解析概論 C 演習　(2015 年 4 月 10 日)

1.1. **ベクトル空間の位相 (点列の収束).** 今日の話で極限に関する事項については, ε-N 論法を用いなくてもよい.

定義 1.1.
$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対し

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) &:= x_1 y_1 + x_2 y_2 \\ \|\boldsymbol{x}\| &:= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} (= \sqrt{(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x})}) \\ d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &:= \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|\end{aligned}$$

と定める.

問題 1.1 (Schwarz の不等式)**.**
任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ に対して, Schwarz の不等式

$$|(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y})| \leq \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{y}\|$$

を示せ (絶対値の記号をベクトルとスカラーで使いわけていることに注意せよ).

問題 1.2 (三角不等式)**.**
次の各問いに答えよ.

(1) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2$ に対して,

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$$

を示せ.

(2) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^2$ に対して,

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$$

を示せ.

定義 1.2.
$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$, $\varepsilon > 0$ に対して

$$U_\varepsilon(\boldsymbol{x}) := \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2 : d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < \varepsilon\}$$

を $\boldsymbol{x}$ の ε-近傍という.

定義 1.3 (開集合)**.**
集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ が**開集合**であるとは「任意の $\boldsymbol{x} \in U$ に対して, ある $\varepsilon > 0$ が存在して $U_\varepsilon(\boldsymbol{x}) \subset U$」が成り立つことをいう.

問題 1.3.
次の各問いに答えよ.

(1) $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$, $\varepsilon > 0$ に対して, $U_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ を図示せよ.

(2) 集合 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\boldsymbol{x}\| < 1\}$ を図示し, この集合が開集合であることを示せ.

定義 1.4 (閉集合)**.**
集合 $F \subset \mathbb{R}^2$ が**閉集合**であるとは, $\mathbb{R}^2 \setminus F$ が開集合となることをいう.

問題 1.4.
　集合 $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\}$ を図示し, この集合が閉集合であることを示せ.

問題 1.5.
　集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ を

$$A := \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|\boldsymbol{x}\| = 1,\ x_1 > 0\} \cup \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\boldsymbol{x}\| < 1\}$$

とおく.

(1) A を図示せよ.
(2) A は開集合でも閉集合でもないことを示せ.

定義 1.5.
　点列 $\{\boldsymbol{a}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^2$ が $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ に収束するとは「$d(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}) \to 0\ (k \to \infty)$」が成り立つことをいう. このとき, $\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{a}$ と書いたり, $\boldsymbol{a}_k \to \boldsymbol{a}\ (k \to \infty)$ と書いたりする.

問題 1.6.
　$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して, 次の問いに答えよ.

(1) $|x_1 - y_1| \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $|x_2 - y_2| \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ を示せ.
(2) $d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ を示せ.

問題 1.7.
　$\boldsymbol{a}_k = (a_1^k, a_2^k) \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して, 次が同値になることを示せ. なお, ε-N 論法を用いなくてよい.

(a) $\boldsymbol{a}_k \to \boldsymbol{a}\ (k \to \infty)$
(b) $a_1^k \to a_1$ かつ $a_2^k \to a_2\ (k \to \infty)$.

解析概論 C 演習　(2014 年 4 月 17 日)

2.1. **ベクトル空間の位相 (関数の収束).** 今日の話は ε - N 論法, ε - δ 論法を使って証明すること.

問題 2.1.

点列 $\{\boldsymbol{a}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^2$ が $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ に収束するとき, $\{\boldsymbol{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$ が有界であること, すなわち, ある $M > 0$ が存在して, すべての $k \in \mathbb{N}$ に対して $\|\boldsymbol{a}_k\| \leq M$ となることを示せ.

問題 2.2.

点列 $\{\boldsymbol{a}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^2$ が $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ と $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ に収束するとき, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ となることを示せ.

定義 2.1.

集合 $D \subset \mathbb{R}^2$, 関数 $f : D \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$, $l \in \mathbb{R}$ に対して, $f(\boldsymbol{x}) \to l$ $(\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a})$ であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $\boldsymbol{x} \in D$ に対して

$$0 < d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) < \delta \Longrightarrow |f(\boldsymbol{x}) - l| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう. このとき, $\displaystyle\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = l$ と書くこともある.

例 2.1.

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ となる.

証明.

ε-δ 論法を用いない証明を与える. $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して, $2|xy| \leq x^2 + y^2$ より

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2} d((x,y),(0,0)) \to 0 \quad ((x,y) \to (0,0))$$

となるので, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ がわかる. □

問題 2.3.

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ を ε-δ 論法を用いて証明せよ.

問題 2.4.

$\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}\right)$ と $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2}\right)$ をそれぞれ求めよ (ε-δ 論法を用いなくてよい).

例 2.2.

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ は存在しない.

証明.

$m \in \mathbb{R}$ に対して, 直線 $y = mx$ 上で点 (x, y) を $(0, 0)$ に近づけると

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{mx^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{m}{1+m^2} \to \frac{m}{1+m^2} \quad (x \to 0)$$

となり, m の値に応じて, $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ の近づく値が変化する. 従って, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ は存在しない. $\square$

注意 2.1.
一変数関数の極限の計算は, グラフを書いてどのように近づくかを考えるのが比較的有効であった. しかし, 多変数関数について $z=f(x,y)$ のグラフを書いて, $(x,y)=(0,0)$ の様子をみようにも, グラフを書くことがそもそも難しい (空間図形を書くのは難しい). このようなときに有効になるのが, $m\in\mathbb{R}$ を傾きとする直線 $y=mx$ 上でのグラフの断面 $z=f(x,mx)$ を考えて x-z 変数に関するグラフを書いてみることである. これでうまくいくから大丈夫というわけではないが, 関数のグラフの形状を調べるには, 断面を考えて一変数の話にしてしまう方法は有効である.

問題 2.5.
関数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ はすべての $y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ に対して

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =: A, \quad \lim_{x\to 0} f(x,y)$$

が存在すると仮定する. このとき $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$ が存在して, $\displaystyle\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)=A$ となることを証明せよ.

問題 2.6.
$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ が存在するかどうかを調べよ.

問題 2.7.
$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{\sqrt{x^4+y^2}}$ が存在するかどうかを調べよ.

解析概論 C 演習　(2014 年 4 月 24 日)

3.1. **ベクトル空間の位相 連続関数.**

定義 3.1.
集合 $D \subset \mathbb{R}^2$, 関数 $f : D \to \mathbb{R}$ が $\boldsymbol{x}_0 \in D$ で連続であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $\boldsymbol{x} \in D$ に対して

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) < \delta \Longrightarrow |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう. また, $f : D \to \mathbb{R}$ が D 上連続であるとは, 任意の $\boldsymbol{x} \in D$ に対して, f が $\boldsymbol{x}$ で連続であることをいう.

問題 3.1.
集合 $D \subset \mathbb{R}^2$, 点 $\boldsymbol{x}_0 \in D$ に対し, 関数 $f : D \to \mathbb{R}$ は, 任意の点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ に対して,

$$\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_0 \quad (k \to \infty) \Longrightarrow f(\boldsymbol{x}_k) \to f(\boldsymbol{x}_0) \quad (k \to \infty)$$

が成り立つと仮定する. このとき, f は $\boldsymbol{x}_0$ で連続となることを示せ.

問題 3.2.
集合 $D \subset \mathbb{R}^2$ に対し, $f : D \to \mathbb{R}$ は $\boldsymbol{x}_0 \in D$ で連続であると仮定する. このとき, 次が成り立つことを示せ: 任意の点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ に対して,

$$\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_0 \quad (k \to \infty) \Longrightarrow f(\boldsymbol{x}_k) \to f(\boldsymbol{x}_0) \quad (k \to \infty)$$

が成り立つ.

問題 3.1, 3.2 より, 次がわかる.

定理 3.1.
集合 $D \subset \mathbb{R}^2$, 関数 $f : D \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}_0 \in D$ に対して, 次は同値となる.
(a) f は $\boldsymbol{x}_0$ で連続となる.
(b) 任意の点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ に対して,

$$\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_0 \quad (k \to \infty) \Longrightarrow f(\boldsymbol{x}_k) \to f(\boldsymbol{x}_0) \quad (k \to \infty)$$

が成り立つ.

問題 3.3.
集合 $D \subset \mathbb{R}^2$ に対して, 関数 $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ は $\boldsymbol{x}_0 \in D$ で連続であるとする. このとき, $f + g$ も $\boldsymbol{x}_0$ で連続となることを示せ. なお, $\boldsymbol{x} \in D$ に対して

$$(f + g)(\boldsymbol{x}) := f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{x})$$

である.

問題 3.4.
集合 $D \subset \mathbb{R}^2$ に対して, 関数 $f : D \to \mathbb{R}$, は $\boldsymbol{x}_0 \in D$ で連続であるとする. このとき, 任意の $k \in \mathbb{R}$ に対して kf も $\boldsymbol{x}_0$ で連続となることを示せ. なお, $\boldsymbol{x} \in D$ に対して

$$(kf)(\boldsymbol{x}) := kf(\boldsymbol{x})$$

である.

問題 3.5.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して $f(\boldsymbol{x}) := \|\boldsymbol{x}\|$ で定義する．このとき, f は $\mathbb{R}^2$ 上連続となることを示せ.

問題 3.6.

集合 $F \subset \mathbb{R}^2$ は閉集合であるとする．このとき, 任意の点列 $\{\boldsymbol{a}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset F$ に対して, $\{\boldsymbol{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$ が $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ に収束するならば, $\boldsymbol{a} \in F$ が成り立つことを示せ.

問題 3.7.

集合 $F \subset \mathbb{R}^2$ は, 任意の点列 $\{\boldsymbol{a}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset F$ に対して, $\{\boldsymbol{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$ が $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ に収束するならば, $\boldsymbol{a} \in F$ が成り立つと仮定する．このとき, F が閉集合であることを示せ.

問題 3.6, 3.7 より, 次がわかる.

定理 3.2.

集合 $F \subset \mathbb{R}^2$ に対して, 次は同値となる.

(a) F は閉集合となる.

(b) 任意の点列 $\{\boldsymbol{a}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset F$ に対して, $\{\boldsymbol{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$ が $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ に収束するならば, $\boldsymbol{a} \in F$ が成り立つ.

問題 3.8.

$D \subset \mathbb{R}^2$ を有界閉集合とする．このとき, D 上連続な関数 $f : D \to \mathbb{R}$ は D 上一様連続であることを示せ．すなわち, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}' \in D$ に対して

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}') < \delta \Longrightarrow |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}')| < \varepsilon$$

が成り立つことを示せ.

解析概論 C 演習　(2015 年 5 月 8 日)

4.1. **偏微分の計算.**

問題 4.1.

次の関数 f に対して $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めよ.

(1) $f(x,y) = e^{xy} \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$
(2) $f(x,y) = \log(x^2+y^2) \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$
(3) $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (\{0\} \times \mathbb{R}))$

問題 4.2.

$f(x,y) := \log(x^2+y^2) \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ に対して $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ を求めよ. さらに $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ を示せ.

定義 4.1 (Laplace 作用素, Laplacian)**.**

開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ と $f = f(x,y) : \Omega \to \mathbb{R}$ に対し[1],

$$\Delta f(x,y) := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \quad ((x,y) \in \Omega)$$

と定義する. Δ を (二次元)**Laplace 作用素**とか **Laplacian** という.

問題 4.3.

$f(t,x,y) := \dfrac{1}{4\pi t} \exp\left(-\dfrac{x^2+y^2}{4t}\right) \quad ((t,x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^2)$ に対して, $\dfrac{\partial f}{\partial t}, \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ を求めよ. さらに, $\dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \Delta f$ となることを示せ[2].

問題 4.4.

$f(x,y,z) := \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\})$ とおく. このとき

$$\nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right), \qquad D^2 f := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

を計算せよ. さらに, $\Delta f(x,y,z) := \mathrm{tr}(D^2 f(x,y,z)) = 0$ を示せ.

---

[1] この講義では, $f = f(x,y)$ は座標変数を x, y で用いるという意味で使う. 微分を考えるときには, 独立変数をどの文字で置くかを明らかにさせておかないと, 具体的な計算で混乱を生じることがある.

[2] 未知関数 $u(t,x,y)$ に関する方程式 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u$ を熱方程式や拡散方程式という.

定義 4.2.

開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ と $f = f(x, y, z) : \Omega \to \mathbb{R}$ に対し,

$$\nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right), \qquad D^2 f := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

とおく. ∇f を f の**グラディエント (gradient)** や**勾配**という. $D^2 f$ を f の **Hesse 行列**という. また, $\Delta f(x, y, z) := \mathrm{tr}(D^2 f(x, y, z))$ とおき, Δf を f の (三次元)**Laplace 作用素**や **Laplacian** という.

定義 4.3.

$n = 2$ または $n = 3$ とする[3]. 開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ と $f : \Omega \to \mathbb{R}$ に対し $\Delta f = 0$ となる関数 f を**調和関数**という. また, $\Delta f = 0$ を Laplace 方程式という.

問題 4.5.

$f(t, x, y, z) := \dfrac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{4t} \right) \quad ((t, x, y, z) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$ とおく. このとき, $\dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f$ となることを示せ.

問題 4.6.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して

$$u(t, x) := \frac{1}{2}(f(x + t) + f(x - t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(\xi)\, d\xi$$

とおく.

(1) $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ を f', f'', g, g' を用いて表せ.

(2) 次が成り立つことを示せ[4].

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) \qquad ((t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}) \\ u(0, x) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0, x) = g(x) \quad (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

問題 4.7.

次の関数 f に対して, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ が存在することを示せ.

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

---

[3] 実際には, n は自然数であればなんでもよい.

[4] 未知関数 $u = u(t, x)$ に関する方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を (一次元) 波動方程式という.

注意 4.2.

例 2.2 と問題 4.7 から, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ と $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ が存在したとしても, f が $(0,0)$ で連続にならないことがわかる. 一変数関数では, 微分可能な点では連続になることに注意すると, **偏微分可能であっても連続とは限らない**ことが多変数関数において注意しないといけないことがわかる.

問題 4.8.

次の関数 f に対して, $\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ と $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ を求めよ[5]. そして, 一般には偏微分の順序の交換ができないこと, つまり $\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) \neq \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ となることを確かめよ.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$$

[5] $\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ は先に x 変数で偏微分してから y 変数で偏微分するという意味である. $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ も同様である.

解析概論 C 演習　(2015 年 5 月 22 日)

今後の資料において, 出てくる関数は特に断わりのない限り, 何回でも微分可能であるとする. また, 関数の定義域は適宜計算できるように定められているとする.

5.1. **二次元ベクトル解析.** 開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ に対し, ベクトル値関数 $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ を考える. つまり, $\boldsymbol{x} \in \Omega$ に対して

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = (F_1(\boldsymbol{x}), F_2(\boldsymbol{x}))$$

を考える[6]. $\boldsymbol{F}$ を Ω 上のベクトル場ということがある.

定義 5.1 (ベクトル場の発散)**.**
$\boldsymbol{F} = (F_1, F_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ に対して, $\boldsymbol{F}$ の発散 $\operatorname{div} \boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \Omega$ に対して

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) := \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})$$

で定義する.

問題 5.1.
次のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ に対する発散を求めよ.

(1) $\boldsymbol{F}(x, y) = (x^2 + xy, y^2 + xy)$
(2) $\boldsymbol{F}(x, y) = (2x^2 y, -xy^2)$

定義 5.2 (Jacobi 行列)**.**
$\boldsymbol{F} = (F_1, F_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ に対して, $\boldsymbol{F}$ の Jacobi 行列 $J\boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \Omega$ に対して

$$J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

で定義する. また, $\det(J\boldsymbol{F})$ を $\boldsymbol{F}$ の Jacobian という.

問題 5.2.
次のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ にする Jacobian を求めよ.

(1) $\boldsymbol{F}(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$
(2) $\boldsymbol{F}(x, y) = (a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y)$　(a_{ij} $(i, j = 1, 2)$ は定数)

定義 5.3 (二次元ベクトル場の回転)**.**
$\boldsymbol{F} = (F_1, F_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ に対して, $\boldsymbol{F}$ の回転 $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \Omega$ に対して

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) := \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}),\ -\frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) \right)$$

で定義する.

問題 5.3.
次の $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ に対する回転を求めよ.

(1) $\boldsymbol{F}(x, y) = (x^2 + xy, y^2 + xy)$
(2) $\boldsymbol{F}(x, y) = (2x^2 y, -xy^2)$

---
[6] $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ は $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = (F_1((\boldsymbol{x})), F_2(\boldsymbol{x}))$ と書くという意味で用いる.

5.2. **三次元ベクトル解析.** 開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ に対して, ベクトル値関数 $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ を考える. つまり, $\boldsymbol{x} \in \Omega$ に対して

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = (F_1(\boldsymbol{x}), F_2(\boldsymbol{x}), F_3(\boldsymbol{x}))$$

を考える.

定義 5.4 (ベクトル場の発散)**.**
$\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ に対して, $\boldsymbol{F}$ の発散 $\operatorname{div} \boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ に対して

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) := \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial F_3}{\partial x_3}(\boldsymbol{x})$$

で定義する.

問題 5.4.
次のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ に対する発散を求めよ.
(1) $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (x^2 y, -2xz, 2yz)$
(2) $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (xz^3, -2x^2 yz, 2yz^4)$

定義 5.5 (Jacobi 行列)**.**
$\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ に対して, $\boldsymbol{F}$ の Jacobi 行列 $J\boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ に対して

$$J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial F_3}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial F_3}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

で定義する. また, $\det J\boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{F}$ の Jacobian という.

問題 5.5.
次のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ にする Jacobian を求めよ.
(1) $\boldsymbol{F}(r, \theta, \phi) = (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta)$
(2) $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z)$ (a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ は定数)

定義 5.6 (三次元ベクトル場の回転)**.**
$\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ に対して, $\boldsymbol{F}$ の回転 $\operatorname{rot} \boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ に対して

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) := \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}),\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}),\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) \right)$$

で定義する.

注意 5.1.
定義 5.6 は, 形式的に $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0,1,0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1)$ に対して

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1(\boldsymbol{x}) & F_2(\boldsymbol{x}) & F_3(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

と書くことができる.

問題 5.6.
次のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ に対する回転を求めよ.

(1) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x^2y, -2xz, 2yz)$
(2) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (xz^3, -2x^2yz, 2yz^4)$

問題 5.7.
$f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ に対して, 次を示せ.

(1) すべての $\boldsymbol{x} \in \Omega$ に対して $\operatorname{rot}(\nabla f(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{0}$.
(2) すべての $\boldsymbol{x} \in \Omega$ に対して $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})) = 0$.

問題 5.8.
$f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ に対して, 次を示せ.

(1) すべての $\boldsymbol{x} \in \Omega$ に対して $\operatorname{div}(f\boldsymbol{F})(\boldsymbol{x}) = (\nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})) + f(\boldsymbol{x}) \operatorname{div} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$.
(2) すべての $\boldsymbol{x} \in \Omega$ に対して $\operatorname{rot}(f\boldsymbol{F})(\boldsymbol{x}) = (\nabla f(\boldsymbol{x}) \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})) + f(\boldsymbol{x}) \operatorname{rot} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$. ただし, ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ に対して, **ベクトルの外積** $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y}$ を

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} := (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$$

により定義する.

注意 5.2.
$\nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \dfrac{\partial}{\partial x_3} \right)$ と形式的に書くと[7], Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(x_1, x_2, x_3) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ に対して

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F}, \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F}$$

と書くことができる.

[7] この形式的な表記 ∇ を Hamilton 演算子ということがある.

解析概論 C 演習　(2015 年 5 月 29 日)

6.1. **二次元極座標変換.** $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して[8]

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

により決まる変数変換 $(r, \theta) \in (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ を (二次元) 極座標変換という.

例 6.1.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対して

$$f(x, y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = g(r, \theta) \tag{6.1}$$

と変数変換したときに $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r, \theta)$ を計算してみると

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\partial}{\partial r}(f(r\cos\theta, r\sin\theta)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\sin\theta \end{aligned} \tag{6.2}$$

となる. そこで, f と g を消してしまえば

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

となる. つまり $\dfrac{\partial}{\partial r} = \dfrac{\partial x}{\partial r}\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial r}\dfrac{\partial}{\partial y}$ と形式的には ∂x と ∂y の両方を分母と分子にくわえた形になっている. なぜ, このような計算になるかは, あとで説明をする.

問題 6.1.

例 6.1 において, $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) = \dfrac{\partial}{\partial \theta}(f(r\cos\theta, r\sin\theta))$ を計算せよ. 次に

$$\left(\tfrac{\partial g}{\partial r}(r, \theta), \tfrac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta)\right) = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(x, y), \tfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

と書いたときの行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ を求めよ. さらに, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の逆行列を求めることで, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ を $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r, \theta)$, $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta)$ を用いて表せ.

問題 6.2.

$f = f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対して, 極座標変換 (6.1) を考える. $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ を $\dfrac{\partial g}{\partial r}$, $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ を用いて表せ.

---

[8]正確には $\mathbb{R}^2$ の部分集合に制限する必要があるが, 今日の話では計算できることを重視するため, 計算できるかどうかに関する議論はしないことにする.

問題 6.3.

$\boldsymbol{F} = (F_1(x,y), F_2(x,y)) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ に対して, 極座標変換 $F_1(x,y) = G_1(r,\theta)$, $F_2(x,y) = G_2(r,\theta)$ を考える. $\operatorname{div}\boldsymbol{F} = \dfrac{\partial F_1}{\partial x} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y}$ を $\dfrac{\partial G_i}{\partial r}$, $\dfrac{\partial G_2}{\partial \theta}$ $\quad (i=1,2)$ を用いて表せ.

問題 6.4.

$f = f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ に対して, 極座標変換 (6.1) を考える. $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を $\dfrac{\partial g}{\partial r}$, $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ (とその高階微分) を用いて表せ.

6.2. **三次元極座標変換.** $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$\begin{cases} x = r\cos\phi\sin\theta \\ y = r\sin\phi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

により決まる変数変換 $(r,\theta,\phi) \in (0,\infty)\times(0,\pi)\times(-\pi,\pi)$ を (三次元) 極座標変換という (吹田・新保 p. 211 も見よ). $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ に対して, 極座標変換

$$f(x,y,z) = f(r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta) = g(r,\theta,\phi) \tag{6.3}$$

を考える.

問題 6.5.

三次元極座標変換について,

$$\left(\tfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta,\phi), \tfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta,\phi), \tfrac{\partial g}{\partial \phi}(r,\theta,\phi)\right) = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z), \tfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z), \tfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

と書いたときの行列 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ を求めよ. さらに, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の逆行列を求めることで, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$ を $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta.\phi)$, $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta,\phi)$, $\dfrac{\partial g}{\partial \phi}(r,\theta,\phi)$ を用いて表せ.

6.3. **一般の変数変換.**

問題 6.6.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\begin{cases} x = \phi(\zeta,\eta) \\ y = \psi(\zeta,\eta) \end{cases}$$

により決まる変数変換

$$f(x,y) = f(\phi(\zeta,\eta), \psi(\zeta,\eta)) = g(\zeta,\eta)$$

を考える[9]. $\dfrac{\partial g}{\partial \zeta}$ と $\dfrac{\partial g}{\partial \eta}$ を $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を用いて表せ.

[9] ϕ, ψ の定義域や微分可能性はとりあえず気にしないことにする.

問題 6.7 (スケール変換)**.**

$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\lambda>0$ に対して $\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{y}$ により決まる変数変換

$$f(\boldsymbol{x})=f(\lambda\boldsymbol{y})=f_\lambda(\boldsymbol{y}),\quad \boldsymbol{y}=(y_1,\dots,y_n)$$

を考える.

(1) $\nabla f=\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\dots,\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ を $\nabla f_\lambda=\left(\dfrac{\partial f_\lambda}{\partial y_1},\dots,\dfrac{\partial f_\lambda}{\partial y_n}\right)$ を用いて表せ.

(2) $U_1(0)=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n:\|\boldsymbol{x}\|<1\}$ に対して, f による $U_1(0)$ の像 $f(U_1(0))$ を f_λ を用いて表せ.

問題 6.8.

連続関数 $f=f(\xi,\eta):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ に対して

$$g(x,y):=\int_0^x f(y,\eta)\,d\eta,\quad h(x):=g(x,x)=\int_0^x f(x,\eta)\,d\eta$$

とおく.

(1) $\dfrac{dh}{dx}(x)$ を $\dfrac{\partial g}{\partial x}$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ を用いて表せ.

(2) $\dfrac{dh}{dx}(x)$ を f と $\dfrac{\partial f}{\partial \xi}$, $\dfrac{\partial f}{\partial \eta}$ を用いて表せ.

式 (6.3) **の証明の概略.**

簡単のため, f が C^1 級のときに示す (より一般の場合は吹田・新保 p.165). 微分の定義より

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=\lim_{h\to 0}\frac{f((r+h)\cos\theta,(r+h)\sin\theta)-f(r\cos\theta,r\sin\theta)}{h}$$

であった. ここで, Taylor の定理より

$$\begin{aligned}
&f((r+h)\cos\theta,(r+h)\sin\theta)-f(r\cos\theta,r\sin\theta)\\
&=(f((r+h)\cos\theta,(r+h)\sin\theta)-f(r\cos\theta,(r+h)\sin\theta))\\
&\quad+(f(r\cos\theta,(r+h)\sin\theta)-f(r\cos\theta,r\sin\theta))\\
&=\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,(r+h)\sin\theta)h\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)h\sin\theta+o(h)
\end{aligned}$$

となるので, h で割って $h\to 0$ とすると

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)=\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)\sin\theta$$

がわかる. $\square$

解析概論 C 演習　(2015 年 6 月 5 日)

7.1. 方向微分.

定義 7.1.

開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, 関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$ とベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}$ に対して f の $\boldsymbol{x}$ における $\boldsymbol{v}$ 方向微分 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})$ を

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x})}{h}$$

で定義する. 従って

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = \frac{d}{dh}(f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{v}))\Big|_{h=0}$$

である[10].

問題 7.1.

連鎖公式 (合成関数の微分公式) を用いて $\dfrac{d}{dh}(f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{v}))$ を計算せよ. なお, 必要に応じて, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ として計算せよ. 次に, $h = 0$ を代入することで

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = \nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{v}$$

となることを確かめよ.

問題 7.2.

次の方向微分を計算せよ.

(1) $f(x, y) := \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $\boldsymbol{v} := (\cos\theta, \sin\theta)$ に対して, $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

(2) $f(x, y, z) := \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$, $\boldsymbol{v} := (\alpha, \beta, \gamma)$ に対して, $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(a, b, c)$

7.2. 全微分.

問題 7.3.

$f(x) := x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $f'(1)$ を求めて, グラフ $y = f(x)$ の $x = 1$ における接線の方程式を $y = a + b(x - 1)$ の形で求めよ.

(2) 上で求めた $ax + b$ に対して, $R(x) := f(x) - (a + b(x - 1))$ と定めたとき

$$\lim_{x \to 1} \frac{R(x)}{|x - 1|} = 0$$

となることを示せ.

(3) (2) が何を主張しているのかを説明し, 多変数関数にするには, 上記の主張をどのように替えればよいかを説明せよ.

---

[10] 右辺は $f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{v})$ を h で微分してから, $h = 0$ を代入するという意味である.

問題 7.4.

$f(x,y) := x^2 + xy$ ($(x,y) \in \mathbb{R}^2$) について, 次の問いに答えよ.

(1) $\nabla f(0,1)$ を求めよ.

(2) $z = f(0,1) + \nabla f(0,1) \cdot (x, y-1)$ はどのようなグラフとなるかを説明せよ.

(3) $R(x,y) := f(x,y) - (f(0,1) + \nabla f(0,1) \cdot (x, y-1))$ と定める. このとき

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{R(x,y)}{d((x,y),(0,1))} = 0$$

を示せ (ヒント: $|x| \le d((x,y),(0,1))$, $|y-1| \le d((x,y),(0,1))$ に注意すると...).

7.3. **Taylor 展開.**

問題 7.5.

$f(x) := x^3$ ($x \in \mathbb{R}$) について, 次の問いに答えよ.

(1) $f'(1)$, $f''(1)$ を求めて, グラフ $y = f(x)$ と $y = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2$ を図示せよ.

(2) $R(x) := f(x) - (f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2)$ と定めたとき

$$\lim_{x\to 1} \frac{R(x)}{|x-1|^2} = 0$$

となることを示せ.

問題 7.6.

$f = f(x,y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ について,

$$f(x,y) = a + ((a_1, a_2) \cdot (x,y)) + \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + \cdots$$

と書けたとする. ただし, $\cdots$ 以下は x, y の三次以上の多項式であるとする. 両辺を x や y で微分したあとに $x = 0$, $y = 0$ を代入することで, a, a_1, a_2 などがどのような値にならなければいけないかを考察せよ (ヒント: まずは行列のかけ算と内積を計算せよ).

注意 7.1 (1 変数 Taylor の定理について)**.**

Taylor の定理により, $g = g(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して,

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{g''(0)}{2}t^2 + R(t)$$

とおいたとき, $\lim_{t\to 0} \frac{R(t)}{t^2} = 0$ が成り立つ.

問題 7.7.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $g(t) := f(tx, ty)$ ($t > 0$) とおく. $g(0)$, $g'(0)$, $g''(0)$ を f の偏微分係数などを用いて表せ. これを用いて

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{d((x,y),(0,0))}(f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y) - \frac{1}{2}\left(D^2 f(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)) = 0$$

を示せ.

解析概論C演習 補足資料

中間テストにおいて, 覚えて欲しい定義や定理をまとめておく. なお, 講義資料で間違って書いてあるところがあるが, この資料では修正してある. また, 本稿では簡単のためにほとんどの場合は2次元に限定して書くが[11], 中間テストでは次元を一般化して問う場合があるので (例えば, 定義 A.1 を3次元や n 次元で問うとか), 自分で一般化を試みること.

定義 A.1 (内積, ノルム (長さ), 距離)**.**

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対し

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) &:= x_1 y_1 + x_2 y_2 \\ \|\boldsymbol{x}\| &:= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} (= \sqrt{(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x})}) \\ d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &:= \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|\end{aligned}$$

と定める.

定義 A.2.

$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$, $\varepsilon > 0$ に対して

$$U_\varepsilon(\boldsymbol{x}) := \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^2 : d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) < \varepsilon\}$$

を $\boldsymbol{x}$ の ε-近傍という.

定義 A.3 (開集合)**.**

集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ が**開集合**であるとは「任意の $\boldsymbol{x} \in U$ に対して, ある $\varepsilon > 0$ が存在して $U_\varepsilon(\boldsymbol{x}) \subset U$」が成り立つことをいう.

定義 A.4 (閉集合)**.**

集合 $F \subset \mathbb{R}^2$ が**閉集合**であるとは, $\mathbb{R}^2 \setminus F$ が開集合となることをいう.

定義 A.5 (点列の収束)**.**

点列 $\{\boldsymbol{a}_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^2$ が $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ に収束するとは「$d(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}) \to 0$ $(k \to \infty)$」が成り立つことをいう. このとき, $\lim_{k \to \infty} \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{a}$ と書いたり, $\boldsymbol{a}_k \to \boldsymbol{a}$ $(k \to \infty)$ と書いたりする.

定義 A.6 (関数の収束)**.**

集合 $D \subset \mathbb{R}^2$, 関数 $f : D \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$, $l \in \mathbb{R}$ に対して, $f(\boldsymbol{x}) \to l$ $(\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a})$ であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $\boldsymbol{x} \in D$ に対して

$$0 < d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) < \delta \Longrightarrow |f(\boldsymbol{x}) - l| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう. このとき, $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} f(\boldsymbol{x}) = l$ と書くこともある.

定義 A.7 (関数の連続性)**.**

集合 $D \subset \mathbb{R}^2$, 関数 $f : D \to \mathbb{R}$ が $\boldsymbol{x}_0 \in D$ で連続であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, すべての $\boldsymbol{x} \in D$ に対して

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) < \delta \Longrightarrow |f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon$$

が成り立つことをいう. また, $f : D \to \mathbb{R}$ が D 上連続であるとは, 任意の $\boldsymbol{x} \in D$ に対して, f が $\boldsymbol{x}$ で連続であることをいう.

[11] ベクトル場の回転は, 二次元と三次元で事情が異なるので, 別々に書いてある.

定理 A.3 (連続関数の同値条件)**.**
集合 $D \subset \mathbb{R}^2$, 関数 $f : D \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}_0 \in D$ に対して, 次は同値となる.

(a) f は $\boldsymbol{x}_0$ で連続となる.
(b) 任意の点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$ に対して,

$$\boldsymbol{x}_k \to \boldsymbol{x}_0 \quad (k \to \infty) \Longrightarrow f(\boldsymbol{x}_k) \to f(\boldsymbol{x}_0) \quad (k \to \infty)$$

が成り立つ.

定理 A.4 (閉集合の同値条件)**.**
集合 $F \subset \mathbb{R}^2$ に対して, 次は同値となる.

(a) F は閉集合となる.
(b) 任意の点列 $\{\boldsymbol{a}_k\}_{k=1}^{\infty} \subset F$ に対して, $\{\boldsymbol{a}_k\}_{k=1}^{\infty}$ が $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ に収束するならば, $\boldsymbol{a} \in F$ が成り立つ.

定義 A.8 (勾配, Hesse 行列, Laplace 作用素)**.**
開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ と $f = f(x, y) : \Omega \to \mathbb{R}$ に対し,

$$\nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad D^2 f := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

とおく. ∇f を f の**グラディエント (gradient)** や**勾配**という. $D^2 f$ を f の **Hesse 行列**という. また, $\Delta f(x, y) := \mathrm{tr}(D^2 f(x, y))$ とおき, Δf を f の (二次元)**Laplace 作用素**や **Laplacian** という.

定義 A.9 (調和関数)**.**
開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ と $f : \Omega \to \mathbb{R}$ に対し $\Delta f = 0$ となる関数 f を**調和関数**という. また, $\Delta f = 0$ を Laplace 方程式という.

定義 A.10 (ベクトル場の発散)**.**
$\boldsymbol{F} = (F_1, F_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ に対して, $\boldsymbol{F}$ の発散 $\mathrm{div}\, \boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \Omega$ に対して

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) := \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x})$$

で定義する.

定義 A.11 (Jacobi 行列)**.**
$\boldsymbol{F} = (F_1, F_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ に対して, $\boldsymbol{F}$ の Jacobi 行列 $J\boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \Omega$ に対して

$$J\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

で定義する. また, $\det(J\boldsymbol{F})$ を $\boldsymbol{F}$ の Jacobian という.

定義 A.12 (二次元ベクトル場の回転)**.**
$\boldsymbol{F} = (F_1, F_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ に対して, $\boldsymbol{F}$ の回転 $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in \Omega$ に対して

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) := \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}),\ -\frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) \right)$$

で定義する.

定義 A.13 (三次元ベクトル場の回転)**.**
$\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3) : \Omega \to \mathbb{R}^3$ に対して, $\boldsymbol{F}$ の回転 $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ に対して

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) := \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}),\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}),\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\boldsymbol{x}) \right)$$

で定義する.

定義 A.14 (方向微分)**.**
開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, 関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \in \Omega$ とベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}$ に対して f の $\boldsymbol{x}$ における $\boldsymbol{v}$ **方向微分** $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x})$ を

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x})}{h}$$

で定義する. 従って

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}) = \frac{d}{dh}(f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{v}))\bigg|_{h=0}$$

である.

定義 A.15 (全微分)**.**
開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, 関数 $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in \Omega$ に対して, f が $\boldsymbol{a}$ で**全微分可能**であるとは, あるベクトル $\boldsymbol{n} \in \mathbb{R}^2$ が存在して

$$R(\boldsymbol{x}) := f(\boldsymbol{x}) - (f(\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}))$$

とおいたときに

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{R(\boldsymbol{x})}{d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})} = \lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \frac{R(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|} = 0$$

が成り立つことである.

解析概論 C 演習　(2015 年 6 月 12 日)

8.1. **極大, 極小の判定.**

問題 8.1.
$f \in C^\infty(\mathbb{R})$ は $f'(0)=0$ をみたすとする.

(1) 2 次の Taylor-Maclaurin 展開

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + o(x^2) \qquad (x \to 0)$$

をもとめよ.

(2) $f''(0) > 0$ のとき, f が $x=0$ で極小となることを示せ (高校数学のやりかたでよい). さらに f が $x=0$ の近傍でどのような二次関数で近似されるかを説明せよ.

問題 8.2.
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x,y,z) := a_0 + \lambda_0 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$$

で定める. ただし, $a_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ は定数とする.

(1) 2 次の Taylor-Maclaurin 展開

$$f(x,y,z) = a_0 + (a_1,a_2,a_3)\cdot(x,y,z) + \frac{1}{2}\left(A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) + o(|(x,y,z)|^2)$$

を求めよ.

(2) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ のとき, f は $(x,y,z)=(0,0,0)$ で極小 (最小) となることを示せ.

問題 8.3.
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x,y,z) := a_0 + \left(A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$$

で定める. ただし, $a_0 \in \mathbb{R}$ は定数, A は 3 次実対称行列とする.

(1) A の固有値がすべて正のとき, 任意の $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$ に対して, $A\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi} > 0$ となることを示せ. ただし, 対称行列 A の固有値 λ_1, λ_2, λ_3 がすべて実数であることと, λ_1, λ_2, λ_3 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$, $\boldsymbol{\xi}_3 \in \mathbb{R}^3$ を $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底として選べることは認めてよい.

(2) f は $(x,y,z)=(0,0,0)$ で極小 (最小) となることを示せ.

問題 8.3 から次のことがわかる.

定理 8.1.
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ は $\nabla f(0,0,0) = (0,0,0)$ をみたすとする. $D^2 f(0,0,0)$ のすべての固有値が正のとき, f は $(x,y,z)=(0,0,0)$ で極小となる.

8.2. **Lagrange の方法.**

例 8.1.
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ の固有値の符号を求める.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= x^2 + y^2 - z^2 + 4xz + 4yz \\
&= (x + 2z)^2 + y^2 - 5z^2 + 4yz \qquad (x\text{ について平方完成}) \\
&= (x + 2z)^2 + (y + 2z)^2 - 9z^2 \qquad (y\text{ について平方完成})
\end{aligned}$$

より, 2 乗の係数の符号をみることで「正の固有値が 2 つ」, 「負の固有値が 1 つ」がわかる.

例 8.2.
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値の符号を求める.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2xy + 2yz$$

に対し, 2 乗の項がないので, $x' = x + y$, $y' = x - y$ とおきかえると

$$\begin{aligned}
2xy + 2yz &= \frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 + (x' - y')z \\
&= \frac{1}{2}(x' + z)^2 - \frac{1}{2}(y' + z)^2 \qquad (\text{平方完成}) \\
&= \frac{1}{2}(x + y + z)^2 - \frac{1}{2}(x - y + z)^2
\end{aligned}$$

となるから, 2 乗の係数の符号をみることで「正の固有値が 1 つ」, 「負の固有値が 1 つ」, 「零固有値が 1 つ」がわかる.

問題 8.4.
次の対称行列の固有値の符号を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

注意 8.1.
上記の Lagrange の方法は, 極大, 極小の候補での Hesse 行列の固有値の符号を調べるのに役立つ.

問題 8.5.

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x,y,z) := x^2 + 4y^2 + 6z^2 + 2xy - 2xz + 4yz + 3x^3 + 4y^2 z \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$$

で定める.

(1) $\nabla f(0,0,0) = (0,0,0)$ を示せ.

(2) f は $(x,y,z) = (0,0,0)$ で極値となるかを判定せよ.

問題 8.6.

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x,y,z) := xy + yz + zx + x^3 + y^3 + z^3 \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$$

で定める.

(1) $\nabla f(0,0,0) = (0,0,0)$ を示せ.

(2) f は $(x,y,z) = (0,0,0)$ で極値となるかを判定せよ.

8.3. 等周問題.

問題 8.7.

$L > 0$ に対して, 周の長さが L となる三角形 ABC を考える. $x = AB$, $y = BC$ とする.

(1) $f(x,y)$ を三角形 ABC の面積の 2 乗とするとき, $f(x,y)$ を求めよ (ヒント: ヘロンの公式)

(2) 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ を (1) の関数 f の定義域とする. すなわち, $f : D \to \mathbb{R}$ とするとき, D を求めよ.

問題 8.8.

問題 8.7 の記号をそのまま用いる.

(1) $f|_{\partial D} = 0$ を示せ.

(2) $\nabla f(x_0 . y_0) = (0,0)$ となる (x_0, y_0) を求め, その点での Hesse 行列 $D^2 f(x_0, y_0)$ の固有値がすべて負となることを確かめよ.

解析概論 C 演習　(2015 年 6 月 26 日)

9.1. 極値の計算.

問題 9.1.

関数 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ を

$$f(x,y,z):=xy(x^2+y^2+z^2-1)\qquad((x,y,z)\in\mathbb{R}^3)$$

で定める. 関数 f の極値とそれをあたえる (x,y,z) を求めよ.

問題 9.2.

関数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を

$$f(x,y):=e^{-x^2+y^2}(ax^2+y^2)\qquad((x,y)\in\mathbb{R}^2)$$

で定める. ただし, $a>0$ は定数とする. 関数 f の極値とそれをあたえる (x,y) を求めよ.

問題 9.3.

関数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を

$$f(x,y):=x^4+2x^2-8xy+4y^2\qquad((x,y)\in\mathbb{R}^2)$$

で定める. 関数 f の極値とそれをあたえる (x,y) を求めよ.

問題 9.4.

半径 1, 中心 O の円に内接する三角形 ABC について考える.

(1) $x=\angle AOB$, $y=\angle BOC$, $f(x,y)$ を三角形 ABC の面積とするとき, $f(x,y)$ を x, y であらわせ.

(2) (1) の f の定義域 $D\subset\mathbb{R}^2$ を求めよ.

問題 9.5.

問題 9.4 と同じ記号を用いる.

(1) $f|_{\partial D}=0$ を示せ.

(2) $\nabla f(x_0,y_0)=(0,0)$ となる $(x_0,y_0)\in D$ を求め, その点での Hesse 行列 $D^2f(x_0,y_0)$ の固有値がすべて負となることを示せ.

9.2. 陰関数定理の計算.

問題 9.6.

次の関係式で定まる陰関数 $y=y(x)$ について, y', y'' を求めよ.

(1) $y=1+xe^y$

(2) $x^3y^3+y-x=0$

問題 9.7.

次の関係式で定まる陰関数 $z=z(x,y)$ について, $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ を求めよ.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0,$$

ただし, $a,b,c>0$ は定数とする.

解析概論C演習　(2015年7月3日)

10.1. **陰関数定理.**

問題 10.1.

$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ は滑らかな関数とする. このとき

$$f(x,y,\phi(x,y))=0$$

で定まる陰関数 ϕ について, 次の微分を求めよ.

$$\frac{\partial\phi}{\partial x},\quad \frac{\partial\phi}{\partial y},\quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}$$

問題 10.2.

円の方程式 $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$ を考える.

(1) $-1<a<1$ のとき, 陰関数定理を用いて, $F(x,f(x))=0$ をみたす関数 $f:I\to\mathbb{R}$ が a の近傍 I で定められることを示せ. さらに $f'(a)$ を求めよ.

(2) $a=\pm1$ のとき, $F(x,f(x))=0$ をみたす関数 $f:I\to\mathbb{R}$ を $a=\pm1$ の近傍 I で定めることができないことを説明せよ. 陰関数定理の仮定の何がみたされないか? $x=\pm1$ におけるグラフ $F(x,y)=0$ の接線がどうなっているかを説明せよ.

問題 10.3.

滑らかな関数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を用いて定義される曲線

$$C: f(x,y)=0$$

上の点 $(a,b)\in C$ での接線の方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b)=0 \tag{10.1}$$

で与えられることを示せ. ただし, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\neq 0$ と仮定する.

注意 10.1.

問題 10.3 で, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\neq 0$ の仮定は $\nabla f(a,b)\neq\mathbf{0}$ で十分である. つまり, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$ であっても, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)\neq 0$ であれば接線の方程式は (10.1) で与えられる. たとえば, 円について

$$f(x,y)=x^2+y^2-1=0,\quad (a,b)=(\pm1,0)$$

での接線を考えてみよ.

10.2. **Lagrange の未定乗数法.**

問題 10.4.

条件 $x^2+y^2=1$ のもとで 次の関数の最大値, 最小値を求めよ.

(1) $f(x,y)=x^3+y^3$

(2) $f(x,y)=x+2y$

問題 10.5.

条件 $x^2+y^2=1$ のもとで $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$ (a, b, $c\in\mathbb{R}$ は定数) の最大値, 最小値を求めよ.

問題 10.6.

条件 $x^2+y^2+z^2=1$ のもとで $f(x,y,z)=x+2y+3z$ の最大値, 最小値を求めよ.

問題 10.7.

$L>0$ に対して, 周の長さが L となる三角形 ABC を考える. $x=AB$, $y=BC$, $z=CA$ とする.

(1) $f(x,y,z)$ を三角形 ABC の面積の 2 乗とするとき, $f(x,y,z)$ を求めよ

(2) 領域 $D\subset\mathbb{R}^3$ を (1) の関数 f の定義域とする. すなわち, $f:D\to\mathbb{R}$ とするとき, D を求めよ.

問題 10.8.

問題 10.7 の記号をそのまま用いる.

(1) $f|_{\partial D}=0$ を示せ.

(2) Lagrange の未定乗数法を用いて, 周の長さが L で面積が最大となる三角形は正三角形であることを示せ.

問題 10.9.

点 $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ から平面 $ax+by+cz=1$ までの最短距離と, それを与える平面上の点 (x,y,z) を Lagrange の未定乗数法を用いて求めよ.

解析概論 C 演習　(2015 年 7 月 10 日)

11.1. **復習.**

問題 11.1.

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を

$$f(x,y):=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

について次の問いに答えよ.

(1) 偏微分係数 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ を求めよ.
(2) f は $(x,y)=(0,0)$ で全微分可能かどうかを調べよ.

問題 11.2.

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ を

$$f(x,y):=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

について次の問いに答えよ.

(1) $(x,y)\neq(0,0)$ のとき, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ を求めよ.
(2) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ を求めよ.

問題 11.3.

$\mathbb{R}^2$ 上の C^2 級関数 $f(u,v)$ に対して

$$g(x,y)=f(x+y,xy)$$

とおく.

(1) g_x, g_y, g_{xx} を f の偏導関数を用いて表せ.
(2) $u^2>4v$ のとき, f_u, f_v を g の偏導関数を用いて表せ.
(3) $u^2>4v$ のとき, f_{vv} を g の偏導関数を用いて表せ.

問題 11.4.

$\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 $f(x,y)$ は C^∞ 級とし,

$$g(u,v)=f(u^2-v^2,2uv)$$

とおく.

(1) g_u, g_v を f_x, f_y を用いて表せ.
(2) f が (2 次元) 調和関数であるとき, g も (2 次元) 調和関数であることを示せ.

問題 11.5.

次の各問いに答えよ.

(1) $f(x,y)=x^4+2x^2-8xy+4y^2$ の 2 階までの偏導関数をすべて求めよ.
(2) $f(x,y)$ が極値を取る点とその値をすべて求めよ.

問題 11.6.

$x, y \in \mathbb{R}$ が $4x^2 - 2xy + y^2 = 4$ をみたすとき, xy の最大値と最小値, およびそれらを与える x, y の組をすべて求めよ.

問題 11.7.

$x, y \in \mathbb{R}$ が $x^2 + y^4 = 1$ をみたすとき, $x^2 y$ の最大値と最小値, およびそれらを与える x, y の組をすべて求めよ.

問題 11.8.

$f(x, y)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の C^2 級関数とし, $f(a, b) = 0$, $f_y(a, b) \neq 0$ となる点 (a, b) の近傍で $f(x, y) = 0$ から定まる陰関数 $y = \varphi(x)$ を考える. すなわち, $f(x, \varphi(x)) = 0$, $\varphi(a) = b$ をみたすとする.

(1) $\varphi'(a)$, $\varphi''(a)$ を f の 2 階までの偏導関数の点 (a, b) における値を用いて表せ.

(2) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ とする.

  (a) $f(a, b) = f_x(a, b) = 0$, $f_y(a, b) \neq 0$ となる点 (a, b) をすべて求めよ.

  (b) 上で求めた点 (a, b) の近傍で定義される陰関数 $y = \varphi(x)$ は $\varphi'(a) = 0$ をみたすことを示せ. さらに $\varphi(a)$ が極値となるかを判定せよ.

解析概論C演習　(2015 年 7 月 17 日)

12.1. **多次元での計算練習.** 以下, $n \in \mathbb{N}$ とする.

問題 12.1 (Laplace 方程式の基本解)**.**
　$n \geq 3$ に対して

$$\Gamma(\boldsymbol{x}) := \frac{1}{\|\boldsymbol{x}\|^{n-2}} \qquad (\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$$

とおく. $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ にたいして,

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}) + \cdots \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x_n^2}(\boldsymbol{x}) = 0$$

を示せ.

問題 12.2 (熱方程式の基本解)**.**
　$n \geq 1$ に対して

$$\rho(t, \boldsymbol{x}) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{\|\boldsymbol{x}\|^2}{4t}\right) \qquad (t > 0,\ \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n)$$

とおく. このとき, $t > 0$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(t, \boldsymbol{x}) = \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1^2}(t, \boldsymbol{x}) + \cdots \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_n^2}(t, \boldsymbol{x})$$

を示せ.

問題 12.3 (n 次元スケール変換の Jacobian)**.**
　$\mathbb{R}^n$ 上の変数変換 $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $\lambda > 0$ に対して,

$$\boldsymbol{y} = \phi(\boldsymbol{x}) := \lambda \boldsymbol{x}$$

で定める. このとき, Jacobian $J\phi$ を求めよ.

問題 12.4 (球対称関数の Laplacian)**.**
　滑らかな関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ はある関数 $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を用いて $f(\boldsymbol{x}) = g(\|\boldsymbol{x}\|)$ と書けるとする. つまり, 極座標変換を用いたときに

$$f(\boldsymbol{x}) = g(r), \quad \boldsymbol{x} = r\boldsymbol{\omega}, \quad (r, \boldsymbol{\omega}) \in (0, \infty) \times \partial B_1$$

となり, g が $\boldsymbol{\omega}$ に依らないと仮定する.
　(1) $\nabla f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ を $\dfrac{\partial g}{\partial r} = g'$ と $r = \|\boldsymbol{x}\|$, $\boldsymbol{x}$ を用いて表せ.
　(2) $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$ を $\dfrac{\partial g}{\partial r} = g'$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} = g''$, $r = \|\boldsymbol{x}\|$ を用いて表せ.

問題 12.5 (難)**.**
　開集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 上の調和関数 u を考える. すなわち

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(\boldsymbol{x}) + \cdots \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad (\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega) \tag{12.2}$$

をみたすとする. このとき, $-\Delta(\|\nabla u\|^2) \leq 0$ となることを示せ (ヒント: (12.2) を x_j 成分で微分してから, $\dfrac{\partial u}{\partial x_j}$ をかけて, j について和をとる).