等周問題と円周率 –一番大きな図形と不等式–

水野 将司 (日本大学理工学部数学科)

「周の長さが一定の平面図形で面積が最も大きくなる図形を求めよ」という問題を等周問題といいます. 文字を使って問題を定式化すると

周の長さ L の平面図形で面積 A を最大にするものは何か?

となります. 平面図形をすべて考えるのは少し難しいので, まずは長方形に話を限定して, 等周問題とそこからわかることを考えてみます.

1. 長方形における等周問題

「周の長さ L の長方形で面積 A を最大にするものは何か?」を考えてみます. この問題は, 二次関数の応用で考えたことがあるかもしれません. 定理としてまとめましょう.

定理 1 (長方形における等周問題)**.**
周の長さ L の長方形で面積 A を最大にするものは正方形である.

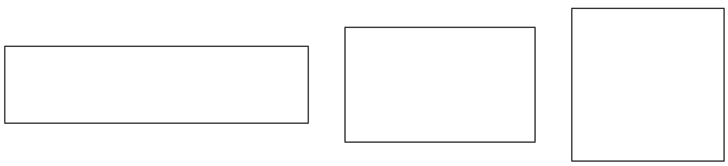

図 1. 長方形における等周問題: どれが一番面積が大きい?

定理 1の証明を, かなり丁寧に書いてみます. 大学の教科書のような書き方で書いてみました. 文体も変えてあるうえに, 説明の文章が多くて堅苦しいと思うかもしれませんが, じっくりと読んでみてください. なお, □ は証明終了の意味です. 「QED」とか, 「証明終」とかと同じです.

定理 1 の証明.
長方形の縦の長さを x, 横の長さを y とすると

$$x > 0,\ y > 0, \tag{1}$$
$$2(x+y) = L, \tag{2}$$
$$xy = A \tag{3}$$

が得られる. (2) より $y = \dfrac{L-2x}{2}$ だから

$$A = \frac{x}{2}(L-2x) = -\left(x - \frac{L}{4}\right)^2 + \frac{1}{16}L^2 \tag{4}$$

となる. また, (1) と (2) より $0 < x < \dfrac{L-2y}{2} < \dfrac{L}{2}$ となるので, A の最大値は (4) より, $x = \dfrac{L}{4}$ のときに $A = \dfrac{1}{16}L^2$ となる. このとき, (2) より $y = \dfrac{L - 2\frac{L}{4}}{2} = \dfrac{L}{4}$ となるので, $x = y = \dfrac{L}{4}$ のとき, A は最大値 $\dfrac{L^2}{16}$ をとる. つまり, 正方形のときに A は最大値 $\dfrac{L^2}{16}$ をとる. $\square$

定理 1 の証明でもわかりますが, 周の長さが L の正方形の一辺の長さは $\dfrac{L}{4}$, 面積は $\left(\dfrac{L}{4}\right)^2 = \dfrac{1}{16}L^2$ となるので

$$A \leqq \frac{1}{16}L^2 \tag{5}$$

が得られます. (5) を長方形における等周不等式といいます.

定理 2 (長方形における等周不等式)**.**
周の長さ L の長方形の面積 A とすると

$$A \leqq \frac{1}{16}L^2$$

が成り立つ.

2. 平面図形における等周問題

もとの問題に戻って「周の長さ L の平面図形で面積 A を最大にするものは何か？」を考えてみます. この問題は, 次の図 2 をみてみると, なんとなくですが, 円の面積が大きいように見えます.

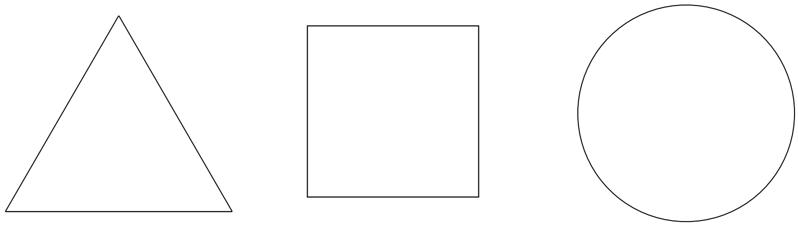

図 2. 平面図形における等周問題: どれが一番面積が大きい？

定理 3 (平面図形における等周問題)**.**
周の長さ L の平面図形で面積 A を最大にするものは円である.

とりあえず, 定理 3 はみとめて, 長方形のときにやった考察をしてみます. 周の長さが L の円の半径は $\dfrac{L}{2\pi}$ となりますから, 円の面積は $\pi\left(\dfrac{L}{2\pi}\right)^2=\dfrac{1}{4\pi}L^2$ となります. 従って

$$A \leqq \frac{1}{4\pi}L^2 \tag{6}$$

が得られます. (6) を平面図形における等周不等式といいます. $\dfrac{1}{16} \leqq \dfrac{1}{4\pi}$ ですから, 長方形のときより, 面積の最大値が大きくなっていることに注意しましょう.

定理 4 (平面図形における等周不等式)**.**
周の長さ L の平面図形の面積を A とすると

$$A \leqq \frac{1}{4\pi}L^2$$

が成り立つ.

等周不等式 (6) で両辺に $\dfrac{\pi}{A}$ をかけると

$$\pi \leqq \frac{L^2}{4A} \tag{7}$$

が得られます. つまり, どんな平面図形においても, 周の長さと面積には (7) の不等式が成り立ちます. このことから, **平面図形の周の長さと面積が求められれば, 円周率を評価することができます.**

3. 円周率を近似する

一辺が 1 の正方形の周の長さは 4, 面積は 1 ですから, (7) に代入すると

$$\pi \leqq \frac{4^2}{4 \times 1} = 4,$$

つまり, **円周率は 4 以下となることがわかります.**[1] そこで, いろいろな正多角形と等周不等式を用いて, 円周率を近似してみましょう.

命題 5.
自然数 n に対して, 1 辺が 1 の正 n 角形の面積は

$$n \times \frac{1}{4\tan\left(\frac{180°}{n}\right)} \tag{8}$$

で与えられる.

命題 5 の証明はあとでやることにして, まずは正しいかどうかを特別な場合で確認してみます. $n = 4$, つまり 1 辺が 1 の正方形の場合は面積が 1 であることはすぐわかりますが, (8) で $n = 4$ を代入してみると

$$4 \times \frac{1}{4\tan\left(\frac{180°}{4}\right)} = \frac{4}{4\tan(45°)} = 1$$

となり, 命題 5 が正方形のときは間違っていないことがわかります.

$n = 3$ のときは正三角形となり, その面積は

$$3 \times \frac{1}{4\tan\left(\frac{180°}{3}\right)} = \frac{3}{4\tan(60°)} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$n = 6$ のときは正六角形となり, その面積は

$$6 \times \frac{1}{4\tan\left(\frac{180°}{6}\right)} = \frac{6}{4\tan(30°)} = \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

となります. 周の長さは辺の数と同じですから, まとめてみると, 最後のページにある表 1 のようになります. 等周不等式を思い出すと, 正三角形のときに $\pi \leqq 5.1963$, 正方形のときに $\pi \leqq 4$ がわかります. 数学 I の教科書を見れば, tan の表がのっていますから, 命題 5 を用いれば, 正多角形についても $\dfrac{L^2}{4A}$ が求められるはずです. ミニ講義では, 正 180

[1] $\pi = 3.14\cdots$ があたりまえと思っているなら, よーく考えてみてください. 円周率を求める作業をしたことがあるでしょうか？小学校の授業で円周率はおよそ 3.14 であることを学んだと思いますが, どうやって正しいことを確認すればよいのでしょうか？

角形を取り上げますが, 他の多角形についても考えてみてください. なお, スマートフォンを使うと tan の値が求められることがありますが, 1° と 1 rad(ラジアン) のどちらの単位を使うかで答えが大きく違ってしまいますので注意してください.

4. 残った問題, さらなる問題

円周率の近似計算において, その本質は定理 4 の等周不等式にあります. 等周不等式がわかれば, 定理 3 の等周問題の答えも (部分的にですが) 与えています. 実際に, (6) で円の場合は等号が成立するわけですから, 等周不等式が証明できれば, 円が等周問題の解になっていることがわかります.[2] 等周不等式を示すには (7) の $\pi \leqq \dfrac{L^2}{4A}$ を示せばいいことに注目すると, 「すべての平面図形で $\dfrac{L^2}{4A}$ の最小値は π である. 」というわけですから, 微分積分を用いれば最小値を求められるかもと思えてきます. 実際にこのアイデアは正しいのですが, 高校で学ぶ「一変数の微分積分」ではなくて, 無限個の変数をもつ世界での微分積分 (無限次元での微分積分) になります. そして, 無限次元での微分積分を考えるためには, 高校までの微分積分がなぜ成り立つのか？を最初 (実数とは何か？) から組み立て直さなければならなくなりました.

高校での微分積分	17 世紀後半から 18 世紀の数学 (古典的)
大学での微分積分	19 世紀の数学 (近代的)
等周不等式の証明	20 世紀初頭の数学 (現代的)

表 2. 高校の数学, 大学の (数学科の) 数学, 等周不等式の証明の歴史

大学 1, 2 年生では, 表 2 でいうところの近代の数学を主に学びます. そして, 高校数学で学ぶ「微分と積分は互いに逆の演算である (微分積分学の基本定理)」をきちんと証明することを最初の目標にします.[3] そして, この等周不等式の証明は, これらの大学の数学をもとにして証明ができるものです.

---

[2]部分的といっているのは, 「答えが円しかないか？」ということに答えられていないということです.

[3]微分は速さを求める計算, 積分は面積を求める計算というのは聞いたことがあるかもしれません. Newton や Leibniz の主張した微分積分学の基本定理とは, 「速さを求めることと面積を求めることは互いに逆の演算である」ということです. こう考えてみると, いかに非自明な主張であるかがわかると思います.

日大理工の数学科では, この計算をコンピュータを用いて計算することや, 等周不等式を証明することなど, 計算することとその理論を学ぶことの両方のスキルを勉強することができます, この話に興味を持たれた方は, 是非, 日大理工の数学科を志願して頂ければ幸いです.

付記 A. 命題 5 の証明

証明していなかった命題 5 の証明を考えてみましょう.

命題 5.
自然数 n に対して, 1 辺が 1 の正 n 角形の面積は

$$n \times \frac{1}{4\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)} \tag{9}$$

で与えられる.

これを考えるためには, 正多角形に対する外接円を考えてみるとよいでしょう. 外接円とその中心から頂点に向けて補助線を引いてみると, その補助線によって得られる n 個の三角形の面積を求めればよいことがわかります (図 3 を参照).

図 3. 正三角形と正方形に対する外接円

命題 5 の証明.
正多角形に外接する円の半径を r とすれば, 正多角形の面積 A は

$$A = n\left(\frac{r^2}{2}\sin\left(\frac{360^\circ}{n}\right)\right) = nr^2\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \tag{10}$$

で求められる. 最後の等式は sin に対する倍角の公式を用いた.

r を n を用いて表すことを考える. 外接円の中心から頂点に補助線を引いて, 得られる三角形について (図 4 を参照) 余弦定理を用いると

$$1^2 = r^2 + r^2 + 2r^2\cos\left(\frac{360^\circ}{n}\right)$$

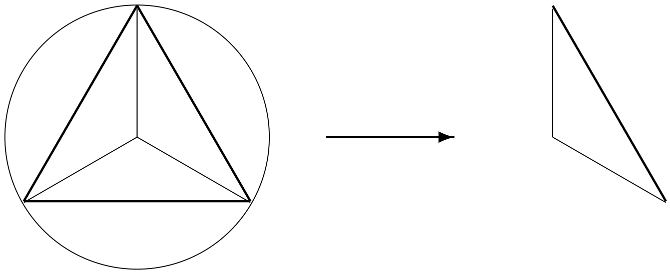

図 4. 正三角形から, 三角形を一つ取り出す

となるので, cos に対する倍角公式を用いれば

$$r^2 = \frac{1}{2(1+\cos\left(\frac{360^\circ}{n}\right))} = \frac{1}{4\sin^2\left(\frac{180^\circ}{n}\right)} \tag{11}$$

となる. (11) を (10) に代入すれば

$$A = \frac{n}{4\sin^2\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{n\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}{4\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)} = \frac{n}{4\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$$

となるので (9) が得られた. □

命題 5 は外接円の半径を求めるという, やや面倒な方法で証明してみました. 他にも証明の方法がありますので, 考えてみるとよいでしょう.

参考文献

[1] 小林 昭七, 円の数学, 裳華房, 1999.

[2] Ernst Hairer, Gerhard Wanner, 蟹江 幸博 訳, 解析教程・上 新装版, 丸善出版, 2012.

[3] Ernst Hairer, Gerhard Wanner, 蟹江 幸博 訳, 解析教程・下 新装版, 丸善出版, 2012.

	$\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$	A	$4A$	L	L^2	$\frac{L^2}{4A}$
正三角形	1.7321	0.4330	1.7320	3	9	5.1963
正方形	1	1	4	4	16	4
正六角形	0.57735					
正180角形	0.01746					

表 1. 正多角形の周の長さと面積の関係 (A は面積, L は周の長さ)