解析概論C演習 期末試験問題

2015年7月24日 第3時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1 は全員が答えよ. 問題 2 以降については, 2 題以上を選択して答えよ. なお,「極値となるか答えよ」の問いについては, 極値になる場合は「極大」か「極小」かも答えること. また, 必要に応じて $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ などの略記を用いてよい.

問題 1.

次の各問いに答えよ. ただし, 答えのみを書くこと.

(1) $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ とおく.
  (a) $\nabla f(x, y)$ を求めよ.
  (b) $D^2 f(x, y) = \mathrm{Hesse} f(x, y)$ を求めよ.
  (c) $(x, y) = (0, 0)$ で極値となるかを判定せよ.

(2) $f(x, y, z) = xyz(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ とおく. 記述を簡単にするために, $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ とおく. 答えに $g(x, y, z)$ を用いてもよい (g_x などの微分は用いないこと).
  (a) $\nabla f(x, y, z)$ を求めよ.
  (b) $D^2 f(x, y, z) = \mathrm{Hesse} f(x, y, z)$ を求めよ.
  (c) $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ で極値となるかを判定せよ.

(3) 滑らかな関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ は すべての $y \in \mathbb{R}$ に対して $\dfrac{\partial f}{\partial y}(y) \neq 0$ をみたすとする. $f(x, \phi(x)) = 0$ によって定義された陰関数 $\phi(x)$ について, 次の問いに答えよ.
  (a) ϕ' を f, f_x, f_y を用いて表せ.
  (b) ϕ'' を f, f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} を用いて表せ.

(4) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ により与えられる陰関数 $z(x, y)$ を考える.
  (a) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ を x, y, z のみを用いて表せ.
  (b) $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ を x, y, z のみを用いて表せ.
  (c) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ を x, y, z のみを用いて表せ.
  (d) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ を x, y, z のみを用いて表せ.

(5) $f = f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を滑らかな関数とする.

(a) $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して, $g(t) := \dfrac{d}{dt} f(t(v_1, v_2))$ を計算せよ.

(b) $g(0)$ を f の微分を用いて表せ.

(c) $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して,

$$h(s, t) := \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial}{\partial t} f(t(v_1, v_2) + s(w_1, w_2))$$

を計算せよ.

(d) $h(0, 0)$ を f の微分を用いて表せ.

(6) $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\rho(t, \boldsymbol{x}) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{4t}\right) \qquad (t > 0,\ \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$$

とおく.

(a) $\dfrac{\partial \rho}{\partial x_1}(t, \boldsymbol{x}) = C_1(t, \boldsymbol{x})\rho(t, \boldsymbol{x})$ と書いた時の $C_1(t, \boldsymbol{x})$ を求めよ.

(b) $\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial x_1^2}(t, \boldsymbol{x}) = C_2(t, \boldsymbol{x})\rho(t, \boldsymbol{x})$ と書いた時の $C_2(t, \boldsymbol{x})$ を求めよ.

(c) $\dfrac{\partial \rho}{\partial t}(t, \boldsymbol{x}) = C_3(t, \boldsymbol{x})\rho(t, \boldsymbol{x})$ と書いた時の $C_3(t, \boldsymbol{x})$ を求めよ.

(d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2}(t, \boldsymbol{x}) = C_4(t, \boldsymbol{x})\rho(t, \boldsymbol{x})$ と書いた時の $C_4(t, \boldsymbol{x})$ を求めよ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

問題 2.

周長が $L > 0$ の三角形の中で, 最大の面積を持つものは何か？証明をつけて答えよ.

問題 3.

$f(x, y) = x^2 + y^2 + y^3$ における極値と, それを与える点を求めよ.

問題 4.

$x, y \in \mathbb{R}$ が $x^2 + y^4 = 5$ をみたすとき, $x^2 y$ の最大値と最小値, およびそれらを与える x, y の組をすべて求めよ.

問題 5.

$n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ に対して

$$\Gamma(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{n-2}{2}}} \qquad (\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\})$$

とおく. Γ が $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ 上で調和関数であることを示せ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

問題 1 の略解

(1)
- (a) $(3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)$
- (b) $\begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$
- (c) 極値とならない

(2)
- (a) $(yz(2x^2 + g(x,y,z)), zx(y^2 + g(x,y,z)), xy(z^2 + g(x,y,z)))$
- (b) $\begin{pmatrix} 6xyz & z(2x^2+2y^2+g(x,y,z)) & y(2x^2+2z^2+g(x,y,z)) \\ z(2x^2+2y^2+g(x,y,z)) & 6xyz & x(2y^2+2z^2+g(x,y,z)) \\ y(2x^2+2z^2+g(x,y,z)) & x(2y^2+2z^2+g(x,y,z)) & 6xyz \end{pmatrix}$
- (c) 極値とならない

(3) 括弧の $(x, \phi(x))$ は省略して書く (書いていなかったとしても不正解としない)
- (a) $-\dfrac{f_x}{f_y}$
- (b) $-\dfrac{f_y^2 f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + f_x^2 f_{yy}}{f_y^3}$

(4)
- (a) $-\dfrac{x}{z}$
- (b) $-\dfrac{y}{z}$
- (c) $-\dfrac{x^2 + z^2}{z^3}$
- (d) $-\dfrac{xy}{z^3}$

(5)
- (a) $f_x(t(v_1, v_2))v_1 + f_y(t(v_1, v_2))v_2$
- (b) $f_x(0,0)v_1 + f_y(0,0)v_2$ または $\nabla f(0,0) \cdot \boldsymbol{v}$
- (c) $f_{xx}v_1w_1 + f_{xy}(v_1w_2 + v_2w_1) + f_{yy}v_2w_2$ $((t(v_1, v_2) + s(w_1, w_2))$ を省略して書いた)
- (d) $f_{xx}(0,0)v_1w_1 + f_{xy}(0,0)(v_1w_2 + v_2w_1) + f_{yy}(0,0)v_2w_2$ または $(D^2 f(0,0)\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})$

(6)
- (a) $-\dfrac{x_1}{2t}$
- (b) $-\dfrac{1}{2t} + \dfrac{x_1^2}{4t}$
- (c) $-\dfrac{n}{2t} + \dfrac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{4t}$
- (d) $-\dfrac{n}{2t} + \dfrac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{4t}$