ある退化放物型方程式の解の正則性評価について

水野 将司

東北大学 大学院理学研究科 D3・日本学術振興会特別研究員 DC

“第 6 回 数学総合若手研究集会”

February 16, 2010

北海道大学
HOKKAIDO UNIVERSITY

退化放物型方程式

退化放物型方程式

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha = \operatorname{div} f, & t > 0\,,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{dP}$$

$u = u(t,x)$; 未知, $f = f(t,x)$; 既知, $u_0 = u_0(x)$; 既知

- $\Delta u^\alpha = \operatorname{div}(\alpha u^{\alpha-1} \nabla u)$

$$\alpha = 1 \Longrightarrow u^{\alpha-1} \equiv 1 \qquad \text{(一様放物型)}$$

$$\alpha > 1 \Longrightarrow u^{\alpha-1} = 0 \quad \text{if } u = 0 \qquad \text{(退化放物型)}$$

- $f = f(x) \in L^p \Longrightarrow \operatorname{div} f \in \dot{W}^{-1,p}$

問題

(dP) の解 (弱解) の正則性 (可微分性) は？

退化放物型方程式

退化放物型方程式

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha = \operatorname{div} f, & t > 0\,,\, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{dP}$$

$u = u(t,x)$; 未知, $f = f(t,x)$; 既知, $u_0 = u_0(x)$; 既知

- $\Delta u^\alpha = \operatorname{div}(\alpha u^{\alpha-1} \nabla u)$

$$\alpha = 1 \Longrightarrow u^{\alpha-1} \equiv 1 \qquad \text{(一様放物型)}$$

$$\alpha > 1 \Longrightarrow u^{\alpha-1} = 0 \quad \text{if } u = 0 \qquad \text{(退化放物型)}$$

- $f = f(x) \in L^p \Longrightarrow \operatorname{div} f \in \dot{W}^{-1,p}$

問題

(dP) の解 (弱解) の正則性 (可微分性) は？

退化放物型方程式

退化放物型方程式

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha = \operatorname{div} f, & t > 0\,,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{dP}$$

$u = u(t,x)$; 未知, $f = f(t,x)$; 既知, $u_0 = u_0(x)$; 既知

- $\Delta u^\alpha = \operatorname{div}(\alpha u^{\alpha-1}\nabla u)$

$$\alpha = 1 \Longrightarrow u^{\alpha-1} \equiv 1 \qquad \text{(一様放物型)}$$

$$\alpha > 1 \Longrightarrow u^{\alpha-1} = 0 \quad \text{if } u = 0 \qquad \text{(退化放物型)}$$

- $f = f(x) \in L^p \Longrightarrow \operatorname{div} f \in \dot{W}^{-1,p}$

問題

(dP) の解 (弱解) の正則性 (可微分性) は？

退化放物型方程式

退化放物型方程式

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha = \operatorname{div} f, & t > 0\,, x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{dP}$$

$u = u(t,x)$; 未知, $f = f(t,x)$; 既知, $u_0 = u_0(x)$; 既知

- $\Delta u^\alpha = \operatorname{div}(\alpha u^{\alpha-1} \nabla u)$

$$\alpha = 1 \Longrightarrow u^{\alpha-1} \equiv 1 \qquad \text{(一様放物型)}$$

$$\alpha > 1 \Longrightarrow u^{\alpha-1} = 0 \quad \text{if } u = 0 \qquad \text{(退化放物型)}$$

- $f = f(x) \in L^p \Longrightarrow \operatorname{div} f \in \dot{W}^{-1,p}$

問題

(dP) の解 (弱解) の正則性 (可微分性) は？

正則性評価

$$\partial_t u - \Delta u^\alpha = \mathrm{div}\, f$$

$\Downarrow$ (difficult!!)

古典解

$\Uparrow$

正則性評価

$\Uparrow$

一般化された解

正則性評価 $\Rightarrow$ 摂動法, コンパクト性, 漸近挙動

正則性評価

$$\partial_t u - \Delta u^\alpha = \mathrm{div}\, f$$

$\Downarrow$ (difficult!!)

古典解

$\Uparrow$

正則性評価

$\Uparrow$

一般化された解

正則性評価 $\Longrightarrow$ 摂動法, コンパクト性, 漸近挙動

正則性評価

$$\partial_t u - \Delta u^\alpha = \mathrm{div}\, f$$

$\Downarrow$ (difficult!!)

古典解

$\Uparrow$

正則性評価

$\Uparrow$

一般化された解

正則性評価 $\Rightarrow$ 摂動法, コンパクト性, 漸近挙動

porous medium 方程式

porous medium 方程式 ($\alpha > 1$)

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha = 0 \ (\in C^\infty), & t > 0\,,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{PME}$$

- $\alpha = 1$ (一様放物型)

$$u_0 \in C^\infty \Rightarrow u \in C^\infty$$

- $\alpha > 1$ (退化放物型)

$$u_0 \in C^\infty \not\Rightarrow u \in C^1$$

porous medium 方程式

porous medium 方程式 ($\alpha > 1$)

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha = 0 \ (\in C^\infty), & t > 0\,,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{PME}$$

- $\alpha = 1$ (一様放物型)

$$u_0 \in C^\infty \Rightarrow u \in C^\infty$$

- $\alpha > 1$ (退化放物型)

$$u_0 \in C^\infty \not\Rightarrow u \in C^1$$

porous medium 方程式

porous medium 方程式 ($\alpha > 1$)

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha = 0 \ (\in C^\infty), & t > 0\,,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{PME}$$

- $\alpha = 1$ (一様放物型)

$$u_0 \in C^\infty \Rightarrow u \in C^\infty$$

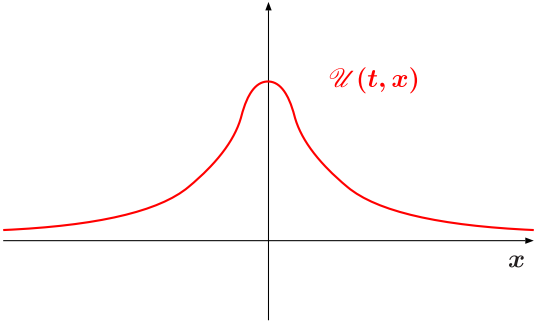
- $\alpha > 1$ (退化放物型)

$$u_0 \in C^\infty \not\Rightarrow u \in C^1$$

Gauss 核と Barenblatt 解 (自己相似解)

$$\partial_t \mathscr{U} - \Delta \mathscr{U}^{\alpha} = 0$$

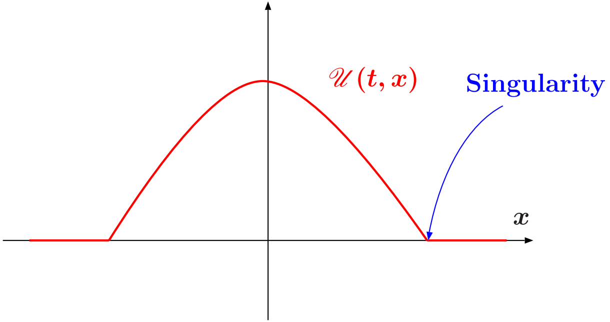
- $\alpha = 1 \Longrightarrow$ Gauss 核
- $\alpha > 1 \Longrightarrow$ Barenblatt 解



Gauss 核と Barenblatt 解 (自己相似解)

$$\partial_t \mathscr{U} - \Delta \mathscr{U}^{\alpha} = 0$$

- $\alpha = 1 \Longrightarrow$ Gauss 核
- $\alpha > 1 \Longrightarrow$ Barenblatt 解



Hölder 連続性

定義 (Hölder 連続性)

$0 < \gamma \leq 1$,

$u = u(t,x)$ が γ 次 Hölder 連続 $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists C > 0$ s.t.

$$|u(t,x) - u(s,y)| \leq C(|t-s|^{\frac{\gamma}{2}} + |x-y|^{\gamma})$$

$\forall (t,x), (s,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$

注意　$u = u(x)$ について

- $\gamma = 1 \Longleftrightarrow$ Lipschits 連続
- $\nabla u \in L^\infty \Longleftrightarrow u$ は Lipschits 連続　(Rademacher の定理)
- u が γ 次 Hölder 連続 $\overset{\sim}{\Longleftrightarrow} u \in W^{\gamma,\infty}$

Hölder 連続性

定義 (Hölder 連続性)

$0 < \gamma \leq 1$,
$u = u(x)$ が γ 次 Hölder 連続 $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists C > 0$ s.t.

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^{\gamma}$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

注意　$u = u(x)$ について

- $\gamma = 1 \Longleftrightarrow$ Lipschits 連続
- $\nabla u \in L^{\infty} \Longleftrightarrow u$ は Lipschits 連続　(Rademacher の定理)
- u が γ 次 Hölder 連続 $\overset{\sim}{\Longleftrightarrow} u \in W^{\gamma,\infty}$

Hölder 連続性

定義 (Hölder 連続性)

$0 < \gamma \leq 1$,

$u = u(x)$ が γ 次 Hölder 連続 $\underset{\text{def}}{\iff}$ $\exists C > 0$ s.t.

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\gamma$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

注意　$u = u(x)$ について

- $\gamma = 1 \iff$ Lipschits 連続
- $\nabla u \in L^\infty \iff u$ は Lipschits 連続　(Rademacher の定理)
- u が γ 次 Hölder 連続 $\overset{\sim}{\iff}$ $u \in W^{\gamma,\infty}$

Hölder 連続性

定義 (Hölder 連続性)

$0 < \gamma \leq 1$,
$u = u(x)$ が γ 次 Hölder 連続 $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists C > 0$ s.t.

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x-y|^\gamma$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

注意 $u = u(x)$ について

- $\gamma = 1 \Longleftrightarrow$ Lipschits 連続
- $\nabla u \in L^\infty \Longleftrightarrow u$ は Lipschits 連続 (Rademacher の定理)
- u が γ 次 Hölder 連続 $\overset{\sim}{\Longleftrightarrow} u \in W^{\gamma,\infty}$

Hölder 連続性

定義 (Hölder 連続性)

$\mathbf{0} < \gamma \leq \mathbf{1}$,

$u = u(t,x)$ が γ 次 Hölder 連続 $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists C > \mathbf{0}$ s.t.

$$|u(t,x) - u(s,y)| \leq C(|t-s|^{\frac{\gamma}{2}} + |x-y|^{\gamma})$$

$\forall (t,x),(s,y) \in (\mathbf{0},\infty) \times \mathbb{R}^n$

Hölder 連続性の有用性

- 同程度連続性 $\Rightarrow$ Ascoli-Arzelá の定理
- 等高面の正則性, 修正可能性 $\Rightarrow$ 幾何学的測度論, (動く) 曲面の解析
- 漸近安定性の解析 (cf. Ogawa-M.)

Hölder 連続性

定義 (Hölder 連続性)

$0 < \gamma \leq 1$,
$u = u(t,x)$ が γ 次 Hölder 連続 $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists C > 0$ s.t.

$$|u(t,x) - u(s,y)| \leq C(|t-s|^{\frac{\gamma}{2}} + |x-y|^{\gamma})$$

$\forall (t,x),(s,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n$

Hölder 連続性の有用性

- 同程度連続性 $\Rightarrow$ Ascoli-Arzelá の定理
- 等高面の正則性, 修正可能性 $\Rightarrow$ 幾何学的測度論, (動く) 曲面の解析
- 漸近安定性の解析 (cf. Ogawa-M.)

Hölder 連続性

定義 (Hölder 連続性)

$0 < \gamma \leq 1$,

$u = u(t, x)$ が γ 次 Hölder 連続 $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists C > 0$ s.t.

$$|u(t, x) - u(s, y)| \leq C(|t - s|^{\frac{\gamma}{2}} + |x - y|^{\gamma})$$

$\forall (t, x), (s, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$

Hölder 連続性の有用性

- 同程度連続性 $\Rightarrow$ Ascoli-Arzelá の定理
- 等高面の正則性, 修正可能性 $\Rightarrow$ 幾何学的測度論, (動く) 曲面の解析
- 漸近安定性の解析 (cf. Ogawa-M.)

問題

退化放物型方程式

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha = \operatorname{div} f, & t > 0\,,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{dP}$$

$u = u(t,x)$; 未知, $f = f(t,x)$; 既知, $u_0 \in C^\infty$; 既知

問題

(dP) の解 (弱解) の Hölder 連続性は？

注意

- $\nabla u \in L^p$ は未解決
- 線形半群による方法は困難

問題

退化放物型方程式

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha = \operatorname{div} f, & t > 0\,,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{dP}$$

$u = u(t,x)$; 未知, $f = f(t,x)$; 既知, $u_0 \in C^\infty$; 既知

問題

(dP) の解 (弱解) の Hölder 連続性は？

注意

- $\nabla u \in L^p$ は未解決
- 線形半群による方法は困難

問題

退化放物型方程式

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha = \operatorname{div} f, & t > 0\,,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{dP}$$

$u = u(t,x)$; 未知, $f = f(t,x)$; 既知, $u_0 \in C^\infty$; 既知

問題

(dP) の解 (弱解) の Hölder 連続性は？

注意

- $\nabla u \in L^p$ は未解決
- 線形半群による方法は困難

既存の結果 1

porous medium 方程式

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u^{\alpha} = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{PME}$$

- Caffarelli-Friedman '80
  u の (一様な) Hölder 連続性
  $\Leftarrow$ Aronson-Benilan 評価 & 比較原理

困難な点 (外力項のある場合)

- Aronson-Benilan 評価は成り立つか？
- (応用上の観点から観て) 比較原理を使いたくない

既存の結果 1

porous medium 方程式

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{PME}$$

- Caffarelli-Friedman '80
  u の (一様な) Hölder 連続性
  $\Leftarrow$ Aronson-Benilan 評価 & 比較原理

困難な点 (外力項のある場合)

- Aronson-Benilan 評価は成り立つか？
- (応用上の観点から観て) 比較原理を使いたくない

既存の結果 2

p-Laplace 発展方程式 ($p > 2$)

$$\begin{cases} \partial_t v - \mathrm{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ v(0,x) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{p-L}$$

- DiBenedetto-Friedman '85, Wiegner '86, Misawa '02
  ∇v の Hölder 連続性

考察

- $$u := |\nabla v| \Longrightarrow \partial_t u - \Delta u^\alpha = F(\nabla v, D^2 v, \dots)$$
  $$n = 1 \Longrightarrow F \equiv 0$$

- DiBenedetto-Friedman は $f \in L^q(0,\infty; L^p)$, $\frac{2}{q} + \frac{n}{p} < 1$ に対して (dP) の解の Hölder 連続性を主張 (証明は与えられていない)

既存の結果 2

p-Laplace 発展方程式 ($p > 2$)

$$\begin{cases} \partial_t v - \mathrm{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ v(0,x) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (p\text{-L})$$

- DiBenedetto-Friedman ’85, Wiegner ’86, Misawa ’02
  ∇v の Hölder 連続性

考察

- $$u := |\nabla v| \Longrightarrow \partial_t u - \Delta u^\alpha = F(\nabla v, D^2 v, \dots)$$
  $$n = 1 \Longrightarrow F \equiv 0$$

- DiBenedetto-Friedman は $f \in L^q(0,\infty; L^p)$, $\frac{2}{q} + \frac{n}{p} < 1$ に対して (dP) の解の Hölder 連続性を主張 (証明は与えられていない)

既存の結果 2

p-Laplace 発展方程式 ($p > 2$)

$$\begin{cases} \partial_t v - \mathrm{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ v(0,x) = v_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \qquad (p\text{-L})$$

- DiBenedetto-Friedman '85, Wiegner '86, Misawa '02
  ∇v の Hölder 連続性

考察

- $$u := |\nabla v| \Longrightarrow \partial_t u - \Delta u^\alpha = F(\nabla v, D^2 v, \dots)$$
  $$n = 1 \Longrightarrow F \equiv 0$$

- DiBenedetto-Friedman は $f \in L^q(0,\infty; L^p)$, $\frac{2}{q} + \frac{n}{p} < 1$ に対して (dP) の解の Hölder 連続性を主張 (証明は与えられていない)

弱 L^p 空間

定義 (弱 L^p 空間)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$; domain, $p > 2$.

$f \in L^p_{\mathrm{w}}(\Omega) \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ and

$$\|f\|^2_{L^p_{\mathrm{w}}(\Omega)} := \sup_{K \subset \Omega\,;\text{cpt}} \frac{1}{|K|^{1-\frac{2}{p}}} \int_K |f|^2\,dx < \infty$$

注意

- $L^p \subsetneq L^p_{\mathrm{w}} \Longrightarrow L^q(0,\infty;L^p) \subset L^q(0,\infty;L^p_{\mathrm{w}})$

$$\because \quad \int_K |f|^2\,dx \le |K|^{1-\frac{2}{p}} \|f\|^2_{L^p}\,, \quad |x|^{-\frac{n}{p}} \in L^p_{\mathrm{w}}(\mathbb{R}^n)$$

- $L^p_{\mathrm{w}} \cong L^{p,\infty}$ (Lorentz 空間)

弱 L^p 空間

定義 (弱 L^p 空間)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$; domain, $p > 2$.
$f \in L^p_{\mathrm{w}}(\Omega) \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ and

$$\|f\|^2_{L^p_{\mathrm{w}}(\Omega)} := \sup_{K \subset \Omega\,;\text{cpt}} \frac{1}{|K|^{1-\frac{2}{p}}} \int_K |f|^2\,dx < \infty$$

注意

- $L^p \subsetneq L^p_{\mathrm{w}} \Longrightarrow L^q(0,\infty; L^p) \subsetneq L^q(0,\infty; L^p_{\mathrm{w}})$

$$\because \quad \int_K |f|^2\,dx \le |K|^{1-\frac{2}{p}} \|f\|^2_{L^p}, \quad |x|^{-\frac{n}{p}} \in L^p_{\mathrm{w}}(\mathbb{R}^n)$$

- $L^p_{\mathrm{w}} \cong L^{p,\infty}$ (Lorentz 空間)

弱 L^p 空間

定義 (弱 L^p 空間)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$; domain, $p > 2$.
$f \in L^p_{\mathrm{w}}(\Omega) \underset{\text{def}}{\iff} f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ and

$$\|f\|^2_{L^p_{\mathrm{w}}(\Omega)} := \sup_{K \subset \Omega\,;\text{cpt}} \frac{1}{|K|^{1-\frac{2}{p}}} \int_K |f|^2 \, dx < \infty$$

注意

- $L^p \subsetneq L^p_{\mathrm{w}} \Longrightarrow L^q(0,\infty; L^p) \subsetneq L^q(0,\infty; L^p_{\mathrm{w}})$

$$\because \quad \int_K |f|^2 \, dx \le |K|^{1-\frac{2}{p}} \|f\|^2_{L^p}, \quad |x|^{-\frac{n}{p}} \in L^p_{\mathrm{w}}(\mathbb{R}^n)$$

- $L^p_{\mathrm{w}} \cong L^{p,\infty}$ (Lorentz 空間)

弱 L^p 空間

定義 (弱 L^p 空間)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$; domain, $p > 2$.

$f \in L^p_{\mathrm{w}}(\Omega) \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ and

$$\|f\|^2_{L^p_{\mathrm{w}}(\Omega)} := \sup_{K \subset \Omega\, ;\text{cpt}} \frac{1}{|K|^{1-\frac{2}{p}}} \int_K |f|^2\, dx < \infty$$

注意

- $L^p \subsetneqq L^p_{\mathrm{w}} \Longrightarrow L^q(0,\infty; L^p) \subsetneqq L^q(0,\infty; L^p_{\mathrm{w}})$

$$\because \quad \int_K |f|^2\, dx \le |K|^{1-\frac{2}{p}} \|f\|^2_{L^p}, \quad |x|^{-\frac{n}{p}} \in L^p_{\mathrm{w}}(\mathbb{R}^n)$$

- $L^p_{\mathrm{w}} \cong L^{p,\infty}$ (Lorentz 空間)

主定理 (Hölder 評価)

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha = \operatorname{div} f(t,x), & t>0,\ x\in\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, & x\in\mathbb{R}^n. \end{cases} \qquad \text{(dP)}$$

定理 (Hölder 評価)

$n \geq 2,\ \frac{2}{q} + \frac{n}{p} < 1,\ f \in L^q(0,\infty; L^p_{\mathrm{w}}),\ u \in L^\infty_{t,x}$
$\Longrightarrow 0 < \exists\gamma < 1$ and $\exists C > 0$ s.t.

$$|u^\alpha(t,x) - u^\alpha(s,y)| \leq C(|t-s|^{\frac{\gamma}{2}} + |x-y|^\gamma)$$

$$\leq C_{n,\alpha,p,q}\left(\|u\|^\alpha_{L^\infty} + \|u\|^{\frac{1}{q}(\alpha-1)}_{L^\infty}\|f\|_{L^q(0,\infty;L^p_{\mathrm{w}})}\right) \times \left(\|u\|^{\frac{\gamma}{2}(\alpha-1)}_{L^\infty}|t-s|^{\frac{\gamma}{2}} + |x-y|^\gamma\right)$$

$$\forall (t,x),\ (s,y) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^n$$

主定理 (Hölder 評価)

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha = \operatorname{div} f(t,x), & t>0,\ x\in\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, & x\in\mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{dP}$$

定理 (Hölder 評価)

$n \geq 2,\ \frac{2}{q}+\frac{n}{p}<1,\ f\in L^q(0,\infty;L^p_{\mathrm{w}}),\ u\in L^\infty_{t,x}$
$\Longrightarrow 0<\exists\gamma<1$ and $\exists C>0$ s.t.

$$\begin{aligned} &|u^\alpha(t,x)-u^\alpha(s,y)| \\ &\quad\leq C_{n,\alpha,p,q}\left(\|u\|^\alpha_{L^\infty} + \|u\|^{\frac{1}{q}(\alpha-1)}_{L^\infty}\|f\|_{L^q(0,\infty;L^p_{\mathrm{w}})}\right) \\ &\qquad\qquad \times\left(\|u\|^{\frac{\gamma}{2}(\alpha-1)}_{L^\infty}|t-s|^{\frac{\gamma}{2}} + |x-y|^\gamma\right) \\ &\qquad\qquad\qquad \forall(t,x),\ (s,y)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^n \end{aligned}$$

主定理 (Hölder 評価)

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha = \operatorname{div} f(t,x), & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{dP}$$

定理 (Hölder 評価)

$n \geq 2$, $\frac{2}{q} + \frac{n}{p} < 1$, $f \in L^q(0,\infty; L^p_{\mathrm{w}})$, $u \in L^\infty_{t,x}$
$\Longrightarrow 0 < \exists\gamma < 1$ and $\exists C > 0$ s.t.

$$\begin{aligned} &|u^\alpha(t,x) - u^\alpha(s,y)| \\ &\quad \leq C_{n,\alpha,p,q}\left(\|u\|^\alpha_{L^\infty} + \|u\|^{\frac{1}{q}(\alpha-1)}_{L^\infty}\|f\|_{L^q(0,\infty;L^p_{\mathrm{w}})}\right) \\ &\qquad \times \left(\|u\|^{\frac{\gamma}{2}(\alpha-1)}_{L^\infty}|t-s|^{\frac{\gamma}{2}} + |x-y|^\gamma\right) \\ &\qquad\qquad \forall (t,x),\ (s,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

指数に関する注意

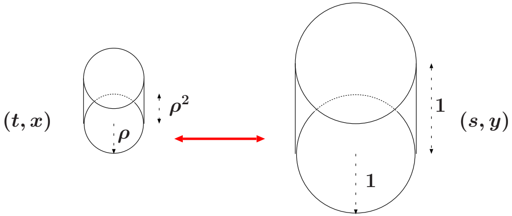
何故 $\frac{2}{q}+\frac{n}{p}<1,\ f\in L^q(0,\infty;L^p_{\mathrm{w}})$ か？ $\rho\ll 1$

$$\partial_t u-\Delta u^{\alpha}=\operatorname{div} f(t,x),\quad (t,x)\in(-\rho^2,0)\times B_\rho$$

$$t=\rho^2 s\,,\ x=\rho y,\quad u_\rho(s,y):=u(t,x)\,,\ f_\rho(s,y):=f(t,x)$$

$$\iff \partial_s u_\rho-\Delta_y u_\rho^{\alpha}=\operatorname{div}(\rho f_\rho(s,y)),\quad (s,y)\in(-1,0)\times B_1$$

$$\|\rho f_\rho\|_{L^q(-1,0;L^p_{\mathrm{w}}(B_1))}=\rho^{1-\frac{2}{q}-\frac{n}{p}}\|f\|_{L^q(-\rho^2,0;L^p_{\mathrm{w}}(B_\rho))}$$



指数に関する注意

何故 $\frac{2}{q} + \frac{n}{p} < 1$, $f \in L^q(0,\infty; L^p_{\mathrm{w}})$ か？ $\rho \ll 1$

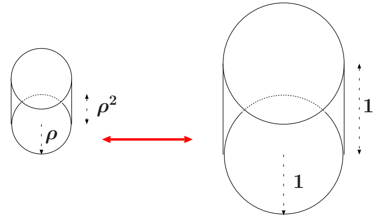
$$\partial_t u - \Delta u^\alpha = \operatorname{div} f(t,x), \quad (t,x) \in (-\rho^2, 0) \times B_\rho$$

$$t = \rho^2 s\,,\ x = \rho y, \quad u_\rho(s,y) := u(t,x)\,,\ f_\rho(s,y) := f(t,x)$$

$$\Longleftrightarrow \partial_s u_\rho - \Delta_y u_\rho^\alpha = \operatorname{div}(\rho f_\rho(s,y)), \quad (s,y) \in (-1,0) \times B_1$$

$$\|\rho f_\rho\|_{L^q(-1,0;L^p_{\mathrm{w}}(B_1))} = \rho^{1-\frac{2}{q}-\frac{n}{p}} \|f\|_{L^q(-\rho^2,0;L^p_{\mathrm{w}}(B_\rho))}$$

(t,x)



(s,y)

指数に関する注意

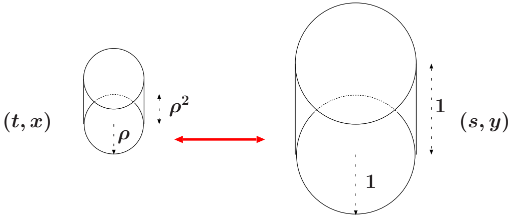
何故 $\frac{2}{q} + \frac{n}{p} < 1,\ f \in L^q(0,\infty; L^p_{\mathrm{w}})$ か？ $\rho \ll 1$

$$\partial_t u - \Delta u^\alpha = \operatorname{div} f(t,x), \quad (t,x) \in (-\rho^2, 0) \times B_\rho$$

$$t = \rho^2 s\,,\ x = \rho y, \quad u_\rho(s,y) := u(t,x)\,,\ f_\rho(s,y) := f(t,x)$$

$$\Longleftrightarrow \partial_s u_\rho - \Delta_y u_\rho^\alpha = \operatorname{div}(\rho f_\rho(s,y)), \quad (s,y) \in (-1,0) \times B_1$$

$$\|\rho f_\rho\|_{L^q(-1,0;L^p_{\mathrm{w}}(B_1))} = \rho^{1-\frac{2}{q}-\frac{n}{p}} \|f\|_{L^q(-\rho^2,0;L^p_{\mathrm{w}}(B_\rho))}$$



重み付き関数に関する注意

重み付き関数が何故表われるのか？ $M > 0\,,\ v := u^{\alpha}$

$$\partial_t v^{\frac{1}{\alpha}} - \Delta v = \operatorname{div} f(t,x), \quad (t,x) \in \Big(-\frac{1}{M^{1-\frac{1}{\alpha}}}, 0\Big) \times B_1$$

$$t = \frac{1}{M^{1-\frac{1}{\alpha}}} s, \quad v_M(s,x) := \frac{1}{M} v(t,x)\,,\ f_M(s,x) := \frac{1}{M} f(t,x)$$

$$\Longleftrightarrow \partial_s v_M^{\frac{1}{\alpha}} - \Delta v_M = \operatorname{div}(f_M(s,x)), \quad (s,x) \in (-1,0) \times B_1$$

$M \cong \|v\|_\infty$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow |v_M(s,x) - v_M(s',y)| &\\ \le C(\|v_M\|_{L^\infty} + \|f_M\|_{L^q(0,\infty;L^p_{\mathrm{w}})}) &\\ \times (|s-s'|^{\frac{\gamma}{2}} + |x-y|^{\gamma}) & \end{aligned}$$

重み付き関数に関する注意

重み付き関数が何故表われるのか？ $M > 0\,,\ v := u^{\alpha}$

$$\partial_t v^{\frac{1}{\alpha}} - \Delta v = \operatorname{div} f(t,x), \quad (t,x) \in \left(-\frac{1}{M^{1-\frac{1}{\alpha}}}, 0\right) \times B_1$$

$$t = \frac{1}{M^{1-\frac{1}{\alpha}}} s, \quad v_M(s,x) := \frac{1}{M} v(t,x)\,,\ f_M(s,x) := \frac{1}{M} f(t,x)$$

$$\iff \partial_s v_M^{\frac{1}{\alpha}} - \Delta v_M = \operatorname{div}(f_M(s,x)), \quad (s,x) \in (-1,0) \times B_1$$

$M \cong \|v\|_\infty$

$$\Longrightarrow |v_M(s,x) - v_M(s',y)| \le C(\|v_M\|_{L^\infty} + \|f_M\|_{L^q(0,\infty;L^p_w)}) \times (|s-s'|^{\frac{\gamma}{2}} + |x-y|^{\gamma})$$

重み付き関数に関する注意

重み付き関数が何故表われるのか？ $M > 0\,,\ v := u^{\alpha}$

$$\partial_t v^{\frac{1}{\alpha}} - \Delta v = \operatorname{div} f(t,x), \quad (t,x) \in \Big(-\frac{1}{M^{1-\frac{1}{\alpha}}}, 0\Big) \times B_1$$

$$t = \frac{1}{M^{1-\frac{1}{\alpha}}} s, \quad v_M(s,x) := \frac{1}{M} v(t,x)\,,\ f_M(s,x) := \frac{1}{M} f(t,x)$$

$$\iff \partial_s v_M^{\frac{1}{\alpha}} - \Delta v_M = \operatorname{div}(f_M(s,x)), \quad (s,x) \in (-1,0) \times B_1$$

$M \cong \|v\|_\infty$

$$\Longrightarrow |v_M(s,x) - v_M(s',y)| \le C(\|v_M\|_{L^\infty} + \|f_M\|_{L^q(0,\infty;L^p_w)}) \times (|s-s'|^{\frac{\gamma}{2}} + |x-y|^{\gamma})$$

重み付き関数に関する注意

重み付き関数が何故表われるのか？ $M > 0\,,\ v := u^{\alpha}$

$$\partial_t v^{\frac{1}{\alpha}} - \Delta v = \mathrm{div}\, f(t,x), \quad (t,x) \in \Big(-\frac{1}{M^{1-\frac{1}{\alpha}}}, 0\Big) \times B_1$$

$$t = \frac{1}{M^{1-\frac{1}{\alpha}}} s, \quad v_M(s,x) := \frac{1}{M} v(t,x)\,,\ f_M(s,x) := \frac{1}{M} f(t,x)$$

$$\Longleftrightarrow \partial_s v_M^{\frac{1}{\alpha}} - \Delta v_M = \mathrm{div}(f_M(s,x)), \quad (s,x) \in (-1,0) \times B_1$$

$M \cong \|v\|_\infty$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow |v_M(s,x) - v_M(s',y)| & \\ \leq C(\|v_M\|_{L^\infty} + \|f_M\|_{L^q(0,\infty;L^p_{\mathrm{w}})}) & \\ \times (|s-s'|^{\frac{\gamma}{2}} + |x-y|^{\gamma}) & \end{aligned}$$

重み付き関数に関する注意 (続き)

$$v := u^{\alpha}\,,\ M \cong \|v\|_{\infty}$$

$$t = \frac{1}{M^{1-\frac{1}{\alpha}}}s, \quad v_M(s,x) := \frac{1}{M}v(t,x)\,,\ f_M(s,x) := \frac{1}{M}f(t,x)$$

$$\Longrightarrow |v_M(s,x) - v_M(s',y)| \le C(\|v_M\|_{L^\infty} + \|f_M\|_{L^q(0,\infty;L^p_{\mathrm{w}})}) \times (|s-s'|^{\frac{\gamma}{2}} + |x-y|^{\gamma})$$

$$\therefore |v(t,x) - v(t',y)| \le C(\|v\|_{L^\infty} + M^{\frac{1}{q}(1-\frac{1}{\alpha})}\|f\|_{L^q(0,\infty;L^p_{\mathrm{w}})}) \times (M^{\frac{\gamma}{2}(1-\frac{1}{\alpha})}|t-t'|^{\frac{\gamma}{2}} + |x-y|^{\gamma})$$

重み付き関数に関する注意 (続き)

$v := u^\alpha$, $M \cong \|v\|_\infty$

$$t = \frac{1}{M^{1-\frac{1}{\alpha}}}s, \quad v_M(s,x) := \frac{1}{M}v(t,x)\,,\ f_M(s,x) := \frac{1}{M}f(t,x)$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow |v_M(s,x) - v_M(s',y)| &\\ \le C(\|v_M\|_{L^\infty} + \|f_M\|_{L^q(0,\infty;L^p_{\mathrm{w}})})&\\ \times (|s-s'|^{\frac{\gamma}{2}} + |x-y|^\gamma)&\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore |v(t,x) - v(t',y)| &\\ \le C(\|v\|_{L^\infty} + M^{\frac{1}{q}(1-\frac{1}{\alpha})}\|f\|_{L^q(0,\infty;L^p_{\mathrm{w}})})&\\ \times (M^{\frac{\gamma}{2}(1-\frac{1}{\alpha})}|t-t'|^{\frac{\gamma}{2}} + |x-y|^\gamma)&\end{aligned}$$

Alternative approach

$$\partial_t v^{\frac{1}{\alpha}} - \Delta v = \operatorname{div} f \qquad \text{(dP)}_*$$

$$Q = Q_{\rho,M} := \left(-\frac{\rho^2}{M^{1-\frac{1}{\alpha}}}, 0\right) \times B_\rho, \quad \rho, M > 0$$

補題 (Alternative lemma)

$0 < \exists\theta_0$, $\exists\eta_0 < 1$ s.t. $0 < \forall\rho \ll 1$, $M \cong \sup_Q v$, $\omega \cong \operatorname{osc}_Q v$

$$|Q \cap \{v < \inf_Q v + \frac{\omega}{2}\}| \le \theta_0 |Q| \qquad (\sharp)$$

- (lower bounds)

  $(\sharp)$ holds $\Longrightarrow v \ge \inf_Q v + \eta_0\omega$ in $Q' \Subset Q$

- (upper bounds)

  $(\sharp)$ does not hold $\Longrightarrow v \le \sup_Q v - \eta_0\omega$ in Q'

Alternative approach

$$\partial_t v^{\frac{1}{\alpha}} - \Delta v = \operatorname{div} f \qquad (\mathrm{dP})_*$$

$$Q = Q_{\rho,M} := \left(-\frac{\rho^2}{M^{1-\frac{1}{\alpha}}}, 0\right) \times B_\rho, \quad \rho, M > 0$$

補題 (Alternative lemma)

$0 < \exists\theta_0$, $\exists\eta_0 < 1$ s.t. $0 < \forall\rho \ll 1$, $M \cong \sup_Q v$, $\omega \cong \operatorname{osc}_Q v$

$$|Q \cap \{v < \inf_Q v + \frac{\omega}{2}\}| \leq \theta_0 |Q| \qquad (\sharp)$$

- (lower bounds)
  $(\sharp)$ holds $\Longrightarrow v \geq \inf_Q v + \eta_0\omega$ in $Q' \Subset Q$
- (upper bounds)
  $(\sharp)$ does not hold $\Longrightarrow v \leq \sup_Q v - \eta_0\omega$ in Q'

Alternative approach

$$\partial_t v^{\frac{1}{\alpha}} - \Delta v = \operatorname{div} f \qquad \text{(dP)}_*$$

$$Q = Q_{\rho,M} := \Big(-\frac{\rho^2}{M^{1-\frac{1}{\alpha}}}, 0\Big) \times B_\rho, \quad \rho, M > 0$$

補題 (Alternative lemma)

$0 < \exists\theta_0\,,\ \exists\eta_0 < 1$ s.t. $0 < \forall\rho \ll 1,\ M \cong \sup_Q v,\ \omega \cong \operatorname*{osc}_Q v$

$$|Q \cap \{v < \inf_Q v + \frac{\omega}{2}\}| \leq \theta_0 |Q| \qquad (\sharp)$$

- (lower bounds)

  $(\sharp)$ holds $\Longrightarrow v \geq \inf_Q v + \eta_0\omega \quad$ in $Q' \Subset Q$

- (upper bounds)

  $(\sharp)$ does not hold $\Longrightarrow v \leq \sup_Q v - \eta_0\omega \quad$ in Q'

Alternative approach

$$\partial_t v^{\frac{1}{\alpha}} - \Delta v = \operatorname{div} f \qquad \text{(dP)}_*$$

$$Q = Q_{\rho,M} := \Big(-\frac{\rho^2}{M^{1-\frac{1}{\alpha}}}, 0\Big) \times B_\rho, \quad \rho, M > 0$$

補題 (Alternative lemma)

$0 < \exists\theta_0$, $\exists\eta_0 < 1$ s.t. $0 < \forall\rho \ll 1$, $M \cong \sup_Q v$, $\omega \cong \operatorname{osc}_Q v$

$$|Q \cap \{v < \inf_Q v + \frac{\omega}{2}\}| \le \theta_0 |Q| \qquad (\sharp)$$

- (lower bounds)

  $(\sharp)$ holds $\Longrightarrow v \ge \inf_Q v + \eta_0\omega$ in $Q' \Subset Q$

- (upper bounds)

  $(\sharp)$ does not hold $\Longrightarrow v \le \sup_Q v - \eta_0\omega$ in Q'

Iterating argument

補題 (Alternative Lemma (same as the last slide))

$\omega \cong \operatorname{osc}_Q v$

- (lower bounds) (♯) holds $\Longrightarrow v \geq \inf_Q v + \eta_0 \omega$ in Q'
- (upper bounds) (♯) does not hold $\Longrightarrow v \leq \sup_Q v - \eta_0 \omega$ in Q'

どちらの場合でも

$$\operatorname*{osc}_{Q'} v := \sup_{Q'} v - \inf_{Q'} v \leq (1 - \eta_0) \operatorname*{osc}_{Q} v$$

Iterating argument $\exists \{Q_j\}_{j=0}^{\infty}, \quad Q_j \supset Q_{j+1} \supset \cdots \to \{(0,0)\}$

$$\Longrightarrow \operatorname*{osc}_{Q_j} v \leq (1 - \eta_0)^j \operatorname*{osc}_{Q_0} v$$

Iterating argument

補題 (Alternative Lemma (same as the last slide))

$\omega \cong \operatorname{osc}_Q v$

- (lower bounds) (♯) holds $\Longrightarrow v \geq \inf_Q v + \eta_0 \omega$ in Q'
- (upper bounds) (♯) does not hold $\Longrightarrow v \leq \sup_Q v - \eta_0 \omega$ in Q'

どちらの場合でも

$$\operatorname*{osc}_{Q'} v := \sup_{Q'} v - \inf_{Q'} v \leq (1 - \eta_0) \operatorname*{osc}_Q v$$

Iterating argument $\exists \{Q_j\}_{j=0}^{\infty}$, $Q_j \supset Q_{j+1} \supset \cdots \to \{(0,0)\}$

$$\Longrightarrow \operatorname*{osc}_{Q_j} v \leq (1 - \eta_0)^j \operatorname*{osc}_{Q_0} v$$

概略

Upper bounds Alternative *Lower bounds*

$$\Downarrow$$

$$\operatorname*{osc}_{Q_1} v \le (1-\eta_0) \operatorname*{osc}_{Q_0} v$$

$$\Downarrow$$

Upper bounds Alternative *Lower bounds*

$$\Downarrow$$

$$\operatorname*{osc}_{Q_2} v \le (1-\eta_0) \operatorname*{osc}_{Q_1} v \le (1-\eta_0)^2 \operatorname*{osc}_{Q_0} v$$

$$\Downarrow$$

$$\vdots$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname*{osc}_{Q_j} v \le (1-\eta_0)^j \operatorname*{osc}_{Q_0} v \le (\operatorname{diam} Q_j)^\gamma \operatorname*{osc}_{Q_0} v$$

Morrey 空間と Schauder 型評価

定義 (Morrey 空間)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$; domain, $p > 2$.

$f \in M^p(\Omega) \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ and

$$\|f\|^2_{M^p(\Omega)} := \sup_{B \subset \Omega\,;\,\text{Ball}} \frac{1}{|B|^{1-\frac{2}{p}}} \int_B |f|^2\,dx < \infty.$$

注意 $L^p_{\mathrm{w}} \subsetneq M^p$

未解決問題

$f \in L^q(0,\infty; M^p)$ としたときの (dP) の解 (弱解) の Hölder 連続性は？

- $\alpha = 1$ のときは成り立つ (Schauder 評価, Campanato 空間)

Morrey 空間と Schauder 型評価

定義 (Morrey 空間)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$; domain, $p > 2$.

$f \in M^p(\Omega) \underset{\text{def}}{\iff} f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ and

$$\|f\|^2_{M^p(\Omega)} := \sup_{B \subset \Omega\,;\,\text{Ball}} \frac{1}{|B|^{1-\frac{2}{p}}} \int_B |f|^2\,dx < \infty.$$

注意 $L^p_{\mathrm{w}} \subsetneqq M^p$

未解決問題

$f \in L^q(0,\infty; M^p)$ としたときの (dP) の解 (弱解) の Hölder 連続性は？

- $\alpha = 1$ のときは成り立つ (Schauder 評価, Campanato 空間)

最大正則性と Hölder 指数の最良定数

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha = f, & t > 0\,,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \qquad \text{(dP)}_{**}$$

- $\alpha = 1,\ f, u_0$; 滑らか $\Longrightarrow$ ∇u ; 滑らか

未解決問題

$\alpha > 1$ のとき, ∇u^α の正則性 (可積分性) は？ 可積分指数の上限は ??

- $p > n\,,\ \nabla u^\alpha \in L^p \Longrightarrow\ u^\alpha$ は $1 - \frac{n}{p}$ 次 Hölder 連続

未解決問題

porous medium 方程式の解の Hölder 指数の上限は ??

最大正則性と Hölder 指数の最良定数

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha = f, & t > 0\,,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ \quad u(0,x) = u_0(x). & \end{cases} \qquad \text{(dP)}_{**}$$

- $\alpha = 1,\ f, u_0$; 滑らか $\Longrightarrow \nabla u$; 滑らか

未解決問題

$\alpha > 1$ のとき, ∇u^α の正則性 (可積分性) は？ 可積分指数の上限は ??

- $p > n\,,\ \nabla u^\alpha \in L^p \Longrightarrow\ u^\alpha$ は $1 - \frac{n}{p}$ 次 Hölder 連続

未解決問題

porous medium 方程式の解の Hölder 指数の上限は ??

最大正則性と Hölder 指数の最良定数

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha = f, & t > 0\,,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ \quad u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \qquad (\mathrm{dP})_{**}$$

- $\alpha = 1,\ f, u_0$; 滑らか $\Longrightarrow$ ∇u ; 滑らか

未解決問題

$\alpha > 1$ のとき, ∇u^α の正則性 (可積分性) は？ 可積分指数の上限は ??

- $p > n\,,\ \nabla u^\alpha \in L^p \Longrightarrow\ u^\alpha$ は $1 - \frac{n}{p}$ 次 Hölder 連続

未解決問題

porous medium 方程式の解の Hölder 指数の上限は ??

最大正則性と Hölder 指数の最良定数

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u^\alpha = f, & t > 0\,,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ \quad u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{dP$_{**}$}$$

- $\alpha = 1,\ f, u_0$; 滑らか $\Longrightarrow$ ∇u ; 滑らか

未解決問題

$\alpha > 1$ のとき, ∇u^α の正則性 (可積分性) は？ 可積分指数の上限は ??

- $p > n$, $\nabla u^\alpha \in L^p \Longrightarrow$ u^α は $1 - \frac{n}{p}$ 次 Hölder 連続

未解決問題

porous medium 方程式の解の Hölder 指数の上限は ??