dz$ を求めよ.

(b) 線積分 $\displaystyle\int_C (-y, z, x)\cdot d\boldsymbol{r}$ を求めよ.

(3) $r > 0$ に対して, $B_r^3 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < r^2\}$ とおく. $\boldsymbol{n}$ を ∂B_r^3 の外向き単位法線ベクトルとする.

(a) B_r^3 はどのような図形か？概形を書け. x 軸, y 軸, z 軸は書かなくてよい. r を概形に含めること.

(b) ∂B_r^3 はどのような図形か？概形を書け. x 軸, y 軸, z 軸は書かなくてよい. r を概形に含めること.

(c) $\displaystyle\iint_{\partial B_r^3} (4x + 2\sin y, 4y + e^{z^2}, -2z - \cos(x^3+2y))\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ を求めよ.

(d) $\displaystyle\iint_{\partial B_r^3} (2x^3, 2y^3, 2z^3)\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ を求めよ.

(4) 二つのサイクロイド

$$C_1 : (x,y) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t : 0 \to 2\pi$$

$$C_2 : (x,y) = (t - \sin t, -1 + \cos t), \quad t : 0 \to 2\pi$$

で囲まれた部分 D の面積を求めたい.

(a) C_1, C_2 の概形を書け.

(b) D の面積を求めよ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

問題 1 の答え

(1) (a) 1120
    (b) 896

(2) (a) $8\pi^2$
    (b) 9π

(3) (a) 半径 r, 原点中心の開球
    (b) 半径 r, 原点中心の球面
    (c) $8\pi r^3$
    (d) $\frac{24}{5}\pi r^5$

(4) (a) 二つのサイクロイドではさんだ形
    (b) 6π

問題 2.

$\Omega = (0,a)\times(0,b)\times(0,c)$, $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$, $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$ として

$$\iiint_\Omega \frac{\partial F_3}{\partial z}\,dxdydz = \iint_{\partial\Omega} F_3 n_3\,dS$$

が成り立つことを確かめよ.

問題 3.

$n \in \mathbb{N}$, $r > 0$ に対して, $B_r^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$ とおく.

(1) $|B_r^n|$ で B_r^n の体積を表すことにすると $n|B_r^n| = \displaystyle\int_{B_r^n} \operatorname{div} x\,dx$ となることを示せ.

(2) $|B_r^n| = \omega_n r^n$ とおく. $\mathbb{S}_r^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$ とおき, その表面積を $|\mathbb{S}_r^{n-1}|$ と書くことにするとき, $|\mathbb{S}_r^{n-1}| = n\omega_n r^{n-1}$ となることを示せ.

問題 4.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界領域, $\partial\Omega$ は滑らかとする. f, g を $\overline{\Omega}$ 上連続で滑らかなスカラー場, $\boldsymbol{F}$ を $\overline{\Omega}$ 上連続で滑らかなベクトル場とする. このとき, 次を示せ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は外向き単位法線ベクトルとする.

(1) $\displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{F}\cdot\nabla f\,dx = \int_{\partial\Omega} f\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS - \int_\Omega f \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,dx.$

(2) $\displaystyle\int_\Omega (f\Delta g + \nabla f\cdot\nabla g)\,dx = \int_{\partial\Omega} f\nabla g\cdot\boldsymbol{n}\,dS.$

問題 5.

$a > 0$ に対して, asteroid $C : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ で囲まれた部分 D の面積は $\dfrac{3}{8}\pi a^2$ で与えられることを示せ.

問題 6.

半径 $r > 0$ の 4 次元球の体積, 表面積を求めたい.

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$ を求めよ.

(2) 次の積分を求めよ.

$$\int_{B_r^4} dx_1dx_2dx_3dx_4 \qquad B_r^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 < r^2\}$$

(3) 4 次元球の表面積を求めよ. なお, 問題 3 の結果は用いてよいが, どこで用いたのかを明らかにすること.

以下余白 計算用紙として使ってよい.