〈極限の扱い方〉

例

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+2}{3n-4}$$ を考える。

高校まで

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+2}{3n-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{2}{n}}{3-\frac{4}{n}}=\frac{5}{3}$$

数学科では

$$\left|\frac{5n+2}{3n-4}-\frac{5}{3}\right|=\left|\frac{26}{9n-12}\right|\to 0 \quad (n\to\infty)$$

より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{5n+2}{3n-4}=\frac{5}{3}$.

つまり $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=a$ を示すには

「$|a_n-a|\to 0 \quad (n\to\infty)$」

を示せばよいということ。とくに、$|a_n-a|$ を考えることが大切である。$|a_n-a|$ が a_n と a の距離 ということに注意すれば、

距離空間における収束は、次のように定義すればよいことがわかる。

定義

距離空間 (X, d) において、点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ が $x \in X$ に収束する

$\overset{\Longleftrightarrow}{\text{定義}}$ $d(x_n, x) \to 0 \quad (n \to \infty)$

（ε−N論法でかくなら、
$\forall \varepsilon > 0$ に対して、$\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geq N$ に対して $d(x_n, x) < \varepsilon$）

距離は非負だから絶対値はいらない

◎定義は覚えなければならないものであるが、一度覚えたあと、自分でその意味を考えて、自分で導出できるようになるとなおよい。

例

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2 + x(y-1)}{d((x,y),(0,1))} = 0$$

これを高校までのように

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2 + x(y-1)}{d((x,y),(0,1))}$$

をあれこれどうこうしても

たいてい失敗する。この極限を考えるなら

$$\left| \frac{x^2 + x(y-1)}{d((x,y),(0,1))} - 0 \right|$$

を考えるべきである。

このとき、絶対値に関する自明な不等式

$$0 \leq \left| \frac{x^2+x(y-1)}{d((x,y),(0,1))} - 0 \right|$$

があるから、0に収束する関数で上から評価できればよい。

証明

$$\left| \frac{x^2+x(y-1)}{d((x,y),(0,1))} \right| \leq \frac{|x|^2}{d((x,y),(0,1))} + \frac{|x||y-1|}{d((x,y),(0,1))}$$

($\because$ 三角不等式)

$$\leq \frac{d((x,y),(0,1))^2}{d((x,y),(0,1))} + \frac{d((x,y),(0,1))^2}{d((x,y),(0,1))}$$

$$\left(\begin{aligned} \because\ |x| &\leq d((x,y),(0,1)) \\ |y-1| &\leq d((x,y),(0,1)) \end{aligned} \right)$$

$$= 2d((x,y),(0,1))$$

$$\longrightarrow 0 \qquad (x,y) \to (0,1)$$

となるから $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2+x(y-1)}{d((x,y),(0,1))} = 0$ となる

D.

注意

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)}$ ということは $d((x,y),(0,1))\to 0$ ということ

であった。$|x|\to 0$, $|y-1|\to 0$ であることを用いるよりも

$d((x,y),(0,1))\to 0$ を用いる方がよい。

注意

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{x^2+x(y-1)}{d((x,y),(0,1))}\leq\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{x^2+x(y-1)}{|x|}$$

は 議論の進め方として正しくない(たまたま正しいだけ).

なぜなら (分子) ≦ 0 となっているかもしれないからである.

他方

$$\left|\frac{x^2+x(y-1)}{d((x,y),(0,1))}\right|\leq\frac{|x^2+x(y-1)|}{|x|}$$

は正しい. なぜなら (分子)≧0 だからである.

絶対値があるのは一見難しいと思うかもしれないが

常に0以上という観点と不等式を作るうえでは.

むしろ易しくなることを理解して欲しい。