円周率はなぜ3.14か？

水野 将司

日本大学理工学部数学科

2013年8月4日

携帯電話の電源は切らないでください!!!

円周率はなぜ3.14なのか?

円周率 π はなぜ 3.14 だろうか? どうやって計算するのか？

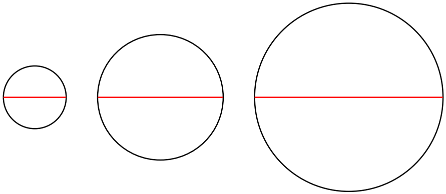
http://stuff.mit.edu/afs/sipb/contrib/pi/pi-billion.txt
(MIT のコンピュータに関する有志学生グループのページ)

3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286
20899862803482534211706798214808651328230664709384460955058223172535940812848
11174502841027019385211055596446229489549303819644288109756659334461284756482
33786783165271201909145648566923460348610454326648213393607260249141273724587
00660631558817488152092096282925409171536436789259036001133053054882046652138
41469519415116094330572703657595919530921861173819326117931051185480744623799
62749567351885752724891227938183011949129833673362440656643086021394946395224
73719070217986094370277053921717629317675238467481846766940513200056812714526
35608277857713427577896091736371787214684409012249534301465495853710507922796
89258923542019956112129021960864034418159813629774771309960518707211349999998
37297804995105973173281609631859502445945534690830264252230825334468503526193
11881710100031378387528865875332083814206171776691473035982534904287554687311
59562863882353787593751957781857780532171226806613001927876611195909216420198
93809525720106548586327886593615338182796823030195203530185296899577362259941
38912497217752834791315155748572424541506959508295331168617278558890750983817
....

円周率はどう決まっているの?

円周率

どんな円についても, $\dfrac{\text{円周の長さ}}{\text{直径}}$ は一定である. そこで, この値を円周率と呼び, π と書くことにしよう.



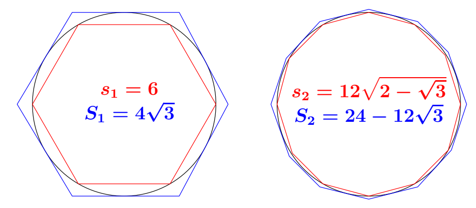
$$\frac{\text{円周の長さ}}{\text{直径}} = \pi$$

半径 1 の円周の長さを 2 で割れば, 円周率がわかるはず!!
$\Longrightarrow$ どうやって, 円周の長さを計算しよう??

円周の長さをどう計算しよう??

Archimedes(アルキメデス) のアイデア

円周の長さは内側と外側に作った正多角形の周の長さに近い.
三角関数を使って, 漸化式を作ろう.

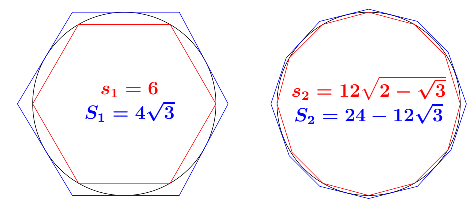


s_n: 半径 1 の円に内接する正 3×2^n 多角形の周の長さ.
S_n: 半径 1 の円に外接する正 3×2^n 多角形の周の長さ.

$$\Longrightarrow s_n \leqq 2\pi \leqq S_n$$

円周の長さに関する漸化式

Archimedes がみつけたこと



s_n: 半径 1 の円に内接する正 3×2^n 多角形の周の長さ.
S_n: 半径 1 の円に外接する正 3×2^n 多角形の周の長さ.

$$\begin{cases} \dfrac{2}{S_{n+1}} = \dfrac{1}{S_n} + \dfrac{1}{s_n}, \\ s_{n+1}^2 = S_{n+1} s_n \end{cases} \iff \begin{cases} S_{n+1} = \dfrac{2}{\frac{1}{S_n} + \frac{1}{s_n}}, \\ s_{n+1} = \sqrt{S_{n+1} s_n} \end{cases} \tag{1}$$

計算してみよう

$$\begin{cases} \dfrac{2}{S_{n+1}} = \dfrac{1}{S_n} + \dfrac{1}{s_n}, \\ s_{n+1}^2 = S_{n+1}s_n \end{cases} \iff \begin{cases} S_{n+1} = \dfrac{2}{\frac{1}{S_n} + \frac{1}{s_n}}, \\ s_{n+1} = \sqrt{S_{n+1}s_n} \end{cases} \tag{1}$$

$n = 1$ のときは, 正 6 角形. $s_1 = 6$, $S_1 = 4\sqrt{3} = 6.9282$

$$S_2 = \frac{2}{\frac{1}{S_1} + \frac{1}{s_1}} = \frac{2}{\frac{1}{6.9282} + \frac{1}{6}} = 2 \div (1 \div 6.9282 + 1 \div 6) = 6.4310$$

$$s_2 = \sqrt{6.4310 \times 6} = 6.2117$$

$s_2 \leqq 2\pi \leqq S_2$ だったから

$$3.10585 = \frac{s_2}{2} \leqq \pi \leqq \frac{S_2}{2} = 3.4641$$

計算の結果

n	s_n	S_n	π の評価
$\mathbf{1}$	$\mathbf{6}$	$\mathbf{6.9282}$	$\mathbf{3.0000 \leqq \pi \leqq 3.4641}$
$\mathbf{2}$	$\mathbf{6.2117}$	$\mathbf{6.4310}$	$\mathbf{3.1058 \leqq \pi \leqq 3.2155}$
$\mathbf{3}$	$\mathbf{6.2654}$	$\mathbf{6.3197}$	$\mathbf{3.1327 \leqq \pi \leqq 3.1598}$
$\mathbf{4}$	$\mathbf{6.2789}$	$\mathbf{6.2926}$	$\mathbf{3.1394 \leqq \pi \leqq 3.1463}$
$\mathbf{5}$	$\mathbf{6.2830}$	$\mathbf{6.2873}$	$\mathbf{3.1415 \leqq \pi \leqq 3.1436}$

計算結果からの考察

$n = 3$(正 24 角形) で円周率が「およそ $\mathbf{3.1}$」とわかる.

$n = 5$(正 96 角形) で円周率が「およそ $\mathbf{3.14}$」とわかる.

もう少し頑張ってみると...(コンピュータに計算してもらうと)

$n = 7$(正 384 角形) で円周率が「およそ $\mathbf{3.141}$」とわかる.

$n = 9$(正 1536 角形) で円周率が「およそ $\mathbf{3.14159}$」とわかる.

$n = 11$(正 6144 角形) で円周率が「およそ $\mathbf{3.141592}$」とわかる.

$n = 13$(正 24576 角形) で円周率が「およそ $\mathbf{3.1415926}$」とわかる.

数学科ではこのことから何を学ぶか?

- コンピュータはどこまで正しいのだろうか？
  - この計算はどこまで正しいのだろうか？
  - 割り算や根号を計算するときの誤差をどのように評価するのだろうか？
- どのようにしてこれらの計算をコンピュータにさせればよいだろうか？
  - 計算の方法をどうやってコンピュータに伝えるか？
  - どうやったらコンピュータはラクをできるか？
- s_n や S_n は本当に円周率に近づいているのだろうか？
  - そもそも, 円周の長さはどうやって定めるの？(答え: 極限)
  - 極限とは何だろう？(答え: 実数)
  - 実数とは何だろう？有理数とはどこが違うのだろう？

日大理工数学科ではこれらのことが学べます!!