等周問題と円周率
–一番大きな図形と不等式–

水野 将司

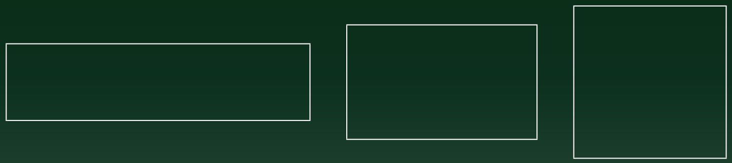
日本大学理工学部数学科

2015 年 8 月 1 日

長方形における等周問題

長方形における等周問題

周の長さ L の長方形で面積 A を最大にするものは何か？



定理 1 周の長さ L の長方形で面積 A を最大にするものは正方形

長方形における等周不等式

定理 1 周の長さ L の長方形で面積 A を最大にするものは正方形

- 正方形の一辺の長さは $\dfrac{1}{4}L$
- 正方形の面積は $\dfrac{1}{4}L \times \dfrac{1}{4}L = \dfrac{1}{16}L^2$

定理 2 長方形における等周不等式

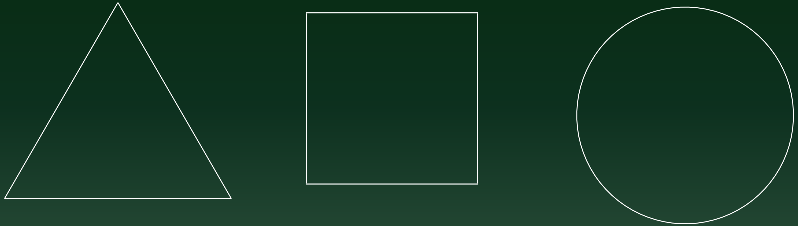
周の長さ L の長方形の面積を A とすると

$$A \leqq \frac{1}{16}L^2$$

平面図形における等周問題

平面図形における等周問題

周の長さ L の平面図形で面積 A を最大にするものは何か？



定理 3 周の長さ L の平面図形で面積 A を最大にするものは**円**

平面図形における等周不等式

定理 3 周の長さ L の平面図形で面積 A を最大にするものは円

- 円の半径は $r = \dfrac{1}{2\pi}L$
- 円の面積は $\pi r^2 = \dfrac{1}{4\pi}L^2$

定理 4 平面図形における等周不等式

周の長さ L の平面図形の面積を A とすると

$$A \leqq \frac{1}{4\pi}L^2$$

等周不等式と円周率

定理 4 平面図形における等周不等式

周の長さ L の平面図形の面積を A とすると

$$A \leqq \frac{1}{4\pi} L^2$$

等周不等式で両辺に π をかけて A でわると

$$\pi \leqq \frac{L^2}{4A}$$

が得られる. これをもとに, 円周率を近似してみよう.

命題 5

一辺が 1 の正 n 角形の面積は $n \div \left(4\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right)$

命題: 正しいかな??

命題 5

一辺が 1 の正 n 角形の面積は $n \div \left(4\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\right)$

- 一辺が 1 の正方形の面積

$$4 \div \left(4\tan\left(\frac{180^\circ}{4}\right)\right) = \frac{1}{\tan(45^\circ)} = 1$$

- 一辺が 1 の正三角形の面積

$$3 \div \left(4\tan\left(\frac{180^\circ}{3}\right)\right) = 3 \div (4\tan(60^\circ))$$
$$= 3 \div (4 \times 1.7321) = 0.4330$$

表をつくってみよう

材料

周長 L の平面図形の面積を A とすると $\pi \leqq \dfrac{L^2}{4A}$

一辺が 1 の正 n 角形の面積は $n \div \left(4\tan\left(\dfrac{180^\circ}{n}\right)\right)$

	$\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$	面積 A	$4A$	周長 L	L^2	$\dfrac{L^2}{4A}$
正三角形	1.7321	0.4330	1.7320	3	9	5.1963
正方形	1	1	4	4	16	4
正六角形	0.57735	2.5981	10.392	6	36	3.4641
正 180 角形	0.01746	2577.3	10309	180	32400	3.1428

- 正三角形からわかること $\pi \leqq 5.2$
- 正方形からわかること $\pi \leqq 4$

大問題

等周不等式は正しいのか？

周の長さ L の平面図形の面積を A とすると

$$A \leq \frac{1}{4\pi} L^2$$

は本当に正しいのだろうか？どうやって示すのか??

最大値, 最小値を求めるには微分積分
ただし, 無限次元 (変数が無限個ある!!) での微分積分

数学科では何を学ぶか？

- 高校での微分積分 17 世紀後半から 18 世紀の数学 (古典的)
- 大学での微分積分 19 世紀の数学 (近代的)
- 等周不等式の証明 20 世紀初頭の数学 (現代的)

平面図形における等周不等式

周の長さ L の平面図形の面積を A とすると

$$A \leqq \frac{1}{4\pi} L^2$$

みかけはあたりまえっぽいかもしれないが, 証明はけっこうたいへん...

日大理工数学科ではこれらのことが学べます!!