解析概論 D 演習 中間試験問題

2015 年 11 月 20 日 第 3 時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題 1, 問題 2, 問題 3 は全員が答えよ. 問題 4, 問題 5, 問題 6, 問題 7 から 2 題以上を選択して答えよ.

問題 1.

$a > 0$ に対して, 次の積分を考える:

$$\int_0^a dx \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{x+2a} f(x,y)\,dy.$$

(1) 積分範囲を xy 平面に図示せよ.

(2) $\displaystyle\int_0^a dx \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{x+2a} f(x,y)\,dy$ の積分の順序を交換せよ.

問題 2.

次の変数変換を考える:

$$\Phi : (r,\theta,\phi) \mapsto (x,y,z) = (r\sin\theta\sin\phi, r\sin\theta\cos\phi, r\cos\theta),$$
$$(r > 0,\ 0 \le \theta \le \pi,\ 0 \le \phi \le 2\pi).$$

(1) ヤコビアン $\det J\Phi(r,\theta,\phi)$ を求めよ.

(2) (面積確定, すなわち Jordan 可測な) 有界閉集合 $E \subset \mathbb{R}^3$ に対して, $\displaystyle\iiint_E f(x,y,z)\,dxdydz$ を (r,θ,ϕ) を変数とする積分であらわせ. ただし, $D = \Phi^{-1}(E)$ とせよ.

問題 3.

次の広義積分の収束性とその値を求めたい. 次の問いに答えよ.

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\,dxdy \quad D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2+y^2 \le 3\}.$$

(1) D の近似列 $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ を一つ求めよ.

(2) 定義に従って, $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\,dxdy$ を求めよ.

問題 4.

次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 xe^{y^2}\, dy$$

問題 5.

$a, b > 0$ に対して, 次の積分を求めよ.

$$\iint_D (x^2+y^2)\, dxdy, \qquad D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

問題 6.

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$ を求めよ. ただし, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$ が収束することは認めてよい. また, 広義積分は形式計算 (近似列を用いない計算方法) を用いてもよい.

問題 7.

$\alpha > \dfrac{3}{2}$ に対して, 次の広義積分が絶対収束することを示せ. なお, 広義積分は形式計算 (近似列を用いない計算方法) を用いてもよい.

$$\iiint_V \frac{\sin(x+y+z)}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha} dxdydz \qquad V = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \geq 1\}.$$

略解

問題 1

$$\int_0^a dy \int_{\sqrt{a^2-y^2}}^a f(x,y)dx + \int_a^{2a} dy \int_0^a f(x,y)dx + \int_{2a}^{3a} dy \int_{y-2a}^a f(x,y)dx$$

問題 2

(1) $-r^2 \sin\theta$

(2) $\iiint_D f(r\sin\theta\sin\phi, r\sin\theta\cos\phi, r\cos\theta) r^2 \sin\theta \, d\theta$

問題 3

(1) $K_n = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n} \le \sqrt{x^2+y^2} \le 3 - \frac{1}{n} \right\}$

(2) $2\sqrt{3}\pi$

問題 4

$\frac{1}{4}(e-1)$

問題 5

$\frac{ab\pi}{4}(a^2+b^2)$

問題 6

$\sqrt{\pi}$

問題 7

$|\sin(x+y+z)| \le 1$ に注意すれば, $\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$ は優関数となっている.