更新日時 : 2023.10.10

# 現代解析学 I 演習問題

## (第 1 回) ベクトルの内積と外積

**問題 1.**

$\boldsymbol{x} = (2, -3, -1), \boldsymbol{y} = (1, 4, -2)$ に対して，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角を $\theta$ とするとき，$\cos\theta$ を求めなさい.

**問題 2.**

$\boldsymbol{x} = (2, -3, -1), \boldsymbol{y} = (1, 4, -2)$ に対して，$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{x}$ を計算せよ.

**問題 3.**

$\boldsymbol{x} = (1, 2, 1), \boldsymbol{y} = (2, 1, 1), \boldsymbol{z} = (-1, 1, 2)$ に対して，$(\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{z}$ と $\boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{y} \times \boldsymbol{z})$ を計算せよ.

**問題 4.**

次を示せ.

(1) 任意の $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ に対して，$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} \geq 0$.
(2) 任意の $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^3$ に対して，$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = 0$ であることと $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ であることは同値.
(3) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ に対して，$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$.
(4) 任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ と $c \in \mathbb{R}$ に対して，$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$，$(c\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v} = c(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})$.

**問題 5.**

任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ に対して，中線定理

$$\frac{\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 + \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|^2}{2} = \|\boldsymbol{u}\|^2 + \|\boldsymbol{v}\|^2$$

を示せ．また

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{4}\left(\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\|^2 - \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|^2\right)$$

を示せ.

**問題 6.**

任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ と $c \in \mathbb{R}$ に対して，次を示せ.

(1) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.
(2) $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}$.
(3) $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}$.
(4) $(c\boldsymbol{u}) \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \times (c\boldsymbol{v}) = c(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$.

**問題 7.**

任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ に対して，$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ のそれぞれと直交することを示せ.

**問題 8.**

任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ に対して，$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) \cdot \boldsymbol{u}$ を示せ.

**問題 9.**

任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ に対して，

$$\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\|^2 = \det\begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} & \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \end{pmatrix}$$

を示せ.

**問題 10.**

任意の $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ に対して，$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ が作る平行四辺形の面積を $A$ とするとき

$$A^2 = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} & \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \end{pmatrix}$$

を示せ.

## (第 2 回) 線積分

**問題 11** (教科書の問 1.3.1 を参照のこと．答のみでは採点しない)**.**

曲線 $C$ を点 $(1,2,0)$ と点 $(1,2,3)$ を結ぶ線分とする．ただし，$(1,2,0)$ を始点，$(1,2,3)$ を終点とする．このとき，$\displaystyle\int_C (x^2 - yz + z^2)\, ds$ を求めよ (ヒント: まずは曲線 $C$ の表示を考える．直線のベクトル方程式を思い出そう).

**問題 12.**

曲線 $C$ を原点 $(0,0,0)$ と点 $(1,2,2)$ を結ぶ線分とする．ただし，原点を始点，$(1,2,2)$ を終点とする．このとき，$\displaystyle\int_C (xy + yz + zx)\, ds$ を求めよ.

**問題 13.**

曲線 $C = \left\{ \left( t, \dfrac{t^2}{2}, \dfrac{t^3}{6} \right) : 0 \le t \le 1 \right\}$ に対して $\displaystyle\int_C x^2 yz\, ds$ を求めよ．(ヒント：授業の最後の注意に出てきた公式をつかう)

**問題 14** (4/24 に修正しています)**.**

$a, b > 0$ に対し曲線 $C = \{(a\cos t, a\sin t, bt) : 0 \le t \le \pi\}$ とする．$\displaystyle\int_C (x + y + z)\, ds$ を求めよ.

**問題 15.**

曲線 $C = \left\{ \left( t, \dfrac{t^2}{2}, 0 \right) : 0 \le t \le 1 \right\}$ に対して $\displaystyle\int_C (xy + yz + zx)\, ds$ を求めよ.

## (第 3 回) 線積分と面積分

**問題 16** (教科書の問 1.3.2 を参照のこと．答のみでは採点しない)**.**

ベクトル場 $\boldsymbol{u}(x,y,z) = (y, 2x, -3z)$ と $xy$ 平面上の単位円 $C = \{(x,y,0) : x^2 + y^2 = 1\}$ に対し，ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ の $C$ に沿っての線積分

$$\int_C \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_C (y, 2x, -3z) \cdot d\boldsymbol{r}$$

を求めよ.

**問題 17** (教科書の問 1.4.1 を参照のこと．答のみでは採点しない)**.**

$S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ に対して面積分

$$\iint_S (x^2 + y^2)\, dS$$

を求めよ.

**問題 18.**

ベクトル場 $\boldsymbol{u}(x,y,z) = (2x, \sqrt{y}, 2z)$ と $C = \{(t, t^2, 1-t) : 0 \le t \le 1\}$ に対し，ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ の $C$ に沿っての線積分

$$\int_C \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{r}$$

を求めよ.

**問題 19.**

ベクトル場 $\boldsymbol{u}(x,y,z) = (x, 2(x+z), y)$ に対し，$C$ を原点 $(0,0,0)$ と点 $(1,2,2)$ を結ぶ線分とするとき，ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ の $C$ に沿っての線積分

$$\int_C \boldsymbol{u} \cdot d\boldsymbol{r}$$

を求めよ．

**問題 20.**

$S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \geq 0\}$ に対して面積分

$$\iint_S (x^2+y^2) z \, dS$$

を求めよ (ヒント: 授業の例 1.6 で $\theta$ の範囲をどうするべきか？ ).

**問題 21.**

曲面 $S$ がグラフ $z = \varphi(x,y)$ $((x,y) \in D)$ で表されているとする．すなわち

$$S = \{(x, y, \varphi(x,y)) : (x,y) \in D\}$$

で与えられているとする．このとき，$S$ 上の関数 $f : S \to \mathbb{R}$ に対し

$$\iint_S f \, dS = \iint_D f(x,y,\varphi(x,y)) \sqrt{\varphi_x(x,y)^2 + \varphi_y(x,y)^2 + 1} \, dxdy$$

となることを示せ．

## (第 4 回) 面積分とベクトル場の発散

**問題 22** (教科書の問 1.4.2 を参照のこと．答のみでは採点しない)**.**

ベクトル場 $\boldsymbol{u}(x,y,z) = (x, y, -z)$ と原点中心，半径 2 の球面 $S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 4\}$ に対し，$\boldsymbol{n}$ を $S$ の外向き単位法線ベクトル場とする．このとき，ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ の $S$ 上での面積分

$$\int_S \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} dS$$

を求めよ．

**問題 23.**

$\boldsymbol{u}(x,y,z) = (x^2 y, -2xz, 2yz)$ に対して，$\operatorname{div} \boldsymbol{u}(x,y,z)$ を求めよ．

**問題 24.**

ベクトル場 $\boldsymbol{u}(x,y,z) = (4x, 4y, -2z)$ と $xy$ 平面より上の半球面 $S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 4, z \geq 0\}$ に対し，$\boldsymbol{n}$ を $S$ の外向き単位法線ベクトル場とする．このとき，ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ の $S$ 上での面積分

$$\int_S \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} dS$$

を求めよ．

**問題 25.**

ベクトル場 $\boldsymbol{u}(x,y,z) = (2y, 6xz, 3x)$ と $xy$ 平面より上の円柱の表面 $S = \{(x,y,z) : x^2+y^2 = 4, 0 \leq z \leq 2\}$ に対し，$\boldsymbol{n}$ を $S$ の外向き単位法線ベクトル場とする．このとき，ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ の $S$ 上での面積分

$$\int_S \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} dS$$

を求めよ．

**問題 26.**

$a, b$ を定数，$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ をベクトル場とするとき，

$$\operatorname{div}(a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}) = a \operatorname{div} \boldsymbol{u} + b \operatorname{div} \boldsymbol{v}$$

を示せ.

## (第 5 回) ベクトル場の回転，スカラー場の勾配，Hamilton 演算子

**問題 27.**

$\boldsymbol{u}(x, y, z) = (x^2y, -2xz, 2yz)$ に対して

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{u}, \qquad \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{u})$$

を計算せよ.

**問題 28.**

$\boldsymbol{u}(x, y, z) = (axy - z^3, (a-2)x^2, (1-a)xz^2)$ に対して

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$$

となる $a$ を求めよ.

**問題 29.**

$\boldsymbol{r}(x, y, z) = (x, y, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = |\boldsymbol{r}|$ と $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\nabla r^{\alpha} = \alpha r^{\alpha-2}\boldsymbol{r}$$

を示せ.

**問題 30.**

$a, b$ を定数，$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ をベクトル場とするとき，

$$\operatorname{rot}(a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v}) = a \operatorname{rot} \boldsymbol{u} + b \operatorname{rot} \boldsymbol{v}$$

を示せ.

**問題 31.**

$f$ をスカラー場，$\boldsymbol{u}$ をベクトル場とするとき，次を示せ.

(1) $\nabla \times (\nabla f) = \boldsymbol{0}$,

(2) $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{u}) = 0$,

(3) $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) - \Delta \boldsymbol{u}$, ただし，$\Delta \boldsymbol{u} = (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3)$.

**問題 32.**

$f$ をスカラー場，$\boldsymbol{u}$ をベクトル場とするとき，次を示せ.

(1) $\nabla \cdot (f\boldsymbol{u}) = \nabla f \cdot \boldsymbol{u} + f \nabla \cdot \boldsymbol{u}$,

(2) $\nabla \times (f\boldsymbol{u}) = \nabla f \times \boldsymbol{u} + f \nabla \times \boldsymbol{u}$.

## (第 6 回)Gauss の発散定理

**問題 33** (教科書の問 1.6.1 を参照のこと．答のみでは採点しない)**.**

$a > 0$ を定数とする．$S$ を原点中心で半径 $a$ の球面，すなわち

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$$

とする．Gauss の発散定理を用いて

$$\iint_S (2x\,dydz - x^2z\,dzdx + 3z\,dxdy)$$

を求めよ.

**問題 34.**

$S$ を原点中心で半径 2 の球面，すなわち

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$$

とする．$\boldsymbol{n}$ は $S$ の外向き単位法線ベクトル場とし，

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

とおく．以下の問題を Gauss の発散定理を用いずに計算せよ．

(1) $\displaystyle\iiint_V \mathrm{div}(4x, 4y, -2z)\, dxdydz.$

(2) $\displaystyle\iint_S (4x, 4y, -2z) \cdot \boldsymbol{n}\, dS.$

**問題 35.**

$S$ を座標平面と $x = 2$，$y = 2$，$z = 2$ で囲まれた立方体の表面とするとき

$$\iint_S (x^2 dydz + xy\, dzdx + z\, dxdy)$$

を求めよ．

**問題 36.**

$a > 0$ を定数とする．$S$ を原点中心で半径 $a$ の球面，すなわち

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$$

とする．Gauss の発散定理を用いて

$$\iint_S (x^3, y^3, z^3) \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

を求めよ．ただし，$\boldsymbol{n}$ は $S$ の外向き単位法線ベクトル場とする．

**問題 37** (教科書の演習 1.4 を参照のこと)**.**

$V \subset \mathbb{R}^3$ は有界領域で，境界 $\partial V$ はなめらかとする．$\boldsymbol{n}$ は $\partial V$ の外向き単位法線ベクトル場とする．$f$ を $V$ 上のスカラー場，$\boldsymbol{u}$ を $V$ 上のベクトル場とする．このとき

$$\iiint_V (\nabla f \cdot \boldsymbol{u} + f\, \mathrm{div}\, \boldsymbol{u})\, dxdydz = \iint_{\partial V} f\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

を示せ．

## (第 7 回)Gauss の発散定理とその応用

$V \subset \mathbb{R}^3$ は有界領域で，境界 $\partial V$ はなめらかとする．$\boldsymbol{n}$ は $\partial V$ の外向き単位法線ベクトル場とする．$f, g$ は $\overline{V}$ を含む領域上のスカラー場とする．

**問題 38.**

$V$ 上 $\Delta f = 0$，$\partial V$ 上 $g = 0$ を満たすとする．このとき，

$$\iiint_V \nabla f \cdot \nabla g\, dxdydz = 0$$

を示せ．

**問題 39.**

$V$ 上 $\Delta f = 0$，$\partial V$ 上 $\nabla f \cdot \boldsymbol{n} = 0$ を満たすとする．このとき，

$$\iiint_V \nabla f \cdot \nabla g\, dxdydz = 0$$

を示せ．

**問題 40** (教科書の演習 1.5)**.**
$V$ 上 $\Delta f = 0$，$\partial V$ 上 $f = 0$ を満たすとする．このとき，$\overline{V}$ 上 $f = 0$ を示せ．
なお，$\overline{V}$ 上の連続関数 $h$ が

$$\iiint_V h^2\, dxdydz = 0$$

をみたすなら，$\overline{V}$ 上 $h = 0$ となることは認めてよい．

**問題 41** (cf. 教科書の演習 1.6)**.**
$V$ 上 $\Delta f = 0$，$\partial V$ 上 $\nabla f \cdot \boldsymbol{n} = 0$ を満たすとする．このとき，$\overline{V}$ 上 $f$ は定数となることを示せ．

**問題 42** (教科書の問題 1.6.6)**.**
Green の定理から

$$\iiint_V (f\Delta g - g\Delta f)\, dxdydz = \iint_{\partial V} (f\nabla g \cdot \boldsymbol{n} - g\nabla f \cdot \boldsymbol{n})\, dS$$

が成り立つことがわかっている．
この結果に，$f = f(x), g = g(x), V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a < x < b, 0 < y, z < 1\}$ としたときに，どのような式が得られるかを考察しなさい．

**問題 43** (教科書の問題 1.6.6)**.**
$\boldsymbol{u}$ を $\overline{V}$ を含む領域上のベクトル場とすると

$$\iint_{\partial V} \mathrm{rot}\, \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = 0$$

を示しなさい．

## (第 9 回) 微分方程式の解・逐次近似法

**問題 44.**
任意の $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ に対して，$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ は微分方程式 $y''(x) + y(x) = 0$ を満たすことを確かめよ．また，任意の $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ に対して，$y(x) = c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix}$ も微分方程式 $y''(x) + y(x) = 0$ を満たすことを確かめよ．なお，$i$ は虚数単位である．複素数 $\eta$ に対して，$(e^{\eta x})' = \eta e^{\eta x}$ となることは使ってもよい (Euler の公式を使ってもよい).

**問題 45.**
$a = 0$ でない定数 $a \in \mathbb{R}$ に対して微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} y'(x) = ay(x), \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

を Picard の逐次近似法で解け．

**問題 46.**
定数 $c \in \mathbb{R}$ に対して，$y(x) = cx + \sqrt{c^2 + 1}$ は微分方程式 $y(x) = xy'(x) + \sqrt{(y'(x))^2 + 1}$ を満たすことを確かめよ．また，$y(x) = \sqrt{1 - x^2}$ もまた，微分方程式 $y(x) = xy'(x) + \sqrt{(y'(x))^2 + 1}$ を満たすことを確かめよ．

**問題 47** (6/12 に修正しました)**.**
定数 $c \in \mathbb{R}$ に対して，

$$y(x) = \frac{ce^{\frac{1}{2}x^2}}{1 - ce^{\frac{1}{2}x^2}}, \qquad y(x) = \frac{e^{\frac{1}{2}x^2}}{c - e^{\frac{1}{2}x^2}}$$

はどちらも微分方程式 $y'(x) = xy(x) + x(y(x))^2$ を満たすことを確かめよ．

**問題 48.**

微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} y'(x) = y^2(x), \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

を Picard の逐次近似法で解いたときに，$y_1(x), y_2(x)$ を求めなさい．[1]

## (第 10 回) 求積法 (変数分離形)

**問題 49.**

$\lambda \in \mathbb{R}$ に対して，微分方程式 $y' = \lambda y$ を解け．

**問題 50** (教科書の問 4.3.1 を参照のこと)**.**

微分方程式 $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$ を解け．

**問題 51** (教科書の演習問題 4.1 を参照のこと)**.**

$a, b \in \mathbb{R}$ に対して，微分方程式 $(y-b)y' + (x-a) = 0$ を解け．

**問題 52.**

微分方程式 $y' = \dfrac{x^2}{y^2}$ を解け．

**問題 53.**

微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} e^y y' - x - x^3 = 0, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

を求積法で解け．

**問題 54** (Gronwall の不等式)**.**

$\lambda \in \mathbb{R}$ に対して，関数 $y = y(x)$ は $y' \leq \lambda y$ を満たすとする．このとき，$y(x) \leq y(0)e^{\lambda x}$ が成り立つことを示せ (ヒント：授業の Example 4.10' の解法 3 をまねてみよ．)

**問題 55.**

$p > 1$ に対して，微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} y' = y^p, \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$$

を求積法で解け．解 $y$ は有界とならず，ある $x_0$ に近づくと正の無限大に発散する．$y(x) \to \infty$ $(x \to x_0)$ となる $x_0$ を $y_0$ と $p$ を用いて表しなさい．

## (第 11 回) 求積法 (同次形)

**問題 56** (教科書の問 4.3.2 を参照のこと)**.**

微分方程式 $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$ を解け．

**問題 57** (教科書の演習問題 4.1 を参照のこと)**.**

微分方程式 $x^2 y' = x^2 + xy + y^2$ を解け．

---

[1]課題とはしないが，python(sympy) や mathematica で逐次近似法のプログラムを書けないだろうか考えてみると面白い．

**問題 58** (教科書の問 4.3.3 を参照のこと)**.**

幅が一定 $c$ でまっすぐな川がある．それを $\{(x, y) : 0 < x < c\}$ とする．川の流れは一定で，速度ベクトルが $(0, -a)$ であるとする．川岸の点 $(c, 0)$ からボートを漕ぎだして，原点 $(0, 0)$ を目指すとする．ボートが川の流れに流されつつ，常に原点の方向へ，速さ $b$ でこぐとする．

(1) 原点とボートを結ぶ線分と $x$ 軸とのなす角を $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする．このとき，ボートの速度の $x$ 成分 $\frac{dx}{dt}$，$y$ 成分 $\frac{dy}{dt}$ を求めよ．

(2) ボートが $(x, y)$ にいるとき，$\cos\theta, \sin\theta$ を $x, y$ を用いて表せ．

(3) $\frac{dy}{dx}$ を $x, y$ を用いて表せ．

(4) $x = c$ のとき，$y = 0$ となる解を求めよ．

**問題 59** (教科書の演習問題 4.1 を参照のこと)**.**

微分方程式 $(x^2 - y^2)y' - 2xy = 0$ を解け．

**問題 60** (教科書の演習問題 4.1 を参照のこと)**.**

微分方程式 $(x + y)y' = 1$ を解け．

**問題 61** (教科書の演習問題 4.2 を参照のこと)**.**

曲線 $y = y(x)$ の曲率は $\dfrac{y''(x)}{(1 + (y'(x))^2)^{3/2}}$ で与えられる．曲率が正定数である曲線は円 (の一部) になることを示したい．そのために定数 $r > 0$ に対し，

$$\frac{y''(x)}{(1 + (y'(x))^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{r}$$

を解くことで，曲率が正定数である曲線は円 (の一部) になることを示せ．

## (第 12 回) 求積法 (1 階線形微分方程式)

**問題 62.**

微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} y' - (\sin x)y = 0, \\ \qquad y(0) = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

を求積法で解け．

**問題 63.**

微分方程式 $y' - (\sin x)y = \cos x$ の一般解を求めよ．不定積分はそのまま残しておいてよい．

**問題 64.**

微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} y' - (\sin x)y = \sin x \cos^2 x, \\ \qquad y(0) = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

を求積法で解け．

**問題 65.**

微分方程式 $y' - 2xy = x$ を解け．

**問題 66** (7/3 問題を修正しました)**.**

微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} y' - 2xy = x, \\ \quad y(0) = 1 \end{cases}$$

を求積法で解け．

**問題 67.**

微分方程式 $y' + y = xe^x$ を解け.

## (第 13 回) 求積法 (2 階定数係数線形微分方程式)

**問題 68.**

$a_1(x), a_0(x)$ は与えられた関数とする．微分方程式 $y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ の解 $y_1, y_2$ とスカラー $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対し $y = \alpha y_1 + \beta y_2$ もまた解となることを示せ.

**問題 69.**

微分方程式 $y'' - y' - 12y = 0$ を求積法で解け.

**問題 70.**

微分方程式 $y'' - 2y' + y = 0$ を求積法で解け.

**問題 71.**

微分方程式 $y'' - 4y' + 5y = 0$ を求積法で解け.

**問題 72.**

微分方程式 $y'' - 2y' + y = 3x$ の一般解を求めよ.

**問題 73.**

微分方程式 $y'' - 4y' + 5y = \sin 2x$ の一般解を求めよ.

## (第 14 回) 完全微分方程式

**問題 74** (教科書の問 4.3.7 を参照のこと)**.**

微分方程式 $(x^3 + 2xy)\,dx + (x^2 - y)\,dy = 0$ が完全微分方程式となるかを確かめた上で解け.

**問題 75** (教科書の問 4.3.7 を参照のこと)**.**

微分方程式 $(2x - 2y + 3)\,dx + (-2x + 4y + 1)\,dy = 0$ が完全微分方程式となるかを確かめた上で解け.

**問題 76.**

微分方程式 $(1 + \cos(x + y))\,dx + \cos(x + y)\,dy = 0$ が完全微分方程式となるかを確かめた上で解け.

**問題 77.**

微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} (3x^2y + 8xy^2)\,dx + (x^3 + 8x^2y + 12y^2)\,dy = 0, \\ \hfill y(2) = 1 \end{cases}$$

が完全微分方程式となるかを確かめた上で解け (ヒント：一般解をまずは求めて，そのあとに $y(2) = 1$ をみたすように定数を選ぶ).

**問題 78** (教科書の例 4.20 を参照のこと)**.**

微分方程式 $(xy^2 - y^3)\,dx + (1 - xy^2)\,dy = 0$ に $x^m y^n$ の形の積分因子を探すことにより，完全微分方程式に変形して解け.

**問題 79** (教科書の問 4.3.8 を参照のこと)**.**

微分方程式 $3x^2y\,dx - (x^3 - 4y^3)\,dy = 0$ に $x^m y^n$ の形の積分因子を探すことにより，完全微分方程式に変形して解け.

**問題 80.**

授業の感想をかけ.