解析概論 $\mathbf{C}$ 演習 中間試験問題

2015 年 6 月 19 日 第 3 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1 は全員が答えよ. 問題 2, 問題 3 から 1 題以上, 問題 4, 問題 5 から 1 題以上を選択して答えよ.

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ に対し

$$(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$
$$\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \tag{1.1}$$
$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$

と定める.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, 答えのみを書くこと.

(1) 次の問いに答えよ.
- (a) $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$, $\varepsilon > 0$ に対して $\boldsymbol{x}$ の ε-近傍 $U_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ の定義を書け.
- (b) 集合 $U \subset \mathbb{R}^3$ が開集合であることの定義を書け.
- (c) 点列 $\{\boldsymbol{a}_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^3$ が $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ に収束することの定義を書け. なお, ε-N 論法を用いなくてもよい.
- (d) 集合 $F \subset \mathbb{R}^3$ に対して, F は閉集合となることと同値な条件を点列を用いて書け. ただし, 「$\mathbb{R}^3 \setminus F$ が開集合であること」は答えとして認めない.
- (e) 集合 $D \subset \mathbb{R}^3$, 関数 $f : D \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$, $l \in \mathbb{R}$ に対して,
$$f(\boldsymbol{x}) \to l \quad (\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a})$$
であることの定義を ε-δ 論法を用いて書け.
- (f) 集合 $D \subset \mathbb{R}^3$, 関数 $f : D \to \mathbb{R}$ が $\boldsymbol{x}_0 \in D$ で連続であることを ε-δ 論法を用いて書け.

(2) 関数 $f : \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\}) \to \mathbb{R}$ を
$$f(x, y) := \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \quad ((x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\}))$$
で定義する. なお, arctan は tan の逆関数である.
- (a) f の勾配 ∇f を求めよ.
- (b) f の Hesse 行列 $D^2 f$ を求めよ.
- (c) f の Laplacian Δf を求めよ.

(3) ベクトル値関数 $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) := (x^2y, -2xz, 2yz) \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$$

で定義する.

(a) $\boldsymbol{F}$ の発散 $\operatorname{div}\boldsymbol{F}$ を求めよ.

(b) $\boldsymbol{F}$ の Jacobian $\det J\boldsymbol{F}$ を求めよ.

(c) $\boldsymbol{F}$ の回転 $\operatorname{rot}\boldsymbol{F}$ を求めよ.

(d) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\boldsymbol{F})$ を求めよ.

(4) 関数 $f = f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対して,

$$g(r,\theta) := f(r\cos\theta, r\sin\theta) \quad ((r,\theta) \in (0,\infty) \times (-\pi,\pi))$$

とおく. また, $\phi(r,\theta) := (r\cos\theta, r\sin\theta)$ とおく.

(a) r を x と y を用いて表せ.

(b) $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)$ を $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を用いて表わせ.

(c) $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$ を $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を用いて表わせ.

(d) ϕ の Jacobian $\det J\phi(r,\theta)$ を求めよ.

(5) 滑らかな関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が定数 $a_0, a_i, a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i,j = 1,2)$ を用いて

$$f(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{21}yx + a_{22}y^2 + \cdots$$

と書けたとする. ただし, $\cdots$ は x, y について 3 次以上の多項式であるとする.

(a) a_0 を f を用いて表せ.

(b) ベクトル (a_1, a_2) を f を用いて表せ.

(c) 行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ を f を用いて表せ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

問題 2.

$f, g : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ に対して,

$$\alpha := \lim_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}} f(\boldsymbol{x}), \quad \beta := \lim_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}} g(\boldsymbol{x})$$

が存在するとする. このとき. $\lim_{\boldsymbol{x}\to\mathbf{0}}(f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x})) = \alpha+\beta$ となることを ε-δ 論法を用いて証明せよ. なお, 証明にあたって, (1.1) の記号は断わりなしに用いてよい.

問題 3.

$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ に対して, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ で連続であるとする. このとき, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して 関数のスカラー倍 λf が $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ で連続であることを ε-δ 論法を用いて証明せよ. なお, 証明にあたって, (1.1) の記号は断わりなしに用いてよい.

問題 4.

開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, Ω 上の関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$, Ω 上のベクトル値関数 $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ に対して, 次を示せ. なお, f や $\boldsymbol{F}$ は何回でも微分可能であるとする.

(1) すべての $\boldsymbol{x} \in \Omega$ に対して $\mathrm{rot}(\nabla f(\boldsymbol{x})) = \mathbf{0}$.

(2) すべての $\boldsymbol{x} \in \Omega$ に対して

$$\mathrm{div}(f\boldsymbol{F})(\boldsymbol{x}) = (\nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})) + f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$$

問題 5.

滑らかな関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ はある関数 $g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を用いて $f(x,y) = g(|(x,y)|)$ と書けるとする. つまり, 極座標変換を用いたときに

$$f(x,y) = g(r), \quad (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta), \quad (r,\theta) \in (0,\infty)\times(-\pi,\pi)$$

となり, g が θ に依らないと仮定する.

(1) $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ を $\dfrac{\partial g}{\partial r} = g'$ を用いて表せ.

(2) $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を $\dfrac{\partial g}{\partial r} = g'$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} = g''$ を用いて表せ.

(3) 二変数関数 $\log(x^2+y^2)$ が調和関数であることを示せ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

$\boxed{\text{問題 1}}$

(1) (a) $U_\varepsilon(\vec{x}) := \{\vec{y} \in \mathbb{R}^3 : d(\vec{x}, \vec{y}) < \varepsilon\}$

(b) ${}^\forall \vec{x} \in U$ に対して ${}^\exists \varepsilon > 0$ s.t. $U_\varepsilon(\vec{x}) \subset U$

(c) $d(\vec{a}_k, \vec{a}) \to 0 \quad (k \to \infty)$

(d) ${}^\forall \{\vec{a}_k\}_{k=1}^\infty \subset F,\ \vec{a} \in \mathbb{R}^3$ に対して

$\vec{a}_k \to \vec{a} \quad (k \to \infty) \Rightarrow \vec{a} \in F$

(e) ${}^\forall \varepsilon > 0$ に対して ${}^\exists \delta > 0$ s.t. ${}^\forall \vec{x} \in D \setminus \{\vec{a}\}$ に対し

$0 < d(\vec{x}, \vec{a}) < \delta \Rightarrow |f(\vec{x}) - \ell| < \varepsilon$

(f) ${}^\forall \varepsilon > 0$ に対して ${}^\exists \delta > 0$ s.t. ${}^\forall \vec{x} \in D$ に対し

$d(\vec{x}, \vec{x}_0) < \delta \Rightarrow |f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| < \varepsilon$

(2) (a) $\left(\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ (b) $\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} -2xy & x^2-y^2 \\ x^2-y^2 & 2xy \end{pmatrix}$

(c) 0

(3) (a) $2xy + 2y$ (b) $12x^2yz$ (c) $(2x+2z, 0, -2z-x^2)$

(d) $(0, 2+2x, 0)$

(4) (a) $r = \sqrt{x^2+y^2}$ (b) $\cos\theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}$

(c) $-r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}$ (d) r

(5) (a) $f(0,0)$ (b) $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)$

(c) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix}$

問題2

$\forall \varepsilon > 0$ に対し $\alpha = \lim_{\vec{x} \to \vec{0}} f(\vec{x})$, $\beta := \lim_{\vec{x} \to \vec{0}} g(\vec{x})$ より

$\exists \delta_1 > 0$ s.t. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ に対し $0 < d(\vec{x}, \vec{0}) < \delta_1 \Rightarrow |f(\vec{x}) - f(\vec{0})| < \varepsilon/2$,

$\exists \delta_2 > 0$ s.t. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ に対し $0 < d(\vec{x}, \vec{0}) < \delta_2 \Rightarrow |g(\vec{x}) - g(\vec{0})| < \varepsilon/2$

とできる. $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ とおけば $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ に対し

$0 < d(\vec{x}, \vec{0}) < \delta$ ならば

$$
\begin{aligned}
|(f(\vec{x}) + g(\vec{x})) - (\alpha + \beta)| &\leq |f(\vec{x}) - \alpha| + |g(\vec{x}) - \beta| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \left(\because \begin{array}{l} 0 < d(\vec{x}, \vec{0}) < \delta \leq \delta_1, \\ 0 < d(\vec{x}, \vec{0}) < \delta \leq \delta_2 \end{array} \right) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

が得られる.

問題3

$\forall \varepsilon > 0$ に対し f が $\vec{x} = \vec{a}$ で連続なので $\exists \delta > 0$ s.t. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$ に対し

$$
d(\vec{x}, \vec{a}) < \delta \Rightarrow |f(\vec{x}) - f(\vec{a})| < \frac{\varepsilon}{1 + |\lambda|}
$$

とできる. この $\delta > 0$ に対し $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$ に対し $d(\vec{x}, \vec{a}) < \delta$ ならば

$$
\begin{aligned}
|\lambda f(\vec{x}) - \lambda f(\vec{a})| &= |\lambda| \, |f(\vec{x}) - f(\vec{a})| \\
&< \frac{|\lambda|}{1 + |\lambda|} \varepsilon \qquad (\because d(\vec{x}, \vec{a}) < \delta) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

が得られる.

問題4

(1) $\nabla f = (f_{x_1}, f_{x_2}, f_{x_3})$ より

$$\mathrm{rot}(\nabla f) = (f_{x_3x_2} - f_{x_2x_3},\ f_{x_1x_3} - f_{x_3x_1},\ f_{x_1x_2} - f_{x_2x_1})$$
$$= \vec{0}$$

(2)
$$\mathrm{div}(f\vec{F}) = (fF_1)_{x_1} + (fF_2)_{x_2} + (fF_3)_{x_3}$$
$$= f_{x_1}F_1 + fF_{1x_1} + f_{x_2}F_2 + fF_{2x_2} + f_{x_3}F_3 + fF_{3x_3}$$
$$= (f_{x_1}F_1 + f_{x_2}F_2 + f_{x_3}F_3) + f(F_{1x_1} + F_{2x_2} + F_{3x_3})$$
$$= \nabla f \cdot \vec{F} + f\,\mathrm{div}\,\vec{F}$$

問題5

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}(g(r)) = \dfrac{\partial g}{\partial r}(r)\cdot\dfrac{\partial r}{\partial x}$

であり $r = \sqrt{x^2+y^2}$ より $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{x}{r}$ だから $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r}$.

従って $\nabla f = \dfrac{(x,y)}{r}g'$ となる.

(2)
$$\Delta f = \mathrm{div}(\nabla f) = \left(x\frac{g'}{r}\right)_x + \left(y\frac{g'}{r}\right)_y$$
$$= \frac{g'}{r} + x\left(\frac{g'}{r}\right)_x + \frac{g'}{r} + y\left(\frac{g'}{r}\right)_y$$

となる. ここで $\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{x}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}$, $\dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{y}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}$ (上の議論で得られたもの)

を用いると

$$\left(\frac{g'}{r}\right)_x = \frac{x}{r}\left(\frac{g'}{r}\right)_r = \frac{x}{r}\left(\frac{1}{r}g'' - \frac{1}{r^2}g'\right),$$
$$\left(\frac{g'}{r}\right)_y = \frac{y}{r}\left(\frac{g'}{r}\right)_r = \frac{y}{r}\left(\frac{1}{r}g'' - \frac{1}{r^2}g'\right)$$

だから $r^2 = x^2+y^2$ に注意すると $\Delta f = g'' + \dfrac{1}{r}g'$ が得られる.

(3) $\log(x^2+y^2) = 2\log r$ を上の Δf にあてはめると

$$\Delta \log(x^2+y^2) = 2\left((\log r)'' + \frac{1}{r}(\log r)'\right) = 0$$