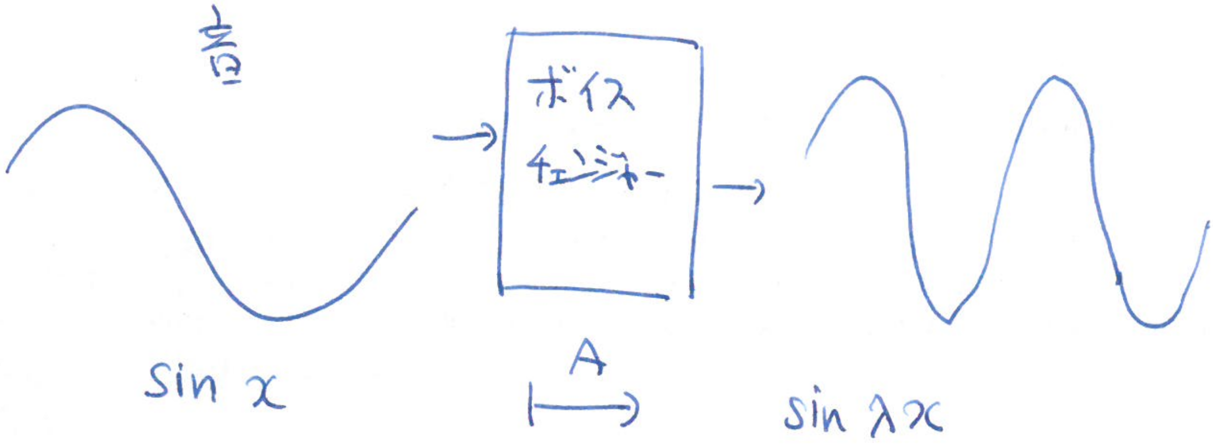
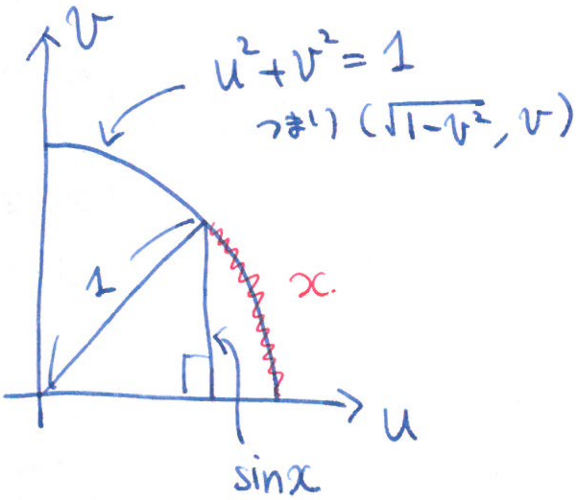


このλを知りたい $\Longleftrightarrow$ $Au=\lambda u$ となる (u,λ) の組を求めたい.

この問題を一般化するとどうなる?

§ 三角関数の一般化



$$x=\int_0^{\sin x}\sqrt{\left(\left(\sqrt{1-v^2}\right)'\right)^2+(v')^2}\,dv$$

$$=\int_0^{\sin x}\sqrt{\frac{v^2}{1-v^2}+1}\,dv$$

$$=\int_0^{\sin x}\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,dv$$

$y=\sin x$ とおくと次が得られる.

Prop.

$-1<y<1$ に対し

$$\arcsin y=\int_0^y\frac{1}{(1-v^2)^{1/2}}\,dv.$$

とくに. $\displaystyle\frac{\pi}{2}=\int_0^1\frac{1}{(1-v^2)^{1/2}}\,dv$ ☒

$\int_0^y \frac{1}{(1-v^2)^{1/2}}\,dv$ は無理関数＋積分.

$\Longrightarrow$ $$\arcsin y := \int_0^y \frac{1}{(1-v^2)^{1/2}}\,dv$$

として sin (の逆関数) を定義できる (cf. 黒田, 小平)

さて,

$$\arcsin y := \int_0^y \frac{1}{(1-v^2)^{1/2}}\,dv$$

を $1<p<\infty$, $-1<y<1$ に対して

$$\arcsin_p y := \int_0^y \frac{1}{(1-v^p)^{1/p}}\,dv$$

にかえたらどうなる?

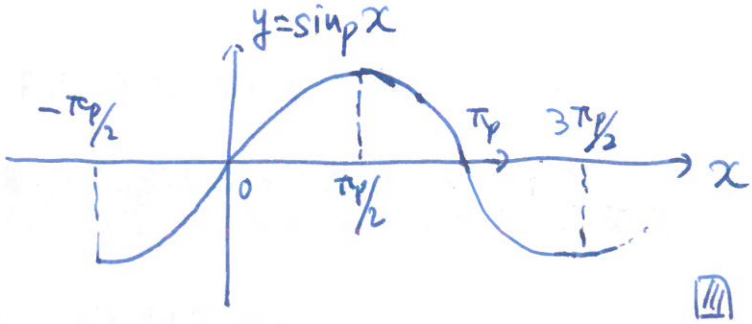
Def.

$1<p<\infty$, $-1<y<1$ に対して

$$\arcsin_p y := \int_0^y \frac{1}{(1-v^p)^{1/p}}\,dv,$$

$$\pi_p := 2\int_0^1 \frac{1}{(1-v^p)^{1/p}}\,dv$$

と定める. $\arcsin_p$ の逆関数 $\sin_p : \left(-\frac{\pi_p}{2}, \frac{\pi_p}{2}\right) \to \mathbb{R}$ を周期的に拡張したものを一般化された三角関数という.



§ 固有値問題の一般化.

音 → 波 → 単振動の方程式（+いろいろ）

$$(*)\quad \begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2}(x) = \lambda u(x) & x \in (0, \pi). \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases}$$

Example

$n \in \mathbb{N}$ に対し, $u(x) = \sin(nx)$ は $\lambda = n^2$ としたときの $(*)$ の解. ☐

$(*)$ を別のかき方でかいてみる.

$$\int_0^\pi (*) \times u(x)dx$$

$$\Longrightarrow \quad -\int_0^\pi \frac{d^2u}{dx^2}(x)u(x)dx = \lambda \int_0^\pi (u(x))^2 dx$$

$$(\text{左辺}) = \underbrace{-\left[\frac{du}{dx}(x)\,u(x)\right]_0^\pi}_{=0\ (\because\ u(0)=u(\pi)=0)} + \int_0^\pi \frac{du}{dx}(x)\frac{du}{dx}(x)\,dx$$

$$\therefore \quad \lambda = \frac{\int_0^\pi \left|\frac{du}{dx}(x)\right|^2 dx}{\int_0^\pi |u(x)|^2 dx}.$$

Prop.

$(*)$ の解 u が $\int_0^\pi |u(x)|^2 dx \neq 0$ ならば

$$\lambda = \frac{\int_0^\pi \left|\frac{du}{dx}(x)\right|^2 dx}{\int_0^\pi |u(x)|^2 dx}.$$

☐

Example

$u(x)=\sin x$ とすると

$$\lambda = \frac{\int_0^{\pi} \left|\frac{du}{dx}(x)\right|^2 dx}{\int_0^{\pi} |u(x)|^2 dx} = \frac{1}{1} = 1$$

となる. uは $\lambda=1$ のときの $(*)$ の解であった. ▨

もう少しがんばると次がわかる.

Thm.

$$1 = \inf\left\{ \frac{\int_0^1 \left|\frac{du}{dx}(x)\right|^2 dx}{\int_0^1 |u(x)|^2 dx} : \begin{array}{l} u:(0,\pi)\to\mathbb{R} \text{ は } C^1\text{級} \\ u(0)=u(\pi)=0 \end{array} \right\}$$

もし, $u:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ が

$$\lambda = \inf\left\{ \frac{\int_0^1 \left|\frac{du}{dx}(x)\right|^2 dx}{\int_0^1 |u(x)|^2 dx} : \begin{array}{l} u:(0,\pi)\to\mathbb{R} \text{ は } C^\infty\text{級.} \\ u(0)=u(\pi)=0 \end{array} \right\}$$

の inf を達成する(つまり inf が min になる)とき,

uは(何らかの意味で) $(*)$ をみたす. ▨

では $1<p<\infty$ に対して

$$\lambda_p := \inf\left\{ \frac{\int_0^1 \left|\frac{du}{dx}(x)\right|^p dx}{\int_0^1 |u(x)|^p dx} : \begin{array}{l} u:(0,\pi_p)\to\mathbb{R} \text{ は } C^\infty\text{級.} \\ u(0)=u(\pi)=0 \end{array} \right\}$$

を考えるとどうなるか?

$\Longrightarrow$　inf を達成する関数 $u:[0,\pi_p]\to\mathbb{R}$ は

それなりに
がんばる

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = \lambda_p |u|^{p-2}u \\ u(0)=u(\pi_p)=0 \end{cases}$$

をみたすはず.

§ 2つのつながり

<u>Thm.</u>

$1<p<\infty$ に対し, $u(x)=\sin_p(x)$　$(0\le x\le \pi_p)$ は

$$\begin{cases} -(|u'|^{p-2}u')' = (p-1)|u|^{p-2}u & 0<x<\pi_p \\ u(0)=u(\pi_p)=0 \end{cases}$$

をみたす.

<u>pf.</u>　$u(x)=\sin_p(x)$ とおくと　$x=\arcsin_p(u(x))$ であり

$$(\sin_p(x))' = \frac{1}{\frac{dx}{du}} \quad (\because \text{逆関数微分})$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{(1-u(x)^p)^{1/p}}} = (1-u(x)^p)^{1/p}$$

より

$$|(\sin_p(x))'|^{p-2}(\sin_p(x))' = (1-u(x)^p)^{1-\frac{1}{p}}$$

となる. よって

$$-\left(|(\sin_p(x))'|^{p-2}(\sin_p(x))'\right)' = -\left(1-\frac{1}{p}\right)(1-u(x)^p)^{-\frac{1}{p}}(-pu(x)^{p-1})u'(x)$$

$$= (p-1)(1-u(x)^p)^{-\frac{1}{p}}u(x)^{p-1}(1-u(x)^p)^{1/p}$$

$$= (p-1)u(x)^{p-1}$$

となり、$0<x<\pi_p$ に対して $u(x)>0$ から

$$-(|u'|^{p-2}u')' = (p-1)|u|^{p-2}u$$

がわかる。また、$\arcsin_p 0 = 0$ と周期性から
$u(x)=u(\pi_p)=0$ がわかる。 □

〈まとめ〉

① 一見かんけいのなさそうな2つの発展

→ 実はつながりがあった。

② 今日の話、わからんかった…

→ あと3年(大学院)頑張ると到達できる世界

③ 今日の話、ほとんど微分積分+線形代数

→ 基礎は大事。(アイデアが役立つことも多い)

現代数学通論レポート問題 (担当: 水野 将司)

問題 1 は全員が答えよ. 問題 2, 問題 3 はよい成績を希望する学生は解いてくること. 問題 4, 問題 5 は意欲ある学生向けの問題である.

締切は 6 月 28 日 (火) の午後 6 時までとし, お茶の水校舎 9 号館 C905 の水野研究室前の提出箱に入れること. レポートは A4 用紙 (この紙と同じサイズ) を片面で利用し, 必要に応じて, 左上 1 箇所のみをホチキスで止めること. ルーズリーフや印刷物の裏紙は利用しないこと. 表紙はつけなくてもよい. 鉛筆書きで構わない. 氏名と学生番号の書き忘れは採点しない (出席扱いにもしない).

問題 1 (必修課題)**.**

この講義に対する感想, 意見, コメント等を書け.

問題 2.

$-1 < y < 1$ に対して, $\dfrac{d}{dy}\arcsin y$ を求めよ.

問題 3.

$n \in \mathbb{N}$, $0 \le x \le \pi$ に対して, $u(x) := \sin(nx)$ とおく.

(1) u が次の微分方程式

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2}(x) = n^2 u(x), & 0 < x < \pi, \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

をみたすことを確かめよ.

(2) $\dfrac{\displaystyle\int_0^\pi \left|\frac{du}{dx}(x)\right|^2 dx}{\displaystyle\int_0^\pi |u(x)|^2\, dx}$ を求めよ.

問題 4.

なぜ, $p = 1$ とした $\sin_1 x$ を考えないかを考察する.

(1) $0 < v < 1$ に対して, $(1-v)^{\frac{1}{p}} \le (1-v^p)^{\frac{1}{p}}$ となることを示せ.

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-v^p)^{\frac{1}{p}}}\, dv < \infty$ となることを示せ (ヒント: (1) の逆数をとる).

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-v}\, dv = \infty$ となることを示せ.

注意.

問題 4 により, $p = 1$ のとき, $\arcsin_1(1) = \infty$ となってしまい, $\pi_1 = \infty$ となることがわかる. つまり, 我々の思い浮べるような三角関数になっていないということである.

問題 5.

$1 < p < \infty$ に対して, $\arcsin_p y$ のグラフをコンピュータを用いて書いてみよ. 逆関数は直線 $y = x$ について対称だったことを用いて, $\sin_p x$ のグラフを書いてみよ.

参考文献

[1] A. Elbert, *A half-linear second order differential equati on*, in Qualitative theory of differential equations, (1979), 153–180.

[2] S. Takeuchi, *Generalized Jacobian elliptic functions and their application to bifurcation problems associated with p-Laplacian*, J. Math. Anal. Appl. **385** (2012), 24–35.

[3] S. Takeuchi, *The basis property of generalized Jacobian elliptic functions*, Comm. Pure Appl. Math. **13** (2014), 2675–2692.

[4] 葛岡 良貢, p-Laplace 作用素の非線形固有値問題について (Nonlinear eigenvalue problems for the p-Laplace operator), 日本大学大学院 理工学研究科 博士前期課程 数学専攻修士論文, 2016.

[5] 黒田 成俊, 微分積分, 共立出版, 2002.

[6] 小平 邦彦, 軽装版 解析入門 (1), 岩波書店, 2003.