解析概論C演習 コメント (4/10)

$\boxed{1.3}$ Uが開集合であることの定義は,

$$\underbrace{{}^\forall \vec{x} \in U}_{①} \text{に対して} \underbrace{{}^\exists \varepsilon > 0}_{②} \text{ s.t. } \underbrace{U_\varepsilon(\vec{x}) \subset U}_{\boxed{3}}$$

です(①,②は文字がどういう性質を持っているか? $\boxed{3}$は何が成り立つか?)。

$U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\vec{x}\| < 1\}$が開集合であることを証明するとき,上の番号の順に議論がされます。つまり,以下の穴をうめるようにかくことになるのが標準的なかき方です。

証明 $\underbrace{{}^\forall \vec{x} \in U \text{ に対して}}_{①}$ $\underbrace{\varepsilon := \boxed{\quad A \quad} > 0}_{②}$ とおく。

すると

$$\boxed{\qquad\qquad B \qquad\qquad}$$

となるので $\underbrace{U_\varepsilon(\vec{x}) \subset U}_{\boxed{3}}$ が成り立つ。 □

上の $\boxed{A}$, $\boxed{B}$ をうまく埋めることができればよいわけです。
ε-N論法で上の $\boxed{A}$ $\boxed{B}$ が何になるかみてみましょう。

定義
数列$\{a_n\}_{n=1}^\infty$が$a \in \mathbb{R}$に収束するとは,

$$\underbrace{{}^\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して}}_{①} \underbrace{{}^\exists N \in \mathbb{N} \text{ s.t.}}_{②} \underbrace{{}^\forall n \geq N}_{③} : \underbrace{|a_n - a| < \varepsilon}_{\boxed{4}}$$

である

例　$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2$

証明　$\underbrace{\forall \varepsilon > 0 \text{ に対して}}_{①}$　$\underbrace{N = \overset{A}{\boxed{\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1}} \in \mathbb{N} \text{ とおく。}}_{②}$すると

$\underbrace{\forall n \geq N}_{③}$ に対して

B
$$\boxed{\begin{aligned} \left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| &= \frac{2}{n+1} \\ &\leq \frac{2}{N+1} \quad (\because n \geq N) \\ &\leq \frac{2}{N} \\ &< \frac{2}{2/\varepsilon} \quad \left(\because N = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1 > \frac{2}{\varepsilon}\right) \\ &= \varepsilon \end{aligned}}$$

となるので $\underbrace{\left|\frac{2n}{n+1} - 2\right| < \varepsilon}_{\boxed{4}}$ が成り立つ．　□

⑪ ε−N論法や ε−δ論法などの存在を示せ は，$\boxed{A}$ に何が入っているか？が重要です．そして，$\boxed{A}$ に何を入れればよいか？を求めるためには $\boxed{B}$ に何を書けばよいか？を前もって考察する必要があります．

$\boxed{1.7}$ (a) ⇒ (b)

$\vec{a}_k \to \vec{a}$ $(k\to\infty)$ からわかることは定義1.5より

$d(\vec{a}_k, \vec{a}) \to 0$ $(k\to\infty)$ です。ここから、

$a_1^k \to a_1$, $a_2^k \to a_2$ $(k\to\infty)$ を示せばよいのですが、このことは

$$|a_1^k - a_1| \to 0,\ |a_2^k - a_2| \to 0 \quad (k\to\infty)$$

を示すことと同じです。そのためには $\boxed{1.6}$ をうまく使う必要があります。それほど自明というわけではありません。

なお、

$$a_k \to a \quad (k\to\infty) \Longleftrightarrow |a_k - a| \to 0 \quad (k\to\infty)$$

の変形に慣れておくと、今後の講義で非常に役立ちます。今後も収束の概念がいろいろでてきますが、たいていの場合

$$|a_k - a| \text{ が } d(a_k, a) \text{ とか } \|a_k - a\| \text{ とか}$$

にかわるだけです。(このやり方で対応できないときは、けっこう専門的な話題に触れているということ)