解析概論 D 演習 演習問題 　(2015 年 10 月 2 日)

問題 1.1.

次の不定積分を求めよ. ただし, 積分定数は書かなくてよい.

(1) $\displaystyle\int \log x\,dx$

(2) $\displaystyle\int \tan x\,dx$

(3) $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx\ dx$. ただし, a, b は定数で $b \neq 0$

(4) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx$

問題 1.2.

次の不定積分を求めよ. ただし, 積分定数は書かなくてよい.

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$ (ヒント: $t=\sqrt{x+1}$)

(2) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a}\,dx$. ただし, a は定数 (ヒント: $t=\sqrt{x^2+a}+x$)

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x}$ (ヒント: $t=\tan(\frac{x}{2})$)

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{a+be^x}$. ただし, a, b は零でない定数 (ヒント: $t=e^x$)

問題 1.3.

次の問いに答えよ.

(1) $\arcsin x$ の微分を計算せよ.

(2) $a>0$ に対して, $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$ を「高校生でも理解できる計算方法」と「$\arcsin x$ の微分を用いた計算方法」の二通りで計算せよ.

問題 1.4.

$m, n \in \mathbb{Z}$ に対して, 次の定積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cos nx\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\sin nx\,dx$

問題 1.5.

$\alpha>0$ に対して, 次の広義積分の収束/発散する α の条件を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$

解答

なお, 対数についての絶対値は, 不正解の対象としないことにした.

問題 1.1

(1) $x \log x - x$

(2) $-\log(\cos x)$

(3) $\dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$

(4) $\dfrac{1}{2}\log(x-1) - 4\log(x-2) + \dfrac{9}{2}\log(x-3)$

問題 1.2

(1) $\log(\sqrt{x+1}-1) - \log(\sqrt{x+1}+1)$

(2) $\dfrac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a} + a\log(x+\sqrt{x^2+a}))$

(3) $-\dfrac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}$

(4) $\dfrac{1}{a}(x - \log(a+be^x))$

問題 1.4

どちらも $\pi\delta_{mn}$. ただし, δ_{mn} は Kronecker のデルタ.

注意.

$f, g \in C([-\pi,\pi])$ に対して

$$(f,g)_{L^2(-\pi,\pi)} := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

とおくと, $(f,g)_{L^2(-\pi,\pi)}$ は内積の公理をみたす. この問題が主張していることは $\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\cos nx\}_{n=1}^{\infty}$ がこの内積について直交系であるということである.

問題 1.5

(1) $0 < \alpha \leq 1$ なら発散, $\alpha > 1$ なら収束.

(2) $0 < \alpha < 1$ なら収束, $\alpha \geq 1$ なら発散.

解析概論D演習　(2015年10月9日)

定理 2.1 (Fubiniの定理)**.**
$D = \{(x,y) : a \le x \le b,\ g(x) \le y \le h(x)\}$ により定められた閉領域と, D 上の連続関数 $f : D \to \mathbb{R}$ に対して

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right) dx =: \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy$$

が成り立つ.

問題 2.1.
次の積分

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy \quad D := \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x\}$$

を求めたい.

(1) 領域 D を図示せよ.

(2) $\displaystyle\int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} (x^2+y^2)\,dy$ となる a, b, $g(x)$, $h(x)$ を求めて, 積分を計算せよ.

(3) $\displaystyle\int_c^d dy \int_{k(y)}^{l(y)} (x^2+y^2)\,dx$ となる c, d, $k(y)$, $h(y)$ を求めて, 積分を計算せよ.

問題 2.2.
領域 D を図示したうえで, 積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D (x^3+y^3)\,dxdy \quad D := \{(x,y) : 0 \le x, y \le 1\}$

(2) $\displaystyle\iint_D (x^2-y^2)\,dxdy \quad D := \{(x,y) : -1 \le x \le 1,\ 1 \le y \le 2\}$

問題 2.3.
領域 D を図示したうえで, 積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D xy\,dxdy \quad D := \{(x,y) : x, y \ge 0,\ x^2+y^2 \le a^2\}$　ただし, $a > 0$ は定数.

(2) $\displaystyle\iint_D \sqrt{x}\,dxdy \quad D := \{(x,y) : x^2+y^2 \le x\}$

問題 2.4.
領域 D を図示したうえで, 積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{y}\,dxdy \quad D$ は $y = x^2,\ y = 1,\ x = 2$ で囲まれた部分

(2) $\displaystyle\iint_D \sin\frac{\pi y}{x}\,dxdy \quad D := \{(x,y) : y^2 \le x,\ 1 \le x \le 2\}$

問題 2.5.

次の積分の積分順序をかえよ．ただし, $a > 0$ とする．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{e^x} f(x,y)\,dy$

(2) $\displaystyle\int_{0}^{a} dx \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x,y)\,dy \qquad (0 < \alpha < \beta)$

(3) $\displaystyle\int_{a}^{2a} dy \int_{y-a}^{y+a} f(x,y)\,dx$

(4) $\displaystyle\int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{2+x} f(x,y)\,dy$

解答

領域 D の図示については省略する．また, 境界についての説明はつけなくてもよい[1].

問題 2.1

(2) $\dfrac{1}{6}$

(3) $\dfrac{1}{6}$

問題 2.2

(1) $\dfrac{1}{2}$

(2) -4

問題 2.3

(1) $\dfrac{a^4}{8}$

(2) $\dfrac{8}{15}$

問題 2.4

(1) $\dfrac{16}{3}\log 2 - \dfrac{14}{9}$

(2) 0

問題 2.5

(1) $\displaystyle\int_{0}^{e^{-1}} dy \int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx + \int_{e^{-1}}^{e^1} dy \int_{\log y}^{1} f(x,y)\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{0}^{\alpha a} dy \int_{\frac{y}{\beta}}^{\frac{y}{\alpha}} f(x,y)\,dx + \int_{\alpha a}^{\beta a} dy \int_{\frac{y}{\beta}}^{a} f(x,y)\,dx$

(3) $\displaystyle\int_{0}^{a} dx \int_{a}^{x+a} f(x,y)\,dy + \int_{a}^{2a} dx \int_{a}^{2a} f(x,y)\,dy + \int_{2a}^{3a} dx \int_{x-a}^{2a} f(x,y)\,dy$

(4) $\displaystyle\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int_{1}^{4} dy \int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$

[1] Riemann 積分を考えるときは, 基本的には有界閉集合上の (連続) 関数についてのみ考察する (この仮定により, 考える関数は一様連続になる)．つまり集合の境界をすべて含む場合を考える．

解析概論D演習　(2015年10月16日)

例 3.1.

半径 $r > 0$ の3次元球の体積を求めてみよう．求める積分は

$$\iiint_D dxdydz \qquad D := \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le r^2\}$$

である．$-r \le x \le r$ に対して，D の切り口 $D(x) := \{(y,z) : y^2+z^2 \le r^2 - x^2\}$ を考えると

$$\begin{aligned}\iiint_D dxdydz &= \int_{-r}^{r} dx \iint_{D(x)} dydz \\ &= \int_{-r}^{r} \pi(r^2-x^2)\,dx = \frac{4}{3}\pi r^3\end{aligned}$$

となることがわかる．

問題 3.1.

次の積分を求めよ．

$$\iiint_V x^2\,dxdydz \qquad V = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le a^2\}$$

問題 3.2.

次の積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D dydz \qquad D = \left\{(y,z) : \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le \lambda^2\right\},\ \lambda > 0$

(2) $\displaystyle\iiint_V dxdydz \qquad V = \left\{(x,y,z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\right\}$

問題 3.3.

次の積分を求めよ．

$$\iiint_V xy\,dxdydz \qquad V = \{(x,y,z) : x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x+y+z \le 1\}$$

問題 3.4.

半径 $r > 0$ の4次元球の体積を求めたい．

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$ を求めよ (ヒント: $x = \sin\theta$ とおく)

(2) 次の積分を求めよ．

$$\int_{B_r^4} dx_1dx_2dx_3dx_4 \qquad B_r^4 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 \le r^2\}$$

問題 3.5.

次の積分の値を求めよ．

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 xe^{y^2}\,dy$$

解答

問題 3.1

$$\frac{4}{15}\pi a^5$$

問題 3.2

(1) $\pi\lambda^2 bc$

(2) $\frac{4}{3}\pi abc$

問題 3.3

$$\frac{1}{120}$$

問題 3.4

(1) $\frac{\pi}{8}$

(2) $\frac{1}{2}\pi^2 r^4$

問題 3.5

$$\frac{1}{4}(e-1)$$

解析概論D演習　(2015年10月23日)

定理 4.1 (変数変換公式)**.**

$D, E \subset \mathbb{R}^n$ を有界閉集合, $\Phi : D \to E$ を全単射とし, すべての $y \in D$ について $\det J\Phi(y) \neq 0$ であるとする. このとき, E 上の連続関数 $f : E \to \mathbb{R}$ に対して

$$\int_E f(x)\,dx = \int_D f(\Phi(y))|\det J\Phi(y)|\,dy$$

が成り立つ.

注意 4.1.

定理 4.1 での $\Phi : D \to E$ の全単射の仮定は, D に属する区分的になめらかな曲線上でくずれていてもよいことが知られている. たとえば, ∂D や ∂E で全単射の仮定が崩れていてもよい.

例 4.1 (1変数の場合)**.**

$D = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $E = [-1, 1]$ に対して, $\Phi : D \to E$ を $\Phi(y) = \sin y$ により定めると全単射で, $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対して $|\Phi'(y)| = \cos y \neq 0$ となる. したがって, 定理 4.1 より連続関数 $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ に対して

$$\int_{[-1,1]} f(x)\,dx = \int_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} f(\sin y)\cos y\,dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin y)\cos y\,dy$$

が成り立つ. これは, $x = \sin y$ と変数変換した式そのものである.

例 4.2.

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ は $ad - bc \neq 0$ であるとする. このとき, 変数変換 $\Phi : (u, v) \mapsto (x, y) = (au + bv, cu + dv)$ により有界閉集合 $E \subset \mathbb{R}^2$ 上の連続関数 $f : E \to \mathbb{R}$ の積分は

$$\iint_E f(x, y)\,dxdy = \iint_D f(au + bv, cu + dv)|\det J\Phi(u, v)|\,dudv$$

と変数変換される. ここで, $D = \Phi^{-1}(E)$ である. $\det J\Phi(u, v) = ad - bc$ であることから

$$\iint_E f(x, y)\,dxdy = |ad - bc| \iint_D f(au + bv, cu + dv)\,dudv$$

となる.

問題 4.1 (2次元極座標変換)**.**

$\Phi : (r, \theta) \mapsto (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \quad (r > 0,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi)$ を考える.

(1) $\det J\Phi(r, \theta)$ を求めよ.

(2) 有界閉集合 $E \subset \mathbb{R}^2$ に対して, $\displaystyle\iint_E f(x, y)\,dxdy$ を (r, θ) の積分であらわせ. ただし, $D = \Phi^{-1}(E)$ とせよ.

問題 4.2.

$0 < R_1 < R_2$ とし, $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : R_1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq R_2\}$ とおく.

(1) E を図示せよ.

(2) 極座標変換 $\Phi : (r,\theta) \mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ を考える. $D = \Phi^{-1}(E)$ を求め, 図示せよ.

(3) 極座標変換を用いて $\alpha > 0$ に対して, $\displaystyle\iint_E \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dxdy$ を求めよ.

問題 4.3 (3 次元極座標変換)**.**

$\Phi : (r,\theta,\phi) \mapsto (x,y,z) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$ $(r > 0,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \phi \leq 2\pi)$ を考える.

(1) $\det J\Phi(r,\theta,\phi)$ を求めよ.

(2) 有界閉集合 $E \subset \mathbb{R}^3$ に対して, $\displaystyle\iiint_E f(x,y,z)\,dxdydz$ を (r,θ,ϕ) の積分であらわせ. ただし, $D = \Phi^{-1}(E)$ とせよ.

問題 4.4.

$0 < r < R$ とし, $E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : r \leq \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq R\}$ とおく.

(1) 極座標変換 $\Phi : (r,\theta,\phi) \mapsto (x,y,z) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$ を考える. $D = \Phi^{-1}(E)$ を求めよ.

(2) 極座標変換を用いて $\alpha > 0$ に対して, $\displaystyle\iiint_E \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}\,dxdydz$ を求めよ.

(3) 極座標変換を用いて半径 R の球の体積を求めよ.

問題 4.5 (3 次元円柱座標)**.**

$\Phi : (\rho,\phi,z) \mapsto (x,y,z) = (\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, z)$, $(0 \leq \phi \leq 2\pi)$ を考える.

(1) $\det J\Phi(\rho,\phi,z)$ を求めよ.

(2) 有界閉集合 $E \subset \mathbb{R}^3$ に対して, $\displaystyle\iiint_E f(x,y,z)\,dxdydz$ を (ρ,ϕ,z) の積分であらわせ. ただし, $D = \Phi^{-1}(E)$ とせよ.

解答

問題 4.1

(1) r

(2) $\displaystyle\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, dr d\theta$

問題 4.2

(3) $\begin{cases} \dfrac{\pi}{1-\alpha}(R_2^{2-2\alpha} - R_1^{2-2\alpha}) & \alpha \neq 1 \\ 2\pi \log \dfrac{R_2}{R_1} & \alpha = 1 \end{cases}$

問題 4.3

(1) $r^2 \sin\theta$

(2) $\displaystyle\iiint_D f(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta) r\sin\theta\, dr d\theta d\phi$

問題 4.4

(1) $D = [R_1, R_2] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$

(2) $\begin{cases} \dfrac{4\pi}{3-2\alpha}(R_2^{3-2\alpha} - R_1^{3-2\alpha}) & \alpha \neq \dfrac{3}{2} \\ 4\pi \log \dfrac{R_2}{R_1} & \alpha = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

問題 4.5

(1) ρ

(2) $\displaystyle\iiint_D f(\rho\cos\phi, \rho\sin\phi, z)\rho\, d\rho d\theta dz$

解析概論 D 演習　(2015 年 10 月 30 日)

問題 5.1.

$a, b > 0$ に対して, 次の積分を求めよ (ヒント: $\Phi : (r, \theta) \mapsto (x, y) = (ar\cos\theta, br\sin\theta)$ を考える).

$$\iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy, \qquad D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \right\}$$

問題 5.2.

$a, b > 0$ に対して, 次の積分を求めよ

$$\iint_D (a^2x^2 + b^2y^2)\, dxdy, \qquad D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1 \}$$

問題 5.3.

$R > 0$ に対して, 次の積分を求めよ.

$$\iiint_V x^4\, dxdydz, \qquad V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le R^2 \}$$

問題 5.4.

$R > 0$ に対して, 次の積分を求めよ (ヒント: $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\, dx$ は求積できる).

$$\iiint_V \frac{1}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^2}\, dxdydz, \qquad V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le R^2 \}$$

問題 5.5.

$\lambda > 0$ に対して, $\mathbb{R}^n$ 上のスケール変換 $\Phi : \mathbb{R}^n \ni y \mapsto x = \lambda y \in \mathbb{R}^n$ を考える.

(1) $\det J\Phi(y)$ を求めよ.

(2) 有界閉集合 $E \subset \mathbb{R}^n$ に対して $\displaystyle\int_E f(x)\, dx$ を y の積分で表せ. ただし, $D = \Phi^{-1}(E)$ とせよ.

(3) 原点中心, 半径 $R > 0$ の n 次元球を B_R^n とするとき, 次を示せ:

$$|B_R^n| := \int_{B_R^n} dx = R^n \int_{B_1^n} dy = R^n |B_1^n|.$$

注意 5.1.

n 次元単位球の球面を $\mathbb{S}^{n-1}$ とおく. $\mathbb{R}^n$ 上の極座標変換

$$\Phi : [0, \infty) \times \mathbb{S}^{n-1} \ni (r, \omega) \mapsto x = r\omega \in \mathbb{R}^n$$

とおくと, $dx = r^{n-1} dr d\omega$ となることが知られている. ここで, $d\omega$ はたとえば, $n = 3$ のときに $d\omega = \sin\theta\, d\theta d\phi$ となり, $\displaystyle\int_{\mathbb{S}_{n-1}} d\omega = |\mathbb{S}^{n-1}|$ が成り立つ. ここで, $|\mathbb{S}^{n-1}|$ は n 次元単位球の表面積である. 積分する関数が球対称関数であるとき, この公式を用いれば積分が計算できることがある. 例えば $\alpha > 0$ に対して

$$\int_{\{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}} |x|^\alpha\, dx = \int_0^R r^{n-1}\, dr \int_{\mathbb{S}^{n-1}} r^\alpha\, d\omega = |\mathbb{S}^{n-1}| \int_0^R r^{n-1+\alpha}\, dr = \frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n + \alpha} R^{n+\alpha}$$

と計算ができる.

解答

問題 5.1

$$\frac{\pi}{4}ab(a^2+b^2)$$

問題 5.2

$$\frac{\pi}{4}(a^2+b^2)$$

問題 5.3

$$\frac{4}{35}\pi R^7$$

問題 5.4

$$2\pi\left(\arctan R - \frac{R^2}{(1+R^2)}\right)$$

問題 5.5

(1) λ^n

(2) $\displaystyle\int_E f(x)\,dx = \lambda^n \int_D f(\lambda y)\,dy$

解析概論 D 演習　(2015 年 11 月 6 日)

定理 6.1.
$D \subset \mathbb{R}^n$ を面積確定な領域とする[2]. $f : D \to \mathbb{R}$ は D 上連続かつ, $f \geq 0$ を仮定する. いま, D のある近似列 $\{K_i\}$ に対して

$$\lim_{i \to \infty} \int_{K_i} f(x)\,dx =: I$$

が存在するならば, 広義積分 $\displaystyle\int_D f(x)\,dx$ は存在して, $\displaystyle\int_D f(x)\,dx = I$ が成り立つ.

例 6.1.
$0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$ に対して, $D = (0,3) \times (0,3)$ における広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^\alpha}$ を考える. $n \in \mathbb{N}$ に対して $K_n = \left[\frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}\right] \times \left[\frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}\right]$ は D の近似列であり,

$$\begin{aligned}
&\iint_{K_n} \frac{dxdy}{(x+y)^\alpha} \\
&= \int_{\frac{1}{n}}^{3-\frac{1}{n}} dx \int_{\frac{1}{n}}^{3-\frac{1}{n}} \frac{1}{(x+y)^\alpha}\,dy \\
&= \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)} \left(\left(6 - \frac{2}{n}\right)^{2-\alpha} - 2 \times 3^{2-\alpha} + \left(\frac{2}{n}\right)^{2-\alpha} \right)
\end{aligned}$$

となる. $n \to \infty$ とすると, $2 - \alpha > 0$ だから

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^\alpha} = \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)} (6^{2-\alpha} - 2 \times 3^{2-\alpha})$$

となる.

問題 6.1.
例 6.1 で $\alpha = 1$ のときの積分の値を求めよ.

問題 6.2.
次の広義積分が収束することを示し, その値を求めよ (D の近似列を作り, 例 6.1 のように計算すること).

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 - y^2}} \qquad D = \{(x,y) : x^2 > y^2,\ 0 < x < 1\}$$

問題 6.3.
$0 < \alpha < 1$, $R > 0$ に対して, 次の広義積分が収束することを示し, その値を求めよ[3].

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\alpha} \qquad D = \{(x,y) : 0 < x^2 + y^2 < R^2\}$$

---

[2] 以下, 考える領域は常に面積確定とする.

[3] 近似列について n が十分大きい場合に定義ができていればよい. つまり, R の大きさで場合わけなどはしなくてもよい.

問題 6.4.

$R > 0$ に対して, 次の広義積分が収束することを示し, その値を求めよ.

$$\iint_V \frac{dxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}} \qquad V = \{(x,y,z) : 0 < x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$$

問題 6.5.

$n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ に対して, 次の広義積分の収束性を考える:

$$\int_{B_1^n \setminus \{0\}} \frac{dx}{|x|^\alpha}, \qquad B_1^n := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < 1\}. \tag{6.1}$$

なお, 注意 5.1 の結果は証明なしに用いてよい.

(1) $\varepsilon > 0$ に対して

$$\int_{\{\varepsilon < x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < 1\}} \frac{dx}{|x|^\alpha} \tag{6.2}$$

を計算せよ.

(2) $\varepsilon \downarrow 0$ としたときに, (6.2) の収束性を調べることで, 広義積分 (6.1) の収束/発散する α の条件を n を用いて表せ.

解答

問題 6.1

$6 \log 2$

問題 6.2

π

問題 6.3

$\dfrac{\pi R^{2-2\alpha}}{1-\alpha}$

問題 6.4

$\pi^2 R^2$

問題 6.5

(1) $\begin{cases} \dfrac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n-\alpha}(1 - \varepsilon^{n-\alpha}) & n - \alpha \neq 0 \\ -|\mathbb{S}^{n-1}| \log \varepsilon & n - \alpha = 0 \end{cases}$

(2) $\alpha < n$ のとき収束, $n \geq \alpha$ のとき発散.

解析概論 D 演習　　(2015 年 11 月 13 日)

例 7.1.

$\alpha > 2$ に対して, $D = (1, \infty) \times (1, \infty)$ における広義積分 $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^\alpha}$ を考える. $n \in \mathbb{N}$ に対して $K_n = \left[1 + \frac{1}{n}, n\right] \times \left[1 + \frac{1}{n}, n\right]$ は D の近似列であり,

$$\begin{aligned}
&\iint_{K_n} \frac{dxdy}{(x+y)^\alpha} \\
&= \int_{1+\frac{1}{n}}^{n} dx \int_{1+\frac{1}{n}}^{n} \frac{1}{(x+y)^\alpha}\, dy \\
&= \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)} \left((2n)^{2-\alpha} - 2 \times \left(1 + n + \frac{1}{n}\right)^{2-\alpha} + \left(2 + \frac{2}{n}\right)^{2-\alpha} \right)
\end{aligned}$$

となる. $n \to \infty$ とすると, $2 - \alpha < 0$ だから

$$\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^\alpha} = \frac{2^{2-\alpha}}{(1-\alpha)(2-\alpha)}$$

となる.

問題 7.1.

$\alpha > 2$ に対して, 次の広義積分が収束することを示し, その値を求めよ.

$$\iint_D \frac{dxdy}{(1+x+y)^\alpha} \qquad D = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$$

問題 7.2.

$\alpha > \dfrac{3}{2}$ に対して, 次の広義積分が収束することを示し, その値を求めよ.

$$\iiint_V \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha} \qquad V = \{(x, y) : x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\}$$

定理 7.1 (優収束定理)**.**

$D \subset \mathbb{R}^n$ を領域, $f : D \to \mathbb{R}$ を連続とし, 次を仮定する.

1. ある連続関数 $g : D \to \mathbb{R}$ が存在して, すべての $x \in D$ に対して $|f(x)| \leq g(x)$
2. $\displaystyle\int_D g(x)\, dx$ は収束する.

このとき, $\displaystyle\int_D |f(x)|\, dx$ は収束する.

定義 7.1 (絶対可積分, 絶対収束)**.**

領域 $D \subset \mathbb{R}^n$ と連続関数 $f : D \to \mathbb{R}$ に対して, $\displaystyle\int_D |f(x)|\, dx$ が収束するとき, $\displaystyle\int_D |f(x)|\, dx$ は**絶対収束**するという. また, このときの関数 f を**絶対可積分 (関数)** であるということがある.

問題 7.3.

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ が収束することを示したい.

(1) $x \in \mathbb{R}$ に対して, $x^2 e^{-x^2}$ が有界であることを示せ.

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ が収束することを示せ.

問題 7.4.

$I := \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ を求めたい.

(1) $I^2 = \displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$ となることを示せ.

(2) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$ が収束することを示し, その値を求めよ.

(3) I を求めよ.

問題 7.5.

$n \in \mathbb{N}$, $\alpha > 0$ に対して, 次の広義積分の収束性を考える:

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_1^n} \frac{dx}{|x|^\alpha}, \qquad \mathbb{R}^n \setminus B_1^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geq 1\}. \tag{7.1}$$

なお, 注意 5.1 の結果は証明なしに用いてよい.

(1) $M > 0$ に対して

$$\int_{\{1 \leq x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq M\}} \frac{dx}{|x|^\alpha} \tag{7.2}$$

を計算せよ.

(2) $M \to \infty$ としたときに, (7.2) の収束性を調べることで, 広義積分 (7.1) の収束/発散する α の条件を n を用いて表せ.

解答と解説

問題 7.1

D の近似列 $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$K_n = \left[\frac{1}{n}, n\right] \times \left[\frac{1}{n}, n\right] \qquad (n \in \mathbb{N})$$

とおき, $\displaystyle\iint_{K_n} \frac{dxdy}{(1+x+y)^\alpha}$ を計算して $n \to \infty$ とすればよい. 答えは $\boxed{\dfrac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)}}$ となる.

問題 7.2

D の近似列 $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$K_n = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq n^2\right\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

とおき, $\displaystyle\iint_{K_n} \frac{dxdy}{(1+x+y)^\alpha}$ を計算して $n \to \infty$ とすればよい. 答えは $\boxed{\dfrac{4\pi}{2\alpha - 3}}$ となる.

注意

D の近似列を作ってから極座標変換をすること．極座標変換が広義積分で正しいかどうかは明らかとはいえない．

問題 7.3

(1) 増減表を作ってもよいし，$x^2e^{-x^2}$ が $\mathbb{R}$ 上連続であることと，$\lim_{x\to\pm\infty} x^2e^{-x^2}$ が存在することを示せばよい．

(2) $0 \leq e^{-x^2} \leq 1$ と $x^2e^{-x^2}$ が有界なことより，ある $M > 0$ が存在して，すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $(1+x^2)e^{-x^2} \leq M$ とできる．よって，$e^{-x^2} \leq \dfrac{M}{1+x^2}$ となり，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{M}{1+x^2}\,dx < \infty$ となることから (各自)，優収束定理を使うことで，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ が収束することがわかる．

注意

非負値の連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が有界だからといって，$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx < \infty$ となるとは限らない．例えば，$f(x) = 1$ $(x \in \mathbb{R})$ とすれば，f は有界だが $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \infty$ である．1 変数の広義積分の収束/発散は「有界でない点の発散の度合い」と「$\pm\infty$ での減衰の度合い」で決まることに注意せよ (参考: 問題 1.5)

問題 7.4

(1) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$ に Fubini の定理を用いる．正確には，広義積分で Fubini の定理が使えることをいうために $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$ が収束することをいわないといけないが，これはあとで示せるのでとりあえずみとめてよい．

(2) $-x^2 - y^2 = -(x^2+y^2)$ だから極座標変換と相性がよい．さらに，変数変換により求積できることがわかり，$\boxed{\pi}$ となる．

(3) $I^2 = \pi$ で $I \geq 0$ だから $\boxed{I = \sqrt{\pi}}$ がわかる．

注意

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ は Gauss 積分とも呼ばれており，正規分布の密度関数や熱方程式の基本解など，様々な応用がある．求め方も含めて覚えておくとよい．

問題 7.5

(1) 極座標変換を使うことで $\boxed{\begin{cases} \dfrac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n-\alpha}(M^{\frac{n-\alpha}{2}} - 1) & n-\alpha \neq 0 \\ -\dfrac{1}{2}|\mathbb{S}^{n-1}|\log M & n-\alpha = 0 \end{cases}}$ がわかる．

(2) $M \to \infty$ とすることで，$\boxed{\alpha > n \text{ のとき収束}, 0 < \alpha \leq n \text{ のとき発散}}$ となることがわかる．

解析概論 D 演習　(2015 年 11 月 27 日)

定理 8.1.
$C : \boldsymbol{\varphi}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ $(a \leq t \leq b)$ と C 上の連続関数 $f : C \to \mathbb{R}$ に対して, 次が成り立つ.

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(\boldsymbol{\varphi}(t)) \left| \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}(t) \right| dt, \qquad \int_C f(x,y,z)\,dx = \int_a^b f(\boldsymbol{\varphi}(t)) \frac{dx}{dt}(t)\,dt,$$

$$\int_C f(x,y,z)\,dy = \int_a^b f(\boldsymbol{\varphi}(t)) \frac{dy}{dt}(t)\,dt, \qquad \int_C f(x,y,z)\,dz = \int_a^b f(\boldsymbol{\varphi}(t)) \frac{dz}{dt}(t)\,dt.$$

問題 8.1.
次の線積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_C (xy + yz + zx)\,ds$,　$C : \boldsymbol{\varphi}(t) = (t, t^2, 0)$ $(0 \leq t \leq 1)$.

(2) $\displaystyle\int_C (xy + yz + zx)\,dx$,　$C : \boldsymbol{\varphi}(t) = (t, t^2, 0)$ $(0 \leq t \leq 1)$.

(3) $\displaystyle\int_C (x + y + z)\,ds$,　C: 原点から $A(12, 16, 20)$ に向かう線分.

(4) $\displaystyle\int_C (x + y + z)\,dy$,　C: 原点から $A(12, 16, 20)$ に向かう線分.

定理 8.2.
$C : \boldsymbol{\varphi}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ $(a \leq t \leq b)$ と C 上の連続なベクトル場 $\boldsymbol{F} : C \to \mathbb{R}^3$ に対して, 次が成り立つ.

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\varphi} = \int_a^b \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}(t)) \cdot \frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}(t)dt.$$

とくに, $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ と書くと

$$\begin{aligned} \int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\varphi} &= \int_a^b \left(F_1(\boldsymbol{\varphi}(t)) \frac{dx}{dt}(t) + F_2(\boldsymbol{\varphi}(t)) \frac{dy}{dt}(t) + F_3(\boldsymbol{\varphi}(t)) \frac{dz}{dt}(t) \right) dt \\ &= \int_C (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) \end{aligned}$$

と書ける.

問題 8.2.
次の線積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_C (y, -z, x) \cdot d\boldsymbol{\varphi}$,　　$C : \boldsymbol{\varphi}(t) = (2\cos t, 2\sin t, t)$ $(0 \leq t \leq \pi)$.

(2) $\displaystyle\int_C (3x^2 + 6y, -14yz, 20xz^2) \cdot d\boldsymbol{\varphi}$,　　$C : \boldsymbol{\varphi}(t) = (t, t^2, t^3)$ $(0 \leq t \leq 1)$.

問題 8.3.

$\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ はスカラーポテンシャル f を持つとする. すなわち, $\boldsymbol{F} = -\nabla f$ をみたすとする. $C : \boldsymbol{\varphi}(t)$, $(a \leq t \leq b)$ は閉曲線, すなわち, $\boldsymbol{\varphi}(a) = \boldsymbol{\varphi}(b)$ をみたすとする.

(1) $\dfrac{d}{dt} f(\boldsymbol{\varphi}(t))$ を $\boldsymbol{F}$ を用いて表せ.

(2) $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\varphi} = 0$ となることを示せ.

定理 8.3.

$\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ がスカラーポテンシャルを持つための必要十分条件は $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ となることである.

問題 8.4.

$\boldsymbol{F} = (3x^2y - y^2 + yz, x^3 - 2xy + xz, xy - 1)$ とおく.

(1) $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{F}$ を計算せよ.

(2) C_0 を $O(0,0,0)$ から $A(2,2,2)$ に至る線分とするとき, 線積分 $\displaystyle\int_{C_0} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\varphi}$ を求めよ.

(3) C を $O(0,0,0)$ から $A(2,2,2)$ に至る任意の曲線とするとき,

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\varphi} = \int_{C_0} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\varphi}$$

となることを示せ (ヒント $C_0 - C$ を考える).

問題 8.5.

次のそれぞれの曲線について, $\displaystyle\int_C ((x^2 + y^2)\,dx + x\,dy)$ を求めよ.

(1) C は $P(1,0)$ を始点, $Q(-1,0)$ を終点とする線分.

(2) C は $P(1,0)$ を始点, $Q(-1,0)$ を終点とする原点中心, 半径 1 の上半円.

解答

問題 8.1

(1) $\dfrac{5}{24}\sqrt{5}+\dfrac{1}{120}$

(2) $\dfrac{1}{4}$

(3) $480\sqrt{2}$

(4) 384

問題 8.2

(1) $4-2\pi$

(2) 5

問題 8.3

(1) $-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}(t))\cdot\dfrac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}(t)$

(2) 積分を $\boldsymbol{\varphi}$ を用いて表したあとに, 微分積分学の基本定理を用いる.

問題 8.4

(1) $\mathbf{0}$

(2) 14

問題 8.5

(1) $-\dfrac{2}{3}$

(2) $-2+\dfrac{\pi}{2}$

解析概論 D 演習　　(2015 年 12 月 4 日)

定義 9.1.
　曲面 $S : \boldsymbol{p}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ $((u,v) \in D)$ に対して,

$$E := \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u}, \quad F := \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v}, \quad G := \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v}$$

を曲面 S の**第一基本量**という. また, $dS = \sqrt{EG - F^2}dudv$ を S の**面素**という.

定理 9.1.
　S の表面積は

$$\int_S dS = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, dudv$$

で与えられる.

問題 9.1.
　単位球面 $\mathbb{S}^2 : \boldsymbol{p}(u,v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$ $((u,v) \in [0,\pi] \times [-\pi,\pi])$ について考える.

(1) 第一基本量 E, F, G を求めよ.
(2) 面素 dS を求めよ.
(3) 表面積を計算せよ.

問題 9.2.
　$D \subset \mathbb{R}^2$ を有界領域, $f : D \to \mathbb{R}$ を滑らかな関数とし, f のグラフ $S : \boldsymbol{p}(u,v) = (u, v, f(u,v))$ $((u.v) \in D)$ を考える.

(1) 第一基本量 E, F, G を求めよ.
(2) 面素 dS を求めよ.

定理 9.2.
　曲面 $S : \boldsymbol{p}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ $((u,v) \in D)$ と, S 上の連続関数 $f : S \to \mathbb{R}$ に対して

$$\int_S f\, dS = \iint_D f(\boldsymbol{p}(u,v))\sqrt{EG - F^2}\, dudv, \quad \int_S f\, dxdy = \iint_D f(\boldsymbol{p}(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\, dudv,$$

$$\int_S f\, dydz = \iint_D f(\boldsymbol{p}(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\, dudv, \qquad \int_S f\, dzdx = \iint_D f(\boldsymbol{p}(u,v))\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\, dudv$$

となる. ただし, $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ などである.

問題 9.3.
　次の面積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^2} (x + y + z)\, dS$
(2) $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^2} (x + y + z)\, dxdy$
　($dydz$, $dzdx$ については演習問題にはしないが, 各自計算してみること.)

定理 9.3.

曲面 $S : \boldsymbol{p}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ $((u,v) \in D)$ に対する単位法線ベクトルは, 第一基本量 E, F, G を用いて

$$\boldsymbol{n} = \pm \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v}$$

で表すことができる.

問題 9.4.

次の面積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_S (4x, 4y, -2z) \cdot \boldsymbol{n}\, dS$, $\quad S : x^2 + y^2 + z^2 = 4$ の xy 平面より上の半球面, $\boldsymbol{n}$ は第 3 成分が正となる単位法線ベクトル (つまり外に向くように取る).

(2) $\displaystyle\int_S (6z, 2x, -3y) \cdot \boldsymbol{n}\, dS$, $\quad S : (\cos u, \sin u, v)$ $((u,v) \in [-\pi, \pi] \times [0, 3])$ は円柱の一部.
$\boldsymbol{n}$ は円柱の外に向くように取った単位法線ベクトル.

問題 9.5.

曲面 $S : \boldsymbol{p}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ $((u,v) \in D)$ と, S 上の滑らかなベクトル場 $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3) : S \to \mathbb{R}^3$ に対して $\boldsymbol{n} := \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial v}$ とおくと

$$\int_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \int_S (F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dxdy)$$

となることを示せ.

解答

問題 9.1

(1) $E = 1$, $F = 0$, $G = \sin^2 u$
(2) $dS = \sin u\, dudv$
(3) 4π

問題 9.2

(1) $E = 1 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)^2$, $F = \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial v}$, $G = 1 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)^2$
(2) $dS = \sqrt{1 + |\nabla f(u,v)|^2}\, dudv$

問題 9.3

(1) 0
(2) $\dfrac{4}{3}\pi$

問題 9.4

(1) 32π
(2) 0

解析概論D演習　(2015年12月11日)

定理 10.1 (Gaussの発散定理)**.**
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界領域とし, $\partial\Omega$ は滑らかとする. $\boldsymbol{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ を滑らかなベクトル場とし, $\boldsymbol{n}$ を $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルとすると

$$\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dx = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

が成り立つ[4].

問題 10.1.
$B_2^3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$ とし, $\boldsymbol{F} : \overline{B_2^3} \to \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{F}(x, y, z) := (4x, 4y, -2z)$ $((x, y, z) \in \overline{B_2^3})$ で定める.

(1) $\displaystyle\iiint_{B_2^3} \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dxdydz$ を計算せよ.

(2) $\displaystyle\iint_{\partial B_2^3} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ を計算せよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は外向き単位法線ベクトルである.

(3) Gaussの発散定理が上記の計算で正しいこと, すなわち

$$\iiint_{B_2^3} \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dxdydz = \iint_{\partial B_2^3} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

をたしかめよ.

問題 10.2.
$R > 0$ に対して $\mathbb{S}_R^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ とおく. $\boldsymbol{F}(x, y, z) := (x^3, y^3, z^3)$ とおくとき $\displaystyle\iint_{\mathbb{S}_R^2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ を求めよ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は外向き単位法線ベクトルである.

問題 10.3.
$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界領域, $\partial\Omega$ は滑らかとする. f, g を $\overline{\Omega}$ 上連続で滑らかなスカラー場, $\boldsymbol{F}$ を $\overline{\Omega}$ 上連続で滑らかなベクトル場とする. このとき, 次を示せ. ただし, $\boldsymbol{n}$ は外向き単位法線ベクトルとする.

(1) $\displaystyle\int_\Omega \boldsymbol{F} \cdot \nabla f\, dx = \int_{\partial\Omega} f \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS - \int_\Omega f \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dx.$

(2) $\displaystyle\int_\Omega (f\Delta g + \nabla f \cdot \nabla g)\, dx = \int_{\partial\Omega} f \nabla g \cdot \boldsymbol{n}\, dS \left(= \int_{\partial\Omega} f \frac{dg}{d\boldsymbol{n}}\, dS \right).$

(3) $\displaystyle\int_\Omega (f\Delta g - g\Delta f)\, dx = \int_{\partial\Omega} (f \nabla g \cdot \boldsymbol{n} - g \nabla f \cdot \boldsymbol{n})\, dS \left(= \int_{\partial\Omega} \left(f \frac{dg}{d\boldsymbol{n}} - g \frac{df}{d\boldsymbol{n}} \right) dS \right)$

---

[4] dS は $d\sigma$ と書かれることも多い. また, $\boldsymbol{n}$ は ν で表すことも多い.

問題 10.4.

$n \in \mathbb{N}$, $r > 0$ に対して, $B_r^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$ とおく.

(1) $|B_r^n|$ で B_r^n の体積を表すことにすると $n|B_r^n| = \displaystyle\int_{B_r^n} \operatorname{div} x \, dx$ となることを示せ.

(2) $|B_r^n| = \omega_n r^n$ とおく. $\mathbb{S}_r^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = r\}$ とおき, その表面積を $|\mathbb{S}_r^{n-1}|$ と書くことにするとき, $|\mathbb{S}_r^{n-1}| = n\omega_n r^{n-1}$ となることを示せ.

注意 10.1.

$n = 2$ について, $|B_r^2| = \pi r^2$, $|\mathbb{S}_r^1| = 2\pi r = (\pi r^2)' = (|B_r^2|)'$ である. また, $n = 3$ について, $|B_r^3| = \dfrac{4}{3}\pi r^3$, $|\mathbb{S}_r^2| = 4\pi r^2 = \left(\dfrac{4}{3}\pi r^3\right)' = (|B_r^3|)'$ である. 問題 10.4 は $n \in \mathbb{N}$ に対して, $|\mathbb{S}_r^{n-1}| = (|B_r^n|)'$ となることを示している.

問題 10.5.

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を有界領域, $\partial\Omega$ は滑らかとする. $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ は 2 回微分可能で, $u|_{\partial\Omega} = 0$ とする. また, $\phi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ は滑らかで, $\phi|_{\partial\Omega} = 0$ とする. $-1 < t < 1$ に対して

$$F(t) := \iiint_\Omega |\nabla(u(x,y,z) + t\phi(x,y,z))|^2 \, dxdydz$$

とおき, $\dfrac{dF}{dt}(0) = 0$ を仮定する.

(1) $\dfrac{dF}{dt}(t)$ を形式的に (微分と積分の交換は認めて) 計算せよ.

(2) $\displaystyle\int_\Omega (-\Delta u(x,y,z))\phi(x,y,z) \, dxdydz = 0$ を示せ.

注意 10.2.

問題 10.5 で, $\phi|_{\partial\Omega} = 0$ をみたす任意の関数 ϕ に対して $\dfrac{dF}{dt}(0) = 0$ が成り立つならば, $-\Delta u(x,y,z) = 0$ が推測できる. これは実際に (適当に仮定をつけることで) 正しいことが証明できる. $\dfrac{dF}{dt}(0) = 0$ については, なんらかの条件のもとで導出できることが多い. 実際, この $\dfrac{dF}{dt}(0) = 0$ の仮定は, 物理や化学の言葉でいうと「エネルギーが最小になっている」から導出できる. つまり, $-\Delta$ はただ単純に二階微分の和をとってみたというものではなく, 物理や化学などでベクトル解析を応用するときに必然的にでてくるものである.

解答

問題 10.1

(1) 64π

(2) 64π

問題 10.2

$\dfrac{12}{5}\pi R^5$ (Gauss の発散定理を用いた計算と直接の計算の両方をためしてみよ)

問題 10.5

(1) $2\displaystyle\iiint_\Omega ((\nabla u(x,y,z) + t\nabla\phi(x,y,z)) \cdot \nabla\phi(x,y,z)) \, dxdydz$

解析概論D演習　(2015年12月18日)

定理 11.1 (Greenの定理)**.**

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を有限個の単純閉曲線で囲まれた有界領域とする. P, Q を Ω 上のスカラー場とすると

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial \Omega} (P\,dx + Q\,dy) \tag{11.1}$$

が成り立つ. ただし, 右辺において, $\partial\Omega$ の向きは Ω を左手にみて進む向きとする (自然な向きという).

問題 11.1.

Green の定理を用いて, 次の積分を計算せよ.

(1) $\displaystyle\int_{\partial D} ((y - \sin x)\,dx + \cos x\,dy), \quad D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

(2) $\displaystyle\int_{\partial D} ((3x + 4y)\,dx + (2x - 3y)\,dy), \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$

問題 11.2.

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を有限個の単純閉曲線で囲まれた有界領域とする. $C := \partial\Omega$ として, $C : \boldsymbol{\varphi}(s) = (x(s), y(s))$ $(0 \leq s \leq L)$ は $|\boldsymbol{\varphi}'(s)| \equiv 1$ をみたすとする. Gauss の発散定理から Green の定理を導きたい.

(1) (11.1) の右辺の被積分関数について $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = \operatorname{div} \boldsymbol{F}$ となるようなベクトル場 $\boldsymbol{F}$ を P と Q を用いて表せ.

(2) $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルは $\boldsymbol{n} = (y'(s), -x'(s))$ で与えられることが知られている[5]. このことを利用して, Gauss の発散定理から Green の定理を導け.

定理 11.2 (Stokesの定理)**.**

S を $\mathbb{R}^3$ 内の曲面で, S の連続な単位法線ベクトル場 $\boldsymbol{n}$ が存在するとし, この曲面を囲う曲線を $C : \boldsymbol{\varphi}(t)$ とする. このとき, $S \subset \Omega$ をみたす領域 Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{F}$ について

$$\iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,dS = \int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\varphi}$$

が成り立つ.

問題 11.3.

$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ z \geq 0\}$, $C := \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 9\}$ とおくとき,

$$\iint_S \operatorname{rot}(2x - y + z, x + y - z^2, 3x - 2y + 4) \cdot \boldsymbol{n}\,dS = \int_C (2x - y + z, x + y - z^2, 3x - 2y + 4) \cdot d\boldsymbol{\varphi}$$

を確かめよ.

---

[5] $-\frac{\pi}{2}$ 回転させる一次変換を考えればよい

以下, Gauss の発散定理, Green の定理, Stokes の定理を微分形式の理論を用いて統一的に扱えることを概説する.

11.1. **微分形式.** $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 上の微分形式とは, Ω 上の関数と微分 dx, dy, dz を加えたり掛けたりしてできるものであるが, 掛け算は外積 $\wedge$ と呼ばれ

$$dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0, \quad dy \wedge dx = -dx \wedge dy \quad \text{etc}$$

に従うものとする. 具体的には

0-形式 (0-form)	Ω 上のスカラー場 f
1-形式 (1-form)	$f\,dx + g\,dy + h\,dz$
2-形式 (2-form)	$f\,dy \wedge dz + g\,dz \wedge dx + h\,dx \wedge dy$
3-形式 (3-form)	$f\,dx \wedge dy \wedge dz$

である. ここで, f, g, h は Ω 上のスカラー場である.

α, β を 1-形式で

$$\alpha = \alpha_1\,dx + \alpha_2\,dy + \alpha_3\,dz, \quad \beta = \beta_1\,dx + \beta_2\,dy + \beta_3\,dz$$

とかくと, $\alpha \wedge \beta$ は 2-形式となり

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge \beta &= (\alpha_1\,dx + \alpha_2\,dy + \alpha_3\,dz) \wedge (\beta_1\,dx + \beta_2\,dy + \beta_3\,dz) \\
&= \alpha_1\beta_1\,dx \wedge dx + \alpha_1\beta_2\,dx \wedge dy + \alpha_1\beta_3\,dx \wedge dz \\
&\quad + \alpha_2\beta_1\,dy \wedge dx + \alpha_2\beta_2\,dy \wedge dy + \alpha_2\beta_3\,dy \wedge dz \\
&\quad + \alpha_3\beta_1\,dz \wedge dx + \alpha_3\beta_2\,dz \wedge dy + \alpha_3\beta_3\,dz \wedge dz \\
&= \alpha_1\beta_2\,dx \wedge dy + \alpha_1\beta_3\,dx \wedge dz \\
&\quad - \alpha_2\beta_1\,dx \wedge dy + \alpha_2\beta_3\,dy \wedge dz \\
&\quad - \alpha_3\beta_1\,dx \wedge dz + \alpha_3\beta_2\,dy \wedge dz \\
&= (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\,dx \wedge dy + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)\,dx \wedge dz + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\,dy \wedge dz
\end{aligned}$$

となる.

11.2. **外微分.** 微分形式に対する外微分を定義する. 0-形式 f に対しては, 外微分 df を

$$df := \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

で定義し, 1-形式 $\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$ に対しては, 外微分 $d\omega$ を

$$\begin{aligned}
d\omega &:= df \wedge dx + dg \wedge dy + dh \wedge dz \\
&= \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy
\end{aligned}$$

で定義し, 2-形式 $\omega = f\,dy \wedge dz + g\,dz \wedge dx + h\,dx \wedge dy$ に対しては, 外微分 $d\omega$ を

$$\begin{aligned}
d\omega &:= df \wedge dy \wedge dz + dg \wedge dz \wedge dx + dh \wedge dx \wedge dy \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}$$

で定義する.

問題 11.4.

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ を有界領域とする.

(1) Ω 上の 1 次微分形式 $\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$ に対して $d(d\omega) = 0$ を示せ.

(2) Ω 上の滑らかなベクトル場 $\boldsymbol{F} = (F^1, F^2, F^3)$ に対して, Ω 上の 2 次微分形式 ω を $\omega = F^1\,dy\wedge dz + F^2\,dz\wedge dx + F^3\,dx\wedge dy$ とおく. このとき, $d\omega = \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,dx\wedge dy\wedge dz$ となることを示せ.

微分形式から積分を定義する. 1-形式 $\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz$ が曲線 C 上で定義されているとき, ω の積分を

$$\int_C \omega := \int_C f\,dx + g\,dy + h\,dz$$

で定義する. 2-形式 $\omega = f\,dy\wedge dz + g\,dz\wedge dx + h\,dx\wedge dy$ が曲面 S 上で定義されているときに, ω の積分を

$$\int_S \omega := \int_S (fn_x + gn_y + hn_z)\,dS$$

で定義する. ただし, $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$ は外向き単位法線ベクトルである. 3-形式 $\omega = f\,dx\wedge dy\wedge dz$ が有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 上で定義されているとき, ω の積分を

$$\int_\Omega \omega := \int_\Omega f\,dxdydz$$

で定義する.

さて, $\boldsymbol{F} = (F^1, F^2, F^3)$ を Ω 上の滑らかなベクトル場とすると, Gauss の発散定理は

$$\int_\Omega \operatorname{div}\boldsymbol{F}\,dxdydz = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

であった. ここで, 2-形式 ω を

$$\omega := F_1\,dy\wedge dz + F_2\,dz\wedge dx + F_3\,dx\wedge dy$$

とおくと, 問題 11.4 より,

$$\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega \tag{11.2}$$

が得られる. Gauss の発散定理は (11.2) を示すことを得られる.

定理 11.3 (Stokes の定理)**.**

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を領域, $\partial\Omega$ は滑らかとする. ω を Ω 上の k 次微分形式とすると, 向き付け可能な境界をもつ, コンパクトな $(k+1)$ 次元曲面 $S = S^{k+1}$ に対して,

$$\int_S d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$$

が成り立つ.

問題 11.5.

Stokes の定理 11.3 を認めて, 定理 11.2 を導きたい.

(1) Ω 上のベクトル場 $\boldsymbol{F} = (F^1, F^2, F^3)$ に対して $\displaystyle\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\varphi}$ を 1 次形式の積分で表せ.

(2) 定理 11.3 を認めて, 定理 11.2 を導け.

解析概論 D 演習　(2015 年 1 月 15 日)

問題 12.1.

$a \in \mathbb{R}$, $R > 0$, $D_R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x + y < 2R, 0 < x - y < 2R\}$ とし, 積分

$$I(a, R) := \iint_{D_R} e^{-(x^2+axy+y^2)}\, dxdy$$

を考える.

(1) $x = u + v$, $y = u - v$ とおき, $I(a, R)$ を u, v を変数とする積分で表せ. ただし, 積分の値を求める必要はない.

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty} I(a, R)$ が収束する a の範囲を求めて, その極限値を a を用いて表せ. 必要ならば, $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を用いてもよい.

問題 12.2.

積分 $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} (x + y)^2 e^{-x^2-y^2}\, dxdy$ を求めよ.

問題 12.3.

$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le y \le 1\}$ とする. 積分

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dxdy$$

を極座標変換を用いて計算せよ.

問題 12.4.

$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x < \infty, 0 \le y \le 1\}$ とおく. 積分

$$\iint_D (e^{-xy} - 2e^{-2xy})\, dxdy$$

について考える.

(1) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_1^\infty (e^{-xy} - 2e^{-2xy})\, dx$ は正の値に収束することを示せ.

(2) $\displaystyle\int_1^\infty dx \int_0^1 (e^{-xy} - 2e^{-2xy})\, dy$ は負の値に収束することを示せ.

問題 12.5.

$t > 0$ に対して

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{t} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{t}\right)\, dxdy$$

を求めよ.