解析概論C演習 コメント (4/17)

2.1 $a, b\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ のときは

$$|a-b|<\varepsilon \Rightarrow a<b+\varepsilon$$

となりますが, $\vec{a}, \vec{b}\in\mathbb{R}^2$, $\varepsilon>0$ のときは

$$\|\vec{a}-\vec{b}\|<\varepsilon \Rightarrow \|\vec{a}\|<\vec{b}+\varepsilon$$

とは絶対になりません. なぜなら, $\vec{b}$ はベクトル, ε はスカラー なので これらの和を考えることは通常ありえないからです.

2.3 定義2.1で, $f(\vec{x})\to\ell$ $(\vec{x}\to\vec{a})$ の定義は

$\underbrace{\forall\varepsilon>0 \text{ に対して}}_{①}$ $\underbrace{\exists\delta>0 \text{ s.t.}}_{②}$ $\underbrace{\forall\vec{x}\in D \text{ に対して}}_{③}$

$$\underbrace{0<d(\vec{x},\vec{a})<\delta}_{④} \Rightarrow \underbrace{|f(\vec{x})-\ell|<\varepsilon}_{⑤}$$

でした. ですから, 証明の大まかな枠組みは次のようになるはずです.

証明 $\underbrace{\forall\varepsilon>0 \text{ に対して}}_{①}$ $\underbrace{\delta:=\boxed{A}}_{②}$ とおく。このとき,

ここに何がかいてあるかが最も重要.

$\underbrace{\forall\vec{x}\in D \text{ に対して}}_{③}$ $\underbrace{0<d(\vec{x},\vec{a})<\delta \text{ ならば}}_{④}$

$$\boxed{B}$$

ここに理由をかく.

だから $\underbrace{|f(\vec{x})-\ell|<\varepsilon}_{⑤}$ となる. □

● 文字がでてくる順番をきちんとかくこと.

2.7 講義中に $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ と極座標変換して, $r\to 0$ を考えるとよいといいました. これは $r=\sqrt{x^2+y^2}=d((x,y),(0,0))$ となることからわかるのですが, 例2.1と例2.2でもう少し調べてみます.

例2.1

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r} = r\cos\theta\sin\theta$$

より

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \underbrace{r}_{\theta\text{の値に依らない}} \to 0 \quad (r\to 0)$$

例2.2

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2} = \cos\theta\sin\theta$$

例2.1は, $r\to 0$ としたときに θの値に依らずに $\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\to 0$ となることがわかりました. 他方, 例2.2は, $r\to 0$ としたときに $\frac{xy}{x^2+y^2}\to\cos\theta\sin\theta$ となり, θの値に応じて収束先がかわってしまうことがわかります. つまり $r\to 0$ としたときに, θの値に依らずに (θについて一様に) 収束するかどうかが 関数の収束の判定 として使えます.

なお, この方法は3変数以上でもほとんど同様に扱うことができます. $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ に対し $f(\vec{x})\to\ell$ $(\vec{x}\to\vec{0})$ が成り立つかどうかを調べるには, $\|\vec{\omega}\|=1$ となる $\vec{\omega}\in\mathbb{R}^n$ に対して $\vec{x}=r\vec{\omega}$ $(r>0)$ とかいたときに

$$|f(r\vec{\omega})-\ell|\to 0 \quad (r\to 0)$$

が $\vec{\omega}$ に依らない ($\vec{\omega}$について一様な) 収束であるかどうかで判定できます。

($\|\vec{x}\|=r$ となることに注意. 2変数のときは, $\vec{\omega}=(\cos\theta, \sin\theta)$ としていたわけです)