$\boxed{2.5}$ $y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ に対し、$\lim_{x\to 0} f(x,y) =: g(y)$ とおく。

$^\forall \varepsilon > 0$ に対し、$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = A$ より

①

$^\exists \delta > 0$ s.t. $^\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して

②

$$0 < d((x,y),(0,0)) < \delta \Rightarrow |f(x,y) - A| < \varepsilon \quad \text{—}(*)$$

となる。そこで $^\forall y \in \mathbb{R}$ に対し $0 < |y| < \frac{\delta}{2}$ と

③

仮定する。このとき、$\lim_{x\to 0} f(x,y) = g(y)$ だから、

$\boxed{4}$

$^\exists \delta_1 > 0$ s.t. $^\forall x \in \mathbb{R}$ に対して

$$0 < |x| < \delta_1 \Rightarrow |f(x,y) - g(y)| < \varepsilon$$

とできる。そこで、$x_0 = \frac{1}{2}\min\{\delta, \delta_1\}$ とおくと、

$0 < |x_0| < \delta_1$ かつ $0 < d((x_0,y),(0,0)) < \delta$

が成り立つので $(*)$ と $(**)$ より

$$|g(y) - A| \leq |g(y) - f(x_0,y)| + |f(x_0,y) - A|$$
$$< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

となるので $|g(y) - A| < 2\varepsilon$ が成り立つ。

従って $\lim_{y\to 0} g(y) = A$ が成り立つ $\boxed{5}$

□

◎前回の発表で問題だったのは、$\delta_1>0$ が y に依って決まるが、$\forall y\in\mathbb{R}$ が $\delta_1>0$ よりあとにでてきてしまったことである。この証明では、$\forall y\in\mathbb{R}$ を $\delta_1>0$ より前に書くことで論理的な問題点を回避している。

$\boxed{\text{定義3.1}}$　$f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$ に対して $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ は
$\forall\varepsilon>0$ に対して $\exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in(a,b)$ に対して

$$0<|x-x_0|<\delta \Longrightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$$

である。一方、f が x_0 で連続であるとは
$\forall\varepsilon>0$ に対して、$\exists\delta>0$ s.t. $\forall x\in(a,b)$ に対して

$$|x-x_0|<\delta \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

である。極限と連続の一番のちがいは、

「$0<|x-x_0|<\delta$ か $|x-x_0|<\delta$ か」である。

極限のときは、$0<|x-x_0|$ であるから、$x\neq x_0$ が仮定されているのに対し（$\boxed{2.4}$ の説明も参考）、連続では、$|x-x_0|<\delta$、つまり $|x-x_0|=0$ となってもよいので $x=x_0$ としてもよいことを主張している。つまり連続では $x\neq x_0$ を<u>仮定していない</u>。