円周率はなぜ 3.14 か？

水野 将司 (日本大学理工学部数学科)

1. 円周率はなぜ 3.14 なのか?

2003 年に東大の大学入試で次が出題されました.

円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ.

当時の受験生は相当驚いたことでしょう. 問題の意味はわかっても, 何をすればいいのかわからなかった受験生も多かったことでしょう. ニュースでも話題になり, 社会的にも驚きの問題として取り上げられました.

さて, この問題, どうやって証明すればよいでしょうか？といっても, この問題はあまりに有名になってしまったので, どうやればよいか知っている人もいるかと思います. そこで, もう一歩踏み込んで,

円周率はなぜ「およそ 3.14」なのか？

を考えてみたいと思います.

2. 円周率はどう決まっているのか？

円周率を計算するためには, そもそも円周率がどのように決まっていたかを確認しましょう.

定義 1 (円周率)**.**

どんな円についても, $\dfrac{\text{円周の長さ}}{\text{直径}}$ は一定である[1]. そこで, この値を**円周率**と呼び, π と書くことにする.

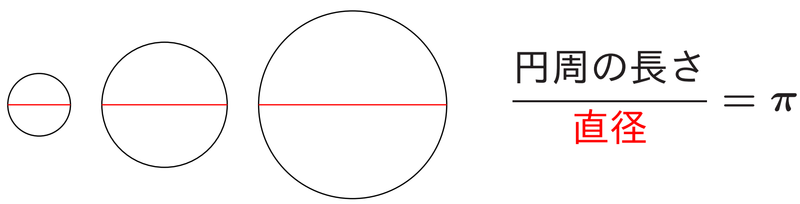

図 1. 円周率の定め方

そこで, 半径を 1 にとれば, 円周の長さは 2π となります. だから, 半径 1 の円の円周の長さを求めれば, 円周率を求めることができます. では, どうやって円周の長さを求めればよいのでしょうか？

[1]すべての円が相似となるからです.

3. 円周の長さをどうやって計算するか？

半径 1 の円周の長さを求めるために，Archimedes(アルキメデス, BC287–BC212) は, 円周を正多角形で近似することを考えました. 多角形の辺の数を増やせば多角形の周の長さが円周の長さに近づくということは自然な発想でしょう. そこで, 正 6 角形, 正 12 角形, 正 24 角形,... と辺の数を倍々にしていったときに, 円に内接, 外接する正多角形がどのように変化するか考えてみます.

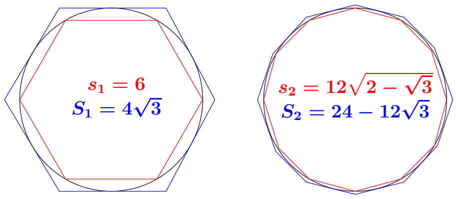

図 2. 円に内接, 外接する正 6 角形, 正 12 角形とその周の長さ

自然数 n に対して s_n を「半径 1 の円に内接する正 3×2^n 角形の周の長さ」, S_n を「半径 1 の円に外接する正 3×2^n 角形の周の長さ」とします (図 2 を参照). s_1 は半径 1 の円に内接する正 6 角形の周の長さ, S_1 は半径 1 の円に外接する正 6 角形の周の長さです. このとき, 少し計算することで, $s_1 = 6$, $S_1 = 4\sqrt{3}$ となることがわかります. 詳しくは付記をみてください.

Archimedes は s_n と S_n, s_{n+1}, S_{n+1} に対して, 次の漸化式が成り立つことをみつけました.

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{2}{S_{n+1}} = \dfrac{1}{S_n} + \dfrac{1}{s_n}, \\ s_{n+1}^2 = S_{n+1} s_n \end{cases}$$

(1) の第 1 式から, S_1 と s_1 がわかっているので, S_2 を求めることができます. 次に S_2 と s_1 から (1) の第 2 式を使うことで, s_2 を求めることができます. よって, s_2 と S_2 を求めることができたので, (1) の第 1 式を再び用いることで S_3 を求めることができ, 以下くりかえしていけば, $s_1, s_2, s_3, \ldots$ と $S_1, S_2, S_3, \ldots$ を求めることができます. s_n が「半径 1 の円に内接する多角形の周の長さ」, S_n が「半径 1 の円に外接する多角形」だったことを使うと

$$s_n \leqq 2\pi \leqq S_n$$

がわかります. よって, 2 でわることにより

$$(2) \qquad \frac{s_n}{2} \leqq \pi \leqq \frac{S_n}{2}$$

が得られます. この式 (2) と (1) を用いることで, 円周率を計算してみましょう.

(1) を変形すると

$$(3) \qquad \begin{cases} S_{n+1} = \dfrac{2}{\frac{1}{S_n} + \frac{1}{s_n}}, \\ s_{n+1} = \sqrt{S_{n+1} s_n} \end{cases}$$

となります. そこで, この式と $s_1 = 6$, $S_1 = 4\sqrt{3}$ を用いて, 電卓を使って s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 と S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 を求めてみてください. その結果を使って, 円周率がどのくらいにな

るか (2) を用いて評価式を作ってみてください. ただし, 今日の計算では, 小数第 4 位までとし, 第 5 位については切り捨てにしても四捨五入にしてもどちらでもよいです. 次ページの表の空欄に, 電卓で計算した数値を入れてみてください. また, コンピュータプログラミングが得意な人は, プログラミングして, $n \geqq 6$ についても計算してみてください.

n	s_n	S_n	πの評価
1	6.0000	6.9282	$3.0000 \leqq \pi \leqq 3.4641$
2			
3			
4			
5			

4. 数学科はこのことから何を学ぶか?

この計算を大学の数学科の講義でやるか？というと, 実際はやらないことが多いです[2]. では, この計算から数学科では何を学ぶのでしょうか？

4.1. コンピュータはどこまで正しいのでしょうか?. この計算を電卓を使って計算するためには, 割り算やら根号の計算やらをする必要があります. しかし, 割り算や根号の計算は無限小数になり得るがために誤差が発生しやすくなります[3]. この誤差をどのように計算, 評価すればよいのでしょうか？この**誤差評価は数学を勉強することで考えることができます.** 例えば, 薬の調剤をするときにその割合をコンピュータを使って計算したとしましょう. このときにコンピュータの誤差を評価できなかったらどうなるでしょうか？誤差が発生して調剤してしまうことで命にかかわる重大なミスが発生することもありえます. それゆえコンピュータの計算でどれだけ誤差がでるかを調べることは大切なのです.

4.2. どのようにしてこれらの計算をコンピュータにさせればよいのでしょうか?. この計算をコンピュータで計算する, つまりプログラミングして計算させるにはどのようにプログラミングすればよいでしょうか？そのためには, 計算のアルゴリズムをしっかりと理解して, 具体的な計算方法を文字を使って抽象化して, コンピュータに伝える必要があります. また, どのように計算させたらコンピュータが早く計算できるかを考える必要があります. この「早く計算できる」の**速さを評価するのは数学が必要になります.**

4.3. s_n や S_n は本当に円周率 (の 2 倍) に近づいているのでしょうか?. s_n や S_n を計算すると, たしかに $6.28318530717959 \cong 2\pi$ に近づいているように見えます. しかし, 本当に円周率に近づいているのでしょうか？「図 2 をみれば明らかではないか!」と思うかもしれま

[2]教育学の講義 (中学や高校の教員免許を取るための講義) でこのような計算をすることがあります.

[3]たとえば, $1 \div 3 \times 3$ や $\sqrt{1.00000000001}$ を電卓で計算させてみるとわかります.

せんが, 図 2 は本当に正しい図なのでしょうか？[4]もっというと, **円周率の定義に出てきた「円周の長さ」はどうやって決めればよいのでしょうか？**まがった曲線の長さを定義しようと思ったら, 素朴に考えると, 細かく区切っておいてそれぞれの区切った長さを足し算すればよいのですが, このときに**極限**がでてきます[5]. ですから極限をしっかり理解する必要があるのですが, そのためには「極限が何か？」 を考えることになり, 結果として, **実数と有理数の違いは何か？**について取り組む必要があります. 実数と有理数の違いは**大学の微分積分学の最初のテーマになります.**

これらの話題はどれも日本大学理工学部数学科で勉強する内容です. このミニ講義で数学科に興味を持って頂けたら幸いです.

付記 A. **Archimedes の見つけた漸化式の導出**

Archemedes がみつけた漸化式 (1) は三角関数に対する倍角の公式を知っていれば導出できます. 導出するために, そもそも正多角形の周の長さ s_n と S_n をどうやって求めるか考えてみましょう. 正多角形ですから, 一辺の長さを求めてしまえば, あとは辺の数をかけ算することで周の長さを求めることができます. まず, $n = 1$, つまり s_1 と S_1 をどう求めるか考えてみます.

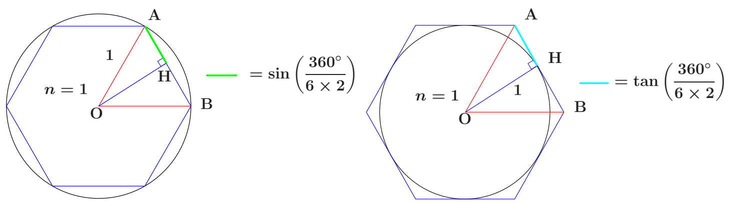

図 3. 内接多角形と外接多角形の周の長さ

s_1 や S_1 を求めるために, 各頂点と円の中心 O を結ぶ補助線を考えます. このとき, 円の中心 O と 2 頂点 (図 3 では AB) からなる 6 つの二等辺三角形はすべて合同になるので, 頂角は $\dfrac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ になります. さらに, 円の中心 O から二等辺三角形の底辺へ垂線をひき, 底辺との交点を H とすると, $AB = 2AH$ となることがわかります.

円に内接する場合は $OA = 1$ ですから, $AH = \sin\left(\dfrac{60^\circ}{2}\right)$ となるので,

$$s_1 = 6 \times AB = 6 \times 2 \times AH = 6 \times 2 \times \sin\left(\frac{60^\circ}{2}\right) = 6$$

がわかります. ここで, $6 = 3 \times 2^1$ は辺の数[6], $60^\circ = \dfrac{60^\circ}{3 \times 2^1}$ は 360° を辺の数で割り算していたことに注意すると

$$s_n = 3 \times 2^n \times 2 \times \sin\left(\frac{360^\circ}{2 \times 3 \times 2^n}\right) = 6 \times 2^n \times \sin\left(\frac{60^\circ}{2^n}\right) \tag{4}$$

となることがわかります.

---

[4]少しイイカゲンに書いてあるので**本当に正しくありません.**

[5]正確には積分を使って長さを定義します.

[6]2^1 としているのは $n = 1$ であることを強調するためです.

円に外接する場合は $OH=1$ ですから, $AH=\tan\left(\frac{60^\circ}{2}\right)$ となるので,

$$S_1 = 6\times AB = 6\times 2\times AH = 6\times 2\times\tan\left(\frac{60^\circ}{2}\right) = 4\sqrt{3}$$

がわかります. さきほどと同様に考えると

$$S_n = 3\times 2^n\times 2\times\tan\left(\frac{360^\circ}{2\times 3\times 2^n}\right) = 6\times 2^n\times\tan\left(\frac{60^\circ}{2^n}\right) \tag{5}$$

となることがわかります.

最後に漸化式 (1), (2) を証明しましょう. (1) の右辺は (4), (5) と倍角の公式

$$\cos\left(\frac{60^\circ}{2^n}\right) = 2\cos^2\left(\frac{60^\circ}{2^{n+1}}\right) - 1,\quad \sin\left(\frac{60^\circ}{2^n}\right) = 2\sin\left(\frac{60^\circ}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{60^\circ}{2^{n+1}}\right)$$

を用いると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{S_n}+\frac{1}{s_n} &= \frac{1}{6\times 2^n\tan\left(\frac{60^\circ}{2^n}\right)} + \frac{1}{6\times 2^n\sin\left(\frac{60^\circ}{2^n}\right)}\\
&= \frac{\cos\left(\frac{60^\circ}{2^n}\right)}{6\times 2^n\sin\left(\frac{60^\circ}{2^n}\right)} + \frac{1}{6\times 2^n\sin\left(\frac{60^\circ}{2^n}\right)}\\
&= \frac{\cos\left(\frac{60^\circ}{2^n}\right)+1}{6\times 2^n\sin\left(\frac{60^\circ}{2^n}\right)}\\
&= \frac{2\cos^2\left(\frac{60^\circ}{2^{n+1}}\right)}{6\times 2^{n+1}\sin\left(\frac{60^\circ}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{60^\circ}{2^{n+1}}\right)}\\
&= \frac{2}{6\times 2^{n+1}\tan\left(\frac{60^\circ}{2^{n+1}}\right)} = \frac{2}{S_{n+1}}
\end{aligned}$$

となります. これで (1) が証明できました. また, (2) の右辺は sin に関する倍角の公式を用いれば

$$\begin{aligned}
S_{n+1}s_n &= \left(6\times 2^{n+1}\tan\left(\frac{60^\circ}{2^{n+1}}\right)\right)\left(6\times 2^n\sin\left(\frac{60^\circ}{2^n}\right)\right)\\
&= \frac{2(6\times 2^n)^2\sin\left(\frac{60^\circ}{2^{n+1}}\right)\sin\left(\frac{60^\circ}{2^n}\right)}{\cos\left(\frac{60^\circ}{2^{n+1}}\right)}\\
&= \frac{(6\times 2^{n+1})^2\sin^2\left(\frac{60^\circ}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{60^\circ}{2^{n+1}}\right)}{\cos\left(\frac{60^\circ}{2^{n+1}}\right)}\\
&= \left(6\times 2^{n+1}\sin\left(\frac{60^\circ}{2^{n+1}}\right)\right)^2 = s_{n+1}^2
\end{aligned}$$

となります. よって (2) が証明できました.

参考文献

[1] 上野 健爾, 「円周率 π をめぐって」, 日本評論社, 1999.

[2] ジャン=ポール ドゥラエ (Jean-Paul Delahaye), 畑 政義 訳, 「π – 魅惑の数」, 朝倉書店, 2001.

[3] 堀場 芳数, 「円周率 π の不思議: アルキメデスからコンピュータまで」, 講談社, 1989.