0で割り算する話
–考えないのはなぜ？–

水野 将司 (日本大学理工学部数学科)

$1 \div 0$ や $0 \div 0$ は中学 1 年生の教科書では**考えない**と書いてあります. 例えば, 東京書籍の中学 1 年生の教科書では

> 0 でわる除法は考えない.

と書かれています. それでは, なぜ考えないのか？について, 掘り下げて考えてみましょう.

1. $1 \div 0$ はなぜ考えない？

中学 1 年生の教科書には, 割り算の説明として[1]

> 実数 x, y に対して $z \times y = x$ となる実数 z を求める計算が割り算 $x \div y$ である.

と書いてあります. すると, $1 \div 0$ を考えるなら

> $z \times 0 = 1$ となる z を求めなさい

ということになるので, たしかに, こんな z はないということはすぐにわかります. なぜなら,

> どんな数に 0 をかけても, 積は 0 になる.

と習ったからです. しかし, もう少し踏み込んで, **$z \times 0 = 1$ となる z があったとするとどうなるか？**を考えてみましょう.

考える準備として, $2 \div 1$ を考えてみます. $2 \div 1 = 2$ はすぐにわかります. このときに $2 \div 1.01$ や $2 \div 0.99$ など, **1 に近い数で 2 をわってみます.**

問題 1.
電卓をつかって, 次の表 1 の空欄を埋めてみなさい.

[1] 文字を使って, 少し整理した書き方をしています.

y	0.9	0.99	0.999	0.9999	1
$2 \div y$					2

y	1	1.0001	1.001	1.01	1.1
$2 \div y$	2				

表 1. $2 \div 1$ に近い計算

問題 1 をやってみるとわかるとおり, $2 \div 0.9999 = 2 \div (1 - 0.0001)$ や $2 \div 1.0001 = 2 \div (1 + 0.0001)$ は $2 \div 1$ に近い答えになることがわかります. 従って, **割る数を少し変化させたとしても, 答えはそんなにかわらない**ということがわかります. では, 同じことを, $1 \div 0$ でもやってみましょう.

y	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	0
$1 \div y$	-10	-100	-1000	-10000	z

y	0	0.0001	0.001	0.01	0.1
$1 \div y$	z	10000	1000	100	10

表 2. $1 \div 0$ に近い計算

この表 2 から, $z = 1 \div 0$ は 10000 に近くて, -10000 にも近いということが推測できます. さらに $1 \div 0.00001$ や $1 \div (-0.00001)$ を考えることで, z は**とても大きな数であって**, そして**とても小さな数である**ということになります. すると, 大きな数であって小さな数である z をくっつけてみると数直線は図 1 のように, 円周になってしまいます.

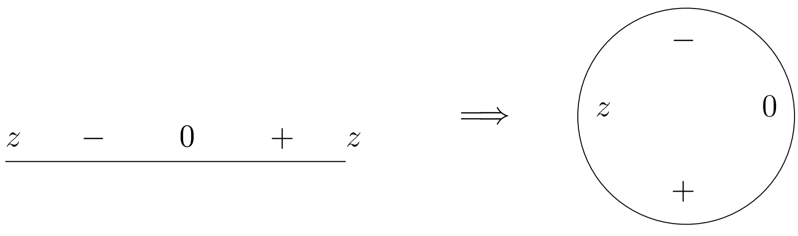

図 1. 数直線を z でくっつけてみた

すると, 実数の性質として重要な**大小関係が壊れてしまいます**. 実際に, 図 1 の円周をみると, 0 の位置から反時計まわりに進むと小さく

なっているので負の数になっているように見えますが, z を通過したあとは, 正の数になってしまいます. 反時計まわりに進むと小さくなるのだから, 負の数よりも正の数の方が小さいことになります. よって, 例えば $+100 < -100$ となってしまうのです. したがって, 100 点よりも 80 点の方が成績がよいなんてことになってしまいます. 従って, $1 \div 0$ なる数を作ってしまうと, **大小関係が壊れる**ということが困るということがわかりました.

2. $0 \div 0$ はなぜ考えない？

次は $0 \div 0$ を考えてみましょう. 中学 1 年生の教科書に戻ってみると

> $z \times 0 = 0$ となる z を求めなさい

ということになるので, こんな z はたくさんあるということになります. なぜなら

> どんな数に 0 をかけても, 積は 0 になる.

と習ったから, $z \times 0$ は z がどんな数であっても 0 になるので, $z \times 0 = 0$ はつねに正しいのです. 今度は $1 \div 0$ とは違い, **答えの候補がたくさんありすぎて, どれを選べばよいかわからない**という問題になります.「答えがたくさんありすぎるから答えはない」という主張は, 理由が正しくありません. **答えの選び方がわからないだけで, たくさんありすぎる答えから, 本当に正しい答えがあるかもしれない**からです. 例えば, $1 \div 1 = 1, 2 \div 2 = 1, 3 \div 3 = 1$ から推察して, $0 \div 0 = 1$ とすればよさそうな気もします. では, このようなことをすると, 何が問題になるのでしょうか？

そこで,「$2 \div 1.1$ は $2 \div 1$ に近いはず」を改めて考えてみます. さきほどは「割る数を少し変化させたとしても, 答えはそんなにかわらないはず」としましたが, 今度は,「割られる数, 割る数をどちらも少し変化させたらどうなるか」を考えてみます. そこで,「$2.1 \div 1.1$ などは $2 \div 1$ に近いはず」が本当に正しいかを検証してみます.

図 2 は横軸にわられる数, 縦軸にわる数を決めたときに, $x = 2, y = 1$ のまわりでどうなっているかをみたものです. 話を簡単にするために, $x \geqq 2, y \geqq 1$ の範囲のみを考えることにしました. 格子点の下に書いてある数は $x \div y$ の値です. また, $x \div y = 2$ となる点を直線で結んでみました. 図 2 をみると, $z = x \div y$ の値は $1.83 \leqq z \leqq 2.08$ とおよそ 2.5 の範囲におさまっていることがわかります. このことから**割る数, 割られる数のどちらについても, 少し変化したところで, 答えはそんなにか**

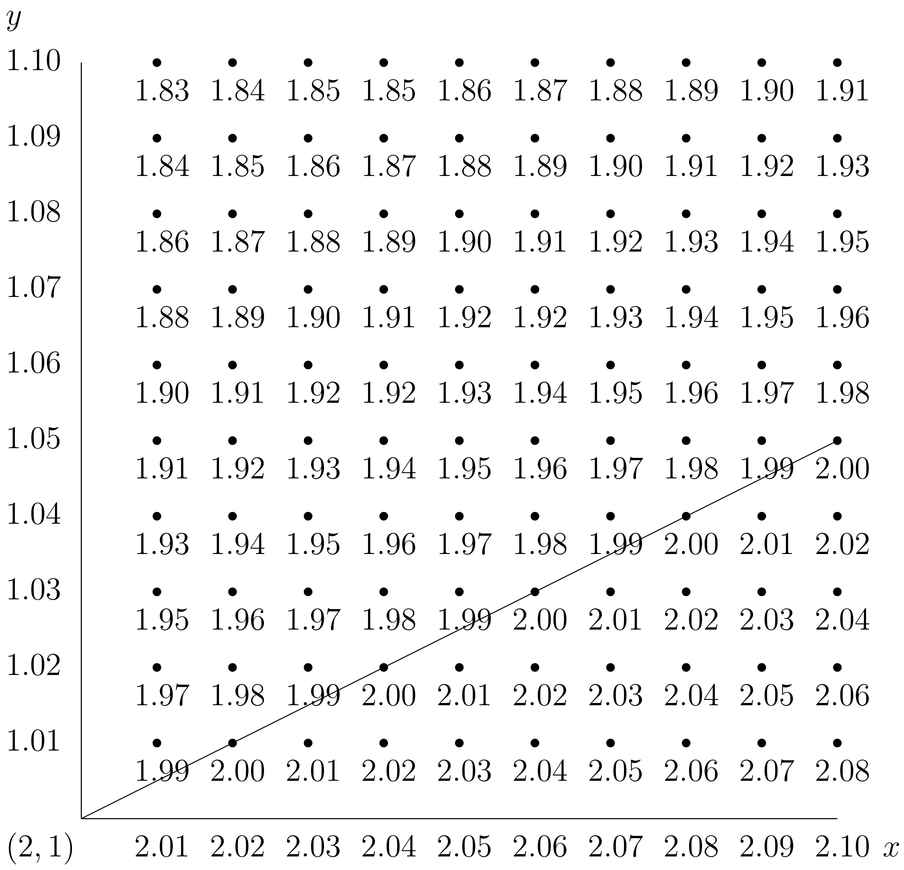

図 2. $z = x \div y$ がどうなるかを $x = 2, y = 1$ の近くでで考えてみる

わらないということがわかります. そこで, $0 \div 0$ のかわりに $z = x \div y$ を考えて, x, y が 0 に近いときに, z がどのように変化をするのかを調べてみます.

問題 2.

図 3 は x を横軸, y を縦軸にして, 0.01 刻みで格子点を書いたものです. 格子点の下の数字は $z = x \div y$ の値を書いたものです. 格子点の下に $z = x \div y$ の値を書きこんでみなさい. そして, z が同じ値の格子点を直線で結んでみなさい.

図 4 は $z = 0.5$, $z = 1.0$, $z = 2.0$ のそれぞれについて, 直線をむすんだもので, それぞれ直線 A, 直線 B, 直線 C としました. 直線 A は $0 \div 0$ を $0.1 \div 0.2$, $0.01 \div 0.02$, $0.001 \div 0.002$,... によって, 近似したものです.

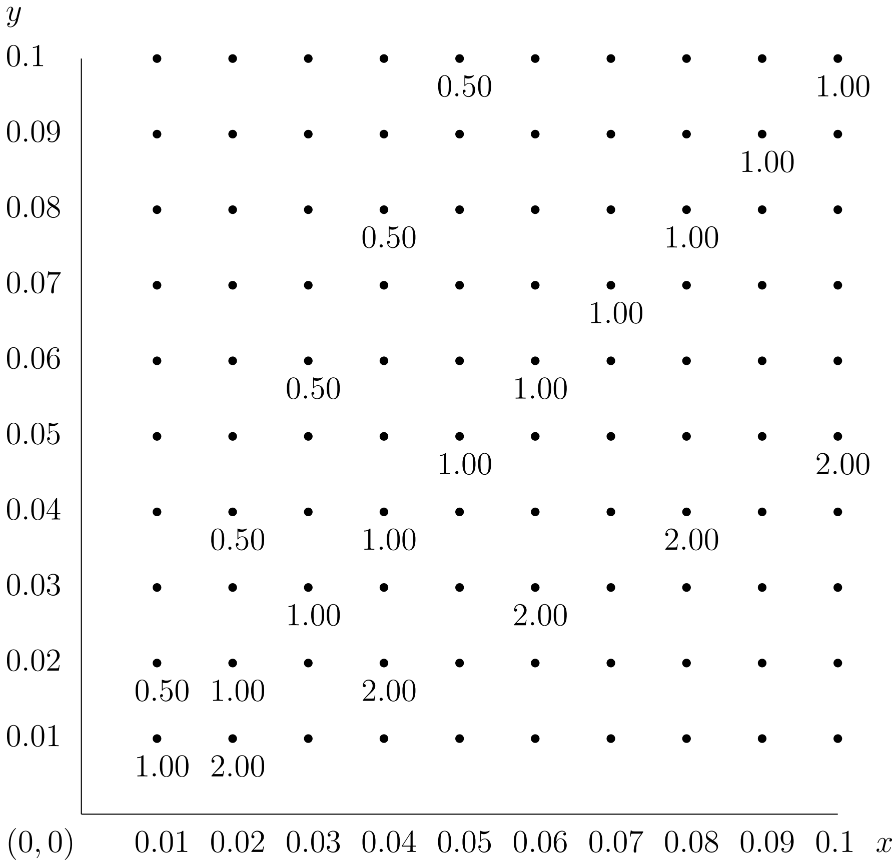

図 3. $z = x \div y$ がどうなるかを格子点で考えてみる

同様に直線 B は $0 \div 0$ を $0.1 \div 0.1$, $0.01 \div 0.01$, $0.001 \div 0.001, \ldots$ で近似したもの, 直線 C は $0 \div 0$ を $0.2 \div 0.1$, $0.02 \div 0.01$, $0.002 \div 0.001, \ldots$ で近似したものです. 三つの直線はどれも $0 \div 0$ に近い数になるはずですが, それらの割り算の答えである z はどれも違うものになっています. したがって, $0 \div 0$ を 0.5 にしたら, 直線 B や直線 C で近づけたときに困ることになります. 同じように, $0 \div 0 = 1$ としても $0 \div 0 = 2$ としても同じ問題がおきてしまうので, $0 \div 0$ は 0.5 でも 1 でも 2 でも困ることがわかります. さらに, 実数 k に対して, 直線 $ky = x$ にそって $z = x \div y$ を計算すると $z = k$ となるので, $0 \div 0$ をどの値にしても違う値に近づく直線を作ることができてしまいます. よって, $0 \div 0$ を定めることができないことがわかります.

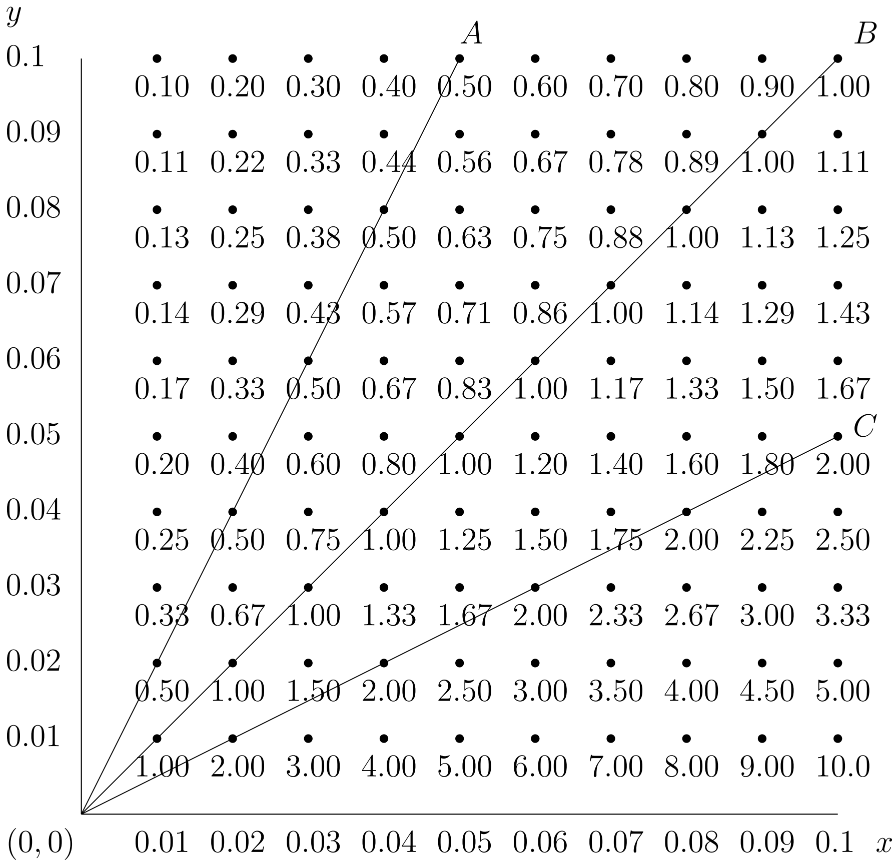

図 4. $z = x \div y$ と直線を結んだもの

3. これらの話の理論的側面

この話は, 前提として

> 二変数関数 $f(x, y) = x \div y$ は連続となる

を用いています. つまり, 割る数, 割られる数のどちらについても, 少し変化したところで, 答えはそんなにかわらないことを用いています. 高校でならう数 III の極限を用いると

$$\lim_{x \to x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0), \quad \lim_{y \to y_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0)$$

となりそうですが, 二変数関数の場合はさらに

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

を考えないといけないのです. これは数 III の極限より複雑なものになっており, (x_0,y_0) **にどのように近づいても同じ値に近づく**ことが要求されます. どのようなアイデアかを説明するために, 図 2 で, $1.90 < z < 2.10$ となる x, y の範囲を考えてみてください. 答えは, 図 2 の範囲では $2.00 < x < 2.10$ かつ $1.00 < y < 1.06$ となります. つまり, $2.00 < x < 2.10$ かつ $1.00 < y < 1.06$ の長方形の中では, つねに $1.90 < z < 2.10$ をみたしていることがわかります. 次に $1.95 < z < 2.05$ となる x, y の範囲を考えてみますと, 図 2 の範囲では $2.00 < x < 2.07$ かつ $1.00 < y < 1.03$ となります. 目盛をもっと細かくとれば, $1.99 < z < 2.01$ となる x, y の範囲をみつけることができるでしょう. つまり, 図 2 では, z が 2 にとても近くなるような x, y の範囲を決めることができます.

他方, 図 4 で同じことを考えようとするとうまくいかないことがわかります. $(0,0)$ を頂点の一つとする長方形を考えると, $z=2$ となる点と $z=1$ となる点, $z=0.5$ となる点がかならず長方形の中にはいってしまいます. つまり, 「長方形の中のすべての点が何らかの数に近い」となる長方形をつくることができないのです. これが, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}$ が意味をもつかもたないかの違いになっています. 詳しいことはミニ講義では解説できないと思いますので, 興味のある方は数学科ブースにいる水野, または学校の先生に聞いてみるとよいでしょう.

このことについて, 参考となる文献を下記にあげておきますが, 多変数の連続性は難しい概念ですので, あまり参考となる文献がないのが現状です. いずれにせよ大学の微分積分に関する内容ですので, わからなくても, そんなもんかと思って頂ければ幸いです.

参考文献

[1] 小林 昭七, 微分積分読本 1 変数, 裳華房, 2000.

[2] 小林 昭七, 微分積分読本 多変数, 裳華房, 2001.

[3] 高木 貞治, 定本 解析概論[2], 岩波書店, 2010.

[4] 土基 善文, x の x 乗のはなし (はじめよう数学)[3], 日本評論社, 2002.

[5] 難波 誠, 微分積分学 (数学シリーズ)[4], 裳華房, 1996.

[2]微分積分学におけるもっとも著名な本です. 気楽に読める本ではありません.

[3]もともとは 0^0 を話題にするつもりでしたが, 話を簡単にするために $0 \div 0$ を話題にすることにしました. 本質的なアイデアはほとんど同じです.

[4]私が大学生のころ, この本で微分積分学を勉強していました.