解析概論D演習 期末試験問題

2016年1月22日 第3時限施行　　担当 水野 将司

注意事項: ノート・辞書・参考書・教科書・コピー・電卓の使用を禁ず.
解答用紙のみを提出し, 問題用紙は持ち帰ること.

問題1, 問題2, 問題3, 問題4, 問題5は全員が**答えのみ**を答えよ. 問題6, 問題7, 問題8, 問題9から2題以上を選択して答えよ.

問題 1 (答えのみ).
$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ を求めよ.

問題 2 (答えのみ).
曲線 $C:(3t,4t,5t)$ $(0\le t\le 1)$ に対して

$$\int_C (x+y+z)\,ds$$

を求めよ. ただし, ds は線素である.

問題 3 (答えのみ).
単位球面 $\mathbb{S}^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$ を

$$\boldsymbol{p}(u,v)=(\sin u\cos v,\sin u\sin v,\cos u)\qquad((u,v)\in[0,\pi]\times[-\pi,\pi])$$

と表示するとき, 第一基本量 E, F, G と面素 dS を求めよ.

問題 4 (答えのみ).
$B_4^3:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2<16\}$ とし, $\boldsymbol{F}:\overline{B_4^3}\to\mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{F}(x,y,z):=(4x,y,-2z)$ $((x,y,z)\in\overline{B_4^3})$ で定める. このとき,

$$\iint_{\partial B_4^3}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

を計算せよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は外向き単位法線ベクトルである.

問題 5 (答えのみ).
$\omega=f\,dx+g\,dy+h\,dz$ を $\mathbb{R}^3$ 上の一次微分形式とする. ここで, f, g, h は $\mathbb{R}^3$ 上の滑らかな関数である. このとき, 外微分 $d\omega$ を求めよ. なお, 微分の記号として, $\dfrac{\partial f}{\partial x}=f_x$ などの省略記法を用いてよい.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

略解

問題 1 $\sqrt{\pi}$

問題 2 $30\sqrt{2}$

問題 3 $E = 1,\ F = 0,\ G = \sin^2 u,\ dS = \sin u\, du$

問題 4 256π

問題 5 $df = (h_y - g_z)dy \wedge dz + (f_z - h_x)dz \wedge dx + (g_x - f_y)dx \wedge dy$

問題 6.

3 次元単位球面

$$\mathbb{S}^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

の面積を求めたい. 次の問いに答えよ.

(1) $\displaystyle\int_{B_1} dx_1dx_2dx_3dx_4$ を計算せよ.

(2) $\displaystyle\int_{B_1} dx_1dx_2dx_3dx_4 = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{S}^3} dS$ を示せ. そして, $\mathbb{S}^3$ の面積を求めよ.

問題 7.

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界領域, $\partial\Omega$ は滑らかとする. f, g を $\overline{\Omega}$ 上連続で滑らかなスカラー場, $\boldsymbol{F}$ を $\overline{\Omega}$ 上連続で滑らかなベクトル場とする. このとき, 次を示せ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は $\partial\Omega$ 上の外向き単位法線ベクトルとする.

(1) $\displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{F}\cdot\nabla f\,dx = \int_{\partial\Omega} f\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS - \int_\Omega f\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{F}\,dx.$

(2) $\displaystyle\int_\Omega (f\Delta g + \nabla f\cdot\nabla g)\,dx = \int_{\partial\Omega} f\nabla g\cdot\boldsymbol{n}\,dS$

(3) $\displaystyle\int_\Omega (f\Delta g - g\Delta f)\,dx = \int_{\partial\Omega} (f\nabla g\cdot\boldsymbol{n} - g\nabla f\cdot\boldsymbol{n})\,dS$

問題 8.

滑らかな境界をもつ有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ に対して, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ は Neumann 境界条件をみたす調和関数, すなわち

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\nu_1 + \dfrac{\partial u}{\partial y}\nu_2 + \dfrac{\partial u}{\partial z}\nu_3 = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

をみたすとする. ただし, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ は $\partial\Omega$ 上の外向き単位法線ベクトルである. $\phi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ を滑らかな関数とする. さらに

$$I(t) := \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\iiint_\Omega |\nabla(u + t\phi)|^2\,dxdydz\right) \qquad (-1 < t < 1)$$

とおく.

(1) $I(t)$ を $\dfrac{d}{dt}$ を用いずに表せ. なお, 微分と積分の交換は証明なしに用いてよい.

(2) $I(0) = 0$ を示せ.

問題 9.

$\mathbb{R}^3$ 上の滑らかな関数 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ に対して $d(df) = 0$ を示せ.

以下余白 計算用紙として使ってよい.

略解

問題 6

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{3}{4}\pi(1-r^2)^{\frac{3}{2}}\,dr$ を計算すれば, $\dfrac{\pi^2}{2}$ がわかる.

(2) $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^3} x \cdot \boldsymbol{n}\,dS$ に Gauss の発散定理を用いればよい. 答えは $2\pi^2$ となる.

問題 7

(1) $\displaystyle\int_{\Omega} \mathrm{div}(f\boldsymbol{F})\,dx$ に Gauss の発散定理を用いよ.

(2) (1) で $\boldsymbol{F} = \nabla g$ とする.

(3) (2) で f, g を入れかえた式を作り, 差をとる.

問題 8

(1) $\displaystyle\int_{\Omega} (\nabla(u+t\phi) \cdot \nabla\phi)\,dx$

(2) Gauss の発散定理を用いる. 境界積分は境界条件から 0 になる.

問題 9

$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz$ となる. $d(df)$ の計算は問題 5 の結果を用いてもよい.