「拡散現象と固有値問題」

§拡散現象と拡散方程式

〈Motivation〉

液体（水など）に溶けた物質の拡散の様子（拡散現象）を知りたい。

仮定

◎ 物質は濃度の大きい方から小さい方へ拡散する。

◎ 単位時間あたりの拡散量は、濃度の差（勾配）に比例（比例定数を拡散係数という）

〈方程式の導出〉

独立変数　$t>0$ ：時間
　　　　　$x\in\mathbb{R}$ ：位置．

未知関数　$u=u(t,x)$ ：時刻 t における点 x における物質の濃度

既知定数　$\nu>0$ ：拡散係数

Δt ：微小時間，Δx ：微小区間とする（あとで $\Delta t\to 0$，$\Delta x\to 0$ とする）

例えば

小　大

$[\;x,\; x+\Delta x\;]$ $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}(t, x+\Delta x) > 0$

・濃度大 ⇒ 濃度小 だから物質は流入する。

t　物質の量　$t+\Delta t$

$$u(t,x)\Delta x \longrightarrow u(t+\Delta t, x)\Delta x$$

x　$x+\Delta x$　　x　$x+\Delta x$

$[x, x+\Delta x]$ での物質量の変化は拡散係数を用いて

$$\nu \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x+\Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) \right) \Delta t$$

拡散係数　物質の流入　物質の流出　単位時間

とかけるので

$$(u(t+\Delta t, x) - u(t,x))\Delta x$$

$$= \nu \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x+\Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) \right) \Delta t$$

となる。$\Delta x \Delta t$ でわると

$$\frac{u(t+\Delta t, x) - u(t,x)}{\Delta t} = \nu \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x+\Delta x) - \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) \right)}{\Delta x}$$

となるので $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$ として

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x)$$

が得られる。

§境界条件と変数分離解

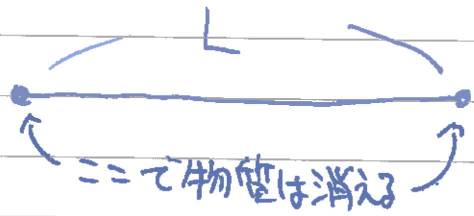
$L>0,\ \nu=1$ として

$$
(\mathrm{DE})\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), & t>0,\ 0<x<L,\\ u(0,x)=u_0(x), & 0<x<L\end{cases}
$$

を考える．ただし $u=u(t,x)$ は未知関数 $(u:(0,\infty)\times[0,L]\to\mathbb{R})$，$u_0=u_0(x)$ は既知関数 $(u_0:[0,L]\to\mathbb{R})$ とする．

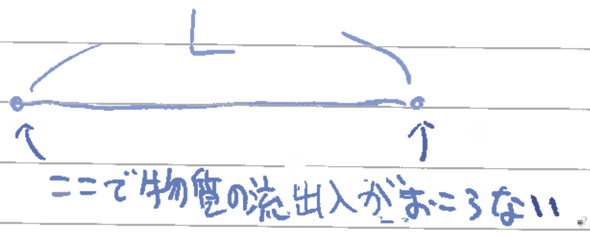
〈Dirichlet 境界条件〉

$$(\mathrm{DB})\quad u(t,0)=u(t,L)=0,\quad t>0.$$



〈Neumann 境界条件〉

$$(\mathrm{NB})\quad \frac{\partial u}{\partial x}(t,0)=\frac{\partial u}{\partial x}(t,L)=0,\quad t>0.$$



〈変数分離解〉

(DE)+(DB) の解 $u(t,x)$ を

$$u(t,x) = \lambda(t)\phi(x)$$

の形で探す(このような解を変数分離解という)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}(\lambda(t)\phi(x)) = \frac{\partial \lambda}{\partial t}(t)\phi(x),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\lambda(t)\phi(x)) = \lambda(t)\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x)$$

より、(DE) に代入すると

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t}(t)\phi(x) = \lambda(t)\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x)$$

が得られる。両辺 $\lambda(t)\phi(x)$ でわると

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t}(t) \Big/ \lambda(t) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x) \Big/ \phi(x)$$

となるが、左辺は t のみ、右辺は x のみの形をしているから定数になるはずである。そこで、定数 $\lambda_0 > 0$ を用いて

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t}(t) \Big/ \lambda(t) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x) \Big/ \phi(x) = \lambda_0$$

とおくと、(DB) から

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t}(t) = \lambda_0 \lambda(t), \quad t>0,$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x) = \lambda_0 \phi(x), & 0<x<L \\ \phi(0) = \phi(L) = 0 \end{cases}$$

が得られる．$\lambda(t)$ について解くと

$$\lambda(t) = \lambda(0)\, e^{\lambda_0 t}$$

となることから

$$u(t,x) = \lambda(0)\, e^{\lambda_0 t} \phi(x)$$

となり，「$t>0$ を大きくすると，$e^{\lambda_0 t}$ のように拡散する」ことがわかる。

◎ $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ をどうやって求めればよいか？

§ 固有値問題

$$(E)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x) = \lambda_0 \phi(x), & 0<x<L \\ \phi(0) = \phi(L) = 0 \end{cases}$$

は，$A\phi = \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ とすることにすれば

$$A\phi = \lambda_0 \phi$$

となるので，Aの固有値を求めることのようにみることができる．

〈λ_0の性質〉

(E)に $\phi(x)$ をかけて両辺 $[0, L]$ で積分すると

$$(\text{左辺}) = \int_0^L \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x)\,\phi(x)\,dx$$

$$= \left[\frac{\partial \phi}{\partial x}(x)\phi(x)\right]_0^L - \int_0^L \frac{\partial \phi}{\partial x}(x)\frac{\partial \phi}{\partial x}(x)\,dx \quad (\because \text{部分積分})$$

$$= -\int_0^L \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(x)\right)^2 dx \quad (\because \phi(0)=\phi(L)=0)$$

◦ 線形代数の言葉を使うと
$A\phi = \lambda_0 \phi$
について ϕ を内積する，つまり
$(A\phi, \phi) = \lambda_0(\phi, \phi)$
を計算すること，といいかえられる．

$$(\text{右辺}) = \lambda_0 \int_0^L (\phi(x))^2 dx$$

より

$$-\underbrace{\int_0^L \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(x)\right)^2 dx}_{\leq 0} = \lambda_0 \underbrace{\int_0^L (\phi(x))^2 dx}_{\geq 0}$$

がわかる。このことから $\lambda_0 \leq 0$ がわかる。
実は $\lambda_0 < 0$ となることもわかるので

$$u(t,x) = \lambda(0) e^{\lambda_0 t} \phi(x) \to 0 \quad (t \to \infty)$$

つまり、「境界で物質が消える場合、十分大きな時間がたつと、物質はなくなってしまう」ことがわかる。

参考文献

- 渋谷仙吉, 内田伏一, 物理数学コース 偏微分方程式, 裳華房, 2000.
- 神保秀一, 偏微分方程式入門, 共立出版, 2006.
- 金子晃, 偏微分方程式入門, 東京大学出版会, 1998.

現代数学通論レポート問題 (担当: 水野 将司)

問題 1 は全員が答えよ. 問題 2, 問題 3 はよい成績を希望する学生は解いてくること. 問題 4, 問題 5 は意欲ある学生向けの問題である.

締切は 6 月 29 日 (月) の午後 6 時までとし, お茶の水校舎 9 号館 C905 の水野研究室前の提出箱に入れること (何か回収する箱のようなものを作っておきます). レポートは A4 用紙 (この紙と同じサイズ) を片面で利用し, 必要に応じて, 左上 1 箇所**のみ**をホチキスで止めること. ルーズリーフや印刷物の裏紙は利用しないこと. 表紙はつけなくてもよい. また, 鉛筆書きで構わない. 氏名と学生番号の書き忘れは採点しない (出席扱いにもしない).

なお, このレポート課題は卒業研究で選抜が発生したときに参考資料として用いることがある. 問題 1 と, レポートの体裁 (こちらの指示をきちんと守って提出しているか否か, 締切までに提出しているか) は特に重視する.

問題 1 (必修課題)**.**

この講義に対する感想, 意見, コメント等を書け.

問題 2.

$a > 0$, $t > 0$ に対し, $\lambda(t) = ae^{\lambda_0 t}$ は

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t}(t) = \lambda_0 \lambda(t)$$

の解になることを確かめよ (微分方程式の一般解を求めるというわけではない. 代入して, 等号が正しいことを確認するだけである).

問題 3.

固有値問題

$$\text{(E)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\phi}{dx^2}(x) = \lambda\phi(x), & 0 < x < L, \\ \phi(0) = \phi(L) = 0 \end{cases}$$

の解 (ϕ, λ) を求めたい. そこで, $n \in \mathbb{N}$ に対して $\phi_n(x) := \sin\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right)$ とおく.

(1) $\phi_n(0) = \phi_n(L) = 0$ を示せ.

(2) $\phi_n''(x) = \dfrac{d^2\phi_n}{dx^2}(x)$ を計算せよ.

(3) ϕ_n が (E) の解となるためには, λ をどのようにとらないといけないか？

レポート問題は裏面に続く.

以下, $L > 0$ に対して

$$
(\mathrm{DE})_{\mathrm{N}} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), & t > 0,\ 0 < x < L \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,L) = 0, & t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x), & 0 < x < L \end{cases}
$$

について考える. ただし, $u = u(t,x)$ は未知関数, $u_0 = u_0(x)$ は $[0,L]$ 上連続な既知関数とする. 微分と積分の順序交換などはすべて認めて, 形式的に計算せよ.

問題 4 (総量保存則)**.**
次の積分等式

$$
\int_0^L u(t,x)\,dx = \int_0^L u_0(x)\,dx, \qquad \forall t > 0
$$

を示せ (ヒント: $(\mathrm{DE})_{\mathrm{N}}$ を x 変数で積分して, $\dfrac{d}{dt}\left(\displaystyle\int_0^L u(t,x)\,dx\right) = 0$ を示せ.)

問題 5 (エネルギー不等式)**.**
$T > 0$ に対して

$$
\int_0^L (u(T,x))^2\,dx + 2\int_0^T \left(\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right)^2 dx\right) dt = \int_0^L (u_0(x))^2\,dx
$$

を示せ. さらに, エネルギー不等式

$$
\int_0^L (u(T,x))^2\,dx \le \int_0^L (u_0(x))^2\,dx
$$

を導け (ヒント: $(\mathrm{DE})_{\mathrm{N}}$ に $u(t,x)$ をかけてから, $0 \le x \le L$, $0 \le t \le T$ で積分してみよ).

参考文献

[ShiUch] 渋谷 仙吉, 内田 伏一, 物理数学コース 偏微分方程式, 裳華房, 2000.
[Jim] 神保 秀一, 偏微分方程式入門, 共立出版, 2006.
[Kan] 金子 晃, 偏微分方程式入門, 東京大学出版会, 1998.