〈連鎖公式 (Chain rule) について〉

まず、1変数のときを思いだしましょう。

$$f(x) = (x^2+1)^5, \quad g(y) = y^5$$

とすれば $y = (x^2+1)$ とおくことで $f(x) = g(y)$ となります。さて、

$$\frac{d}{dx}(f(x)) = 5(x^2+1)^4 2x = 2x\frac{d}{dy}(g(y))$$

となりますが、$f(x) = g(y)$ ですから

$$\frac{d}{dx} = 2x\frac{d}{dy}$$

となります。形式的には

$$\frac{d}{dx} = \frac{dy}{dx}\frac{d}{dy} = 2x\frac{d}{dy}$$

と覚えられます。すると、$(x^2+1)^{10}$ を計算する際に

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^2+1)^{10} &= \frac{d}{dx}y^{10} \\ &= 2x\frac{d}{dy}(y^{10}) \qquad \left(\because \frac{d}{dx} = 2x\frac{d}{dy}\right) \\ &= 20xy^9 = 20x(x^2+1)^9\end{aligned}$$

とできるわけです。一見わかりにくいかもしれませんが偏微分での連鎖公式はこの「微分記号のおきかえ」に対応しています。

$\boxed{6.1}$ で $f(x,y)=g(r,\theta)$ として.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial g}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial g}{\partial\theta},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial g}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial g}{\partial\theta} \quad \text{—}(*)$$

でした. すると

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos\theta\frac{\partial g}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial g}{\partial\theta}\right)$$

ですから $(*)$ で $\cos\theta\frac{\partial g}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial g}{\partial\theta}$ をあらためて

g と思えば

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial g}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial g}{\partial\theta}\right)$$
$$-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cos\theta\frac{\partial g}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial g}{\partial\theta}\right) \quad \text{—}(**)$$
$$=\left(\cos^2\theta\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\cos\theta\sin\theta\frac{\partial g}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{r}\sin^2\theta\frac{\partial g}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 g}{\partial\theta\partial r}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial g}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\sin^2\theta\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}\right)$$

となります(積の微分公式をひたすら使う。見るより、手を動かさないとこれはわかりません!!). $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ も同様に計算することで

$$\Delta f = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta}$$

が得られます。たとえば

$$f(x,y) := \log(x^2+y^2) = \log r =: g(r,\theta)$$

とすると、

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$= -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} = 0$$

ですから $\Delta f = 0$ が得られます。

さて、(**) の式で f や g はとくに計算に影響がないので

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\cos\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right)$$

$$= \left(\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\cos\theta\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r}\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2}{\partial r\partial \theta}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{r}\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2}{\partial \theta\partial r}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r^2}\sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\sin^2\theta\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)$$

としてもよいことがわかります。すると、たとえば

$p \in \mathbb{R}$ に対して

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\|(x.y)\|^{p}\right) = \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)r^{p}$$

$$= \cos\theta\left(p r^{p-1}\right)$$

$$= p\,\|(x.y)\|^{p-2}x, \quad (\because r\cos\theta = x)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\|(x,y)\|^{p}\right) = \left(\cos^2\theta\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial r}\right)r^{p}$$

($\because$ θに関する偏微分はOになる)

$$= \cos^2\theta\left(p(p-1)r^{p-2}\right) + \frac{1}{r}\sin^2\theta\left(p r^{p-1}\right)$$

$$= p\,\|(x.y)\|^{p-4}\left((p-1)x^2 + y^2\right)$$

$(\because x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)$

と計算できます。$\|(x.y)\|^{p} = (x^2+y^2)^{\frac{p}{2}}$ を

xについて偏微分を計算するより楽にできる

でしょう。