ある非線形放物型方程式に対する正則性評価について

水野 将司
東北大学大学院 理学研究科 数学専攻 博士課程前期二年

指導教員 小川卓克 教授
修士論文

平成19年1月31日

注意 この原稿は平成 22 年 5 月に体裁などの修正を加えたものである. 専門用語の誤用や, 定理の主張に間違いなどがあるが, それについては修正をしていない. なお, 本修士論文の内容は

- M. Mizuno, *Harnack estimates for some non-linear parabolic equation*, Differential Integral Equations, **21** (2008), 693–716.

に採用されている.

目次

1. 序

$\mathbb{R}^{n+1}$ 内に埋めこまれた, 滑らかな n 次元の超曲面の族 $\{\Gamma(t)\}_{t\geq 0}$ を考える. ここで, $\Gamma(t)$ は t について滑らかに変化すると仮定する. $x\in\Gamma(t)$ における法線方向の速度ベクトルを $V(x)$, 外向き法線ベクトルを $\nu(x)$, 平均曲率を $\kappa(x)$ とする. このとき

$$V=\kappa\nu,\quad x\in\Gamma(t)\,,\,t>0 \tag{1.1}$$

をみたす曲面 $\{\Gamma(t)\}_{t>0}$ を平均曲率に従って動く曲面であるといい, 方程式 (1.1) を平均曲率流方程式と呼ぶ.

Bence-Merriman-Osher は, 1992 年に $\Gamma(t)$ の動きを, 熱方程式を用いた簡明なアルゴリズムにより, 数値計算する方法を提唱した. 今, $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の与えられた関数 u によって, 曲面 $\Gamma(t)$ が

$$\Gamma(t):=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}\,;\,u(t,x)=0\}$$

と表わされているとする. 曲面 $\Gamma(t)$ によって囲まれる領域を $C(t)$ とおく. ここで, 初期曲面 $\Gamma(0)$ の内側 $C_0=C(0)$ では $+1$, 外側では -1 となる関数を初期値とする, 次の熱方程式の初期値問題を考える:

$$\begin{cases}\partial_t u-\Delta u=0, & (t,x)\in(0,h)\times\mathbb{R}^{n+1},\\ u(0,x)=\chi_{C_0}(x)-\chi_{\mathbb{R}^{n+1}\setminus C_0}(x)=\begin{cases}1, & x\in C_0,\\ -1, & x\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus C_0.\end{cases}\end{cases} \tag{1.2}$$

パラメータ $h>0$ に対して, 集合上の作用素 $\mathcal{H}(h)$ を

$$C_1=\mathcal{H}(h)C_0:=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}\,;\,u(h,x)\geq 0\}$$

と定める. $k\in\mathbb{N}$ に対して

$$C_k:=\underbrace{\mathcal{H}(h)\ldots\mathcal{H}(h)}_{k\text{ 個}}C_0$$

と定めることで閉集合の列 $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ を得る. さらに

$$C_t^h:=C_k,\quad (k-1)h\leq t<kh$$

とおく. この C_t^h が $h\to 0$ としたときに $C(t)$ の近似になる. これが Bence ら 3 人による手法である. 以下, この手法を B-M-O アルゴリズムと呼ぶ. このアルゴリズムに関する, 理論的な研究, 特に収束性については Evans [**3**], Barles-Georgelin [**1**], H. Ishii [**11**], H. Ishii-K. Ishii [**12**] などによって証明されている. さらに, Goto-K. Ishii-Ogawa [**10**] では, B-M-O アルゴリズムから, Allen-Cahn 方程式の解析に用いられる補助関数を用いることで, 次の方程式が, B-M-O アルゴリズムと関連することを導いた:

$$\begin{cases}\partial_t u-\Delta u+\dfrac{u}{\varepsilon}(|\nabla u|^2-1)=0, & (t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^{n+1},\\ u(0,x)=u_0(x), & x\in\mathbb{R}^{n+1},\end{cases} \tag{1.3}$$

ここで, B-M-O アルゴリズムで $h\to 0$ とすることが, (1.4) で $\varepsilon\to 0$ とすることに対応している. この問題は, Allen-Cahn 方程式における特異摂動問題に類似した特異極限問題であり, $\varepsilon\to 0$ により, その解の挙動は特異的なものとなることが予想される.

そこで, 本論文では,

$$
(1.4)\qquad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \dfrac{u}{\varepsilon}(|\nabla u|^2 - 1) = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^{n+1}, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^{n+1}, \end{cases}
$$

に対する正則性評価について考える. u が方程式 (1.4) をみたすとき, u の可微分性や可積分性を与える評価を正則性評価という. ここで「u が (1.4) をみたす」の意味を定義する.

定義 1.1. $u = u(t,x)$ が (1.4) の弱解であるとは, 空間方向にコンパクトな台を持つ $(0,T)\times\mathbb{R}^{n+1}$ 上無限回微分可能な任意の関数 ϕ に対して

$$
(1.5)\qquad \int_{\mathbb{R}^{n+1}} u(T)\phi(T)\,dx - \int_{\mathbb{R}^{n+1}} u_0\phi(0)\,dx - \int_0^T\int_{\mathbb{R}^{n+1}} u\partial_t\phi\,dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \nabla u\cdot\nabla\phi\,dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{u}{\varepsilon}(|\nabla u|^2-1)\phi\,dxdt = 0
$$

をみたすことをいう.

等式 (1.5) は, 方程式 (1.4) と比較すると, u が空間方向に一回微分可能であれば, 意味を持つことに注意する. この弱解 u が古典解になりうるかどうか, すなわち, どれだけ可微分性が得られるかどうかを調べることは, 方程式の古典解が存在するかという問題も含めて, 重要な問題である.

本稿においては, 正則性評価の中でもとりわけ, 解の Hölder 連続性と関係のある, Harnack 不等式について考える. 任意の有界領域 Ω における (1.4) の非負値解 u_ε と, 任意の $0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 \le T$ に対して

$$
(1.6)\qquad \sup_{(t_1,t_2)\times\Omega} u_\varepsilon \le C \inf_{(t_3,t_4)\times\Omega} u_\varepsilon
$$

なる不等式が成り立つ. この不等式 (1.6) を Harnack 不等式という. ここで C は u_ε には依存しない定数である. 以下, この定数を Harnack 定数と呼ぶことにする.

線形の変数係数放物型方程式で, 係数に滑らかを仮定しないときに, 発散型一様放物型方程式に対する Harnack 不等式は 1964 年に Moser [**16**] によって示された. ここで, 一様放物型であるとは, 主要部の係数行列の最小固有値と最大固有値の比が有界であることをいう. 線形の放物型方程式に対しては, Harnack 不等式から解の内部正則性, 特に局所 Hölder 連続性を示すことができる. Harnack 定数は Hölder 連続性の次数と関係があり, Harnack 定数がより小さくとれれば, Hölder 連続性の次数 α はより大きくとれることがわかっている. また, Harnack 不等式 (1.6) において, $\inf u_\varepsilon$ が正の値となる場合には, 両辺を $\inf u_\varepsilon$ で割ると

$$
\frac{\sup_{(t_1,t_2)\times\Omega} u_\varepsilon}{\inf_{(t_3,t_4)\times\Omega} u_\varepsilon} \le C
$$

となる. この不等式は $(t_1,t_2)\times\Omega$ 上での解の最大値と $(t_3,t_4)\times\Omega$ 上での解の最小値の比が Harnack 定数 C で抑えられているという意味を持っている. つまり, Harnack 定数 C によって, 解の形状にある程度の制限が加えられることになる.

非線形方程式に対しても, Harnack 定数が解の形状に関する情報を与える. また線形方程式に対して Harnack 定数が解の滑らかさに関する情報を与えていることから, 非線形方程式に対しても Harnack 定数が解の滑らかさに関する情報を持っていると推測できる. こ

のことから Harnack 定数を評価することは興味ある問題であると考えられる. また, 非線形方程式 (1.4) は小さいパラメータ $\varepsilon > 0$ を考えることによる, 非線形項の係数が大きいということと, $|\nabla u|^2$ の効果が Δu の効果とつりあうということ (このような方程式を臨界型方程式という) の二つの意味で強い非線形項だと考えられる. このような強い非線形項を持つ方程式に対して, どれだけの正則性が期待できるかを調べることは興味ある問題である. 方程式 (1.4) において, $\varepsilon \to 0$ の極限に興味があるので, Harnack 定数が, ε について, どのような依存性を持っているかを調べる.

以下, 本稿では, まず, セクション 2 で, Goto-K.Ishii-Ogawa による, (1.4) の導出について述べる. セクション 3 で, 全空間における (1.4) の解の局所存在を, 半群を用いて示す. セクション 4 では, 方程式の (1.4) の内部問題を考え, Harnack 定数の評価を行なう. セクション 4.1 では, 非線形項が Harnack 定数に影響を与えない評価を Moser の手法を用いて行なう. 次に, セクション 4.2 とセクション 4.3 で非線形項が影響を与える評価を Trudinger [**19**] の手法を用いて行う. セクション 5 では, 放物型 John-Nirenberg 評価を Fabes-Garofalo [**5**] の手法を用いて行う.

本稿を通じて, 次の記号を用いる. 非負の整数全体の集合を $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ とおく. $y \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$ に対し

$$B_R(y) = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, |x-y| < R\} \quad (\text{半径 } R,\ \text{中心 } y \text{ の開球体})$$
$$K_R(y) = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, \max_{1\le i\le n} |x_i - y_i| < R\} \quad (\text{一辺 } 2R,\ \text{中心 } y \text{ の立方体})$$

とおく. $y = 0$ のときは y を省略する. 集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して, χ_A を定義関数とする. すなわち

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & (x \in A), \\ 0, & (x \in \mathbb{R}^n \setminus A) \end{cases}$$

とおく. 集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ と点 $x \in \mathbb{R}^n$ に対し, x と A との距離を

$$\mathrm{dist}(x, A) := \inf_{y \in B} |x - y|$$

で定める. 関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対して,

$$f_+(x) := \max\{f(x)\,,\, 0\}$$

とおく. 領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ に対して, 無限回微分可能な関数のなす集合を $C^\infty(\Omega)$ で表す. 関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対し, f の台 (support) を

$$\mathrm{supp}\ f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n\,;\, f(x) \neq 0\}}$$

と定義する. 台が Ω 内でコンパクトとなる $C^\infty(\Omega)$ の関数全体のなす集合を $C_0^\infty(\Omega)$ で定義する. $1 \le p < \infty$ に対し, p 乗可積分な可測関数全体のなす空間を $L^p(\Omega)$ で表す. また, 本質的に有界な可測関数のなす空間を $L^\infty(\Omega)$ で表す. 関数空間 $L^p(\Omega)$ のノルムを

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_\Omega |u(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \le p < \infty, \\ \operatorname*{ess.sup}_{x \in \Omega} |u(x)|, & p = \infty \end{cases}$$

で定義する．Sobolev 空間 $H^1(\Omega)$ とそのノルムを

$$
\begin{aligned}
H^1(\Omega) &:= \{u \in L^2(\Omega)\,;\, \nabla u \in L^2(\Omega)^n\},\\
\|u\|_{H^1(\Omega)} &:= \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}
$$

で定義する．また, $C_0^\infty(\Omega)$ の $H^1(\Omega)$ ノルムにおける閉包を $H_0^1(\Omega)$ で表す．領域 Ω 上の超関数全体を $\mathcal{D}'(\Omega)$ で表す．Banach 空間 X と, 区間 $I \subset \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$ に対し, X のノルムで p 乗可積分な X 値可測写像のなす空間を $L^p(I\,;X)$ で表す．また, X のノルムで本質的に有界な X 値可測写像のなす空間を $L^\infty(I\,;\,X)$ で表す．$L^p(I\,;X)$ のノルムを

$$
\|u\|_{L^p(I\,;\,X)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_I \|u(t)\|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname*{ess.\,sup}_{t \in I} \|u(t)\|_X, & p = \infty \end{cases}
$$

で表す．

2. B-M-O アルゴリズムからの方程式の導出

C_0 を $\mathbb{R}^n$ 上の有界集合で, 境界は滑らかであるとする．$h > 0$ を固定する．$k \in \mathbb{N}_0$ に対し, $v_h = v_h(t,x)$ を

$$
\begin{cases} \partial_t v_h - \Delta v_h = 0, & (t,x) \in (kh,(k+1)h] \times \mathbb{R}^n, \\ v_h(kh,x) = \chi_{C_k}(x) - \chi_{\mathbb{R}^n \setminus C_k}(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{2.1}
$$

の解とする．さらに

$$
C_k := \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, \lim_{t \nearrow kh} u_h(t,x) \geq 0\}, \quad k = 1,2,\ldots
$$

とおく．

定義 2.1.

$$
G_t(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n
$$

を熱核と呼ぶ.

方程式 (2.1) の解は, 熱核を用いて, $kh \leq t < (k+1)h$ に対して

$$
v_h(t,x) = \frac{1}{(4\pi(t-kh))^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{4(t-kh)}\right) (\chi_{C_k}(y) - \chi_{\mathbb{R}^n \setminus C_k}(y))\, dy
$$

と書ける．そこで,

$$
\begin{aligned}
C_t^h &:= \begin{cases} \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, v_h(t,x) \geq 0\}, & t \neq kh, \\ C_k, & t = kh, \end{cases} \\
\Gamma_t^h &:= \partial C_t^h
\end{aligned}
$$

とおく．

以下, $k=0$ について考える. 今, B-M-O アルゴリズムの初期条件の設定から, 解 v_h の境界における拡散は, 接方向 ζ より, 法線方向 z のほうが弱いとみなせる. このとき, 熱方程式の拡散は法線方向の一次元のみと見なして, 十分小さい t, z に対して

$$v_h(t,(z,\zeta)) = v_h(t,z)$$

は一次元熱方程式

$$\begin{cases} \partial_t v_h - \partial_z^2 v_h = 0, \quad (t,z) \in (0,h] \times \mathbb{R}, \\ v_h(0,z) = 1, \ z \geq 0, \\ v_h(0,z) = -1, \ z < 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

の解と考えることができる. このとき, v_h は Gauss 核と初期条件を用いて

$$\begin{aligned} v_h(t,z) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{|z-y|^2}{4t}\right) (\chi_{[0,\infty)}(y) - \chi_{(-\infty,0)}(y))\, dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{4t}\right) (\chi_{[0,\infty)}(z-r) - \chi_{(-\infty,0)}(z-r))\, dr \quad (r = z-y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{r^2}{4t}}\, dr - \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{r'^2}{4t}} \chi_{(-\infty,0)}(z+r')\, dr' \quad (r' = -r) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-z}^{z} e^{-\frac{r^2}{4t}}\, dr \end{aligned}$$

となる. $\xi = \frac{z}{2\sqrt{t}}$ とおくと, $s = \frac{r}{2\sqrt{t}}$ と変数変換することで

$$v_h(t,z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{z}{2\sqrt{t}}}^{\frac{z}{2\sqrt{t}}} e^{-s^2}\, ds = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\xi}^{\xi} e^{-s^2}\, ds = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-s^2}\, ds$$

となる. そこで, 次の補助関数を導入する:

$$U_0(\xi) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-\eta^2}\ d\eta.$$

今, $u(t,z) = U_0(\frac{z}{2\sqrt{t}})$ とおけば, U_0 は単調増加関数で

$$\begin{cases} U_0''(\xi) + 2\xi U_0'(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \\ U_0(+\infty) = 1, \quad U_0(0) = 0, \quad U_0(-\infty) = -1 \end{cases} \tag{2.3}$$

をみたす. ただし, $U_0'(\xi) = \frac{d}{d\xi} U_0(\xi)$ である.

定義 2.2. v_h が (2.1) をみたすとする. このとき $u_h(t,x) : [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を

$$v_h(t,x) = U_0\left(\frac{u_h(t,x)}{2\sqrt{t-kh}}\right), \quad (t,x) \in (kh,(k+1)h) \times \mathbb{R}^n,\ k = 0,1,\ldots \tag{2.4}$$

により定める. 特に U_0 が単調増加関数ゆえ

$$u_h(t,x) = 2\sqrt{t-kh}\, U_0^{-1}(v_h(t,x)), \quad (t,x) \in (kh,(k+1)h) \times \mathbb{R}^n,\ k = 0,1,\ldots$$

となる.

注意 2.3. 強最大値原理より, (2.2) の解 v_h に対して $\|v_h(t,\cdot)\|_\infty < 1$ となる. 従って, 定義 2.2 による u_h は well-defined である.

さて,

$$v_h(t,x) = U_0\left(\frac{u_h(t,x)}{2\sqrt{t-kh}}\right)$$

を (2.1) に代入すると

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_t v_h - \Delta v_h \\
&= \frac{1}{4}(t-kh)^{-\frac{3}{2}}U_0'(\zeta)\bigl(2(t-kh)\partial_t u_h - u_h\bigr) \\
&\quad - \frac{1}{2}(t-kh)^{-\frac{1}{2}}U_0'(\zeta)\Delta u_h - \frac{1}{4}(t-kh)^{-1}U_0''(\zeta)|\nabla u_h|^2
\end{aligned}$$

となる. ただし,

$$\zeta = \frac{u_h(t,x)}{2\sqrt{t-kh}}$$

とおいた. 関係式 (2.3) を用いると

$$\frac{1}{2}(t-kh)^{-\frac{1}{2}}U_0'(\zeta)\left(\partial_t u_h - \Delta u_h + \frac{u_h}{2(t-kh)}(|\nabla u_h|^2 - 1)\right) = 0$$

となる. $0 < t - kh \ll 1$ とすると, $\varepsilon = 2(t-kh)$ として

$$\partial_t u_h - \Delta u_h + \frac{u_h}{\varepsilon}(|\nabla u_h|^2 - 1) = 0$$

が得られる.

3. 解の存在定理

このセクションでは, (1.4) の初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \dfrac{u}{\varepsilon}(|\nabla u|^2 - 1) = 0, & (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.1}$$

の局所解の存在について考察する.

定義 3.1. $1 \le p \le \infty$, $\phi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対し,

$$e^{t\Delta}\phi := G_t * \phi \tag{3.2}$$

と定める. ここで $*$ は空間方向における合成積である.

$1 \le p \le \infty$, $\phi \in L^p(\mathbb{R}^n)$ に対し, $u = e^{t\Delta}\phi$ は

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.3}$$

をみたす. さらに

$$v(t) = e^{tA}\phi := e^{\frac{t}{\varepsilon}}e^{t\Delta}\phi \tag{3.4}$$

とおくと, v は以下の初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v - \dfrac{1}{\varepsilon}v = 0, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = \phi(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.5}$$

をみたす. $e^{t\Delta}$ に対する, L^p-L^q 評価 (儀我-儀我 [**6**] を参照) を用いて, 次の評価が得られる.

命題 3.2. $1 \leq q \leq p \leq \infty$ に対し,

$$\|e^{tA}\phi\|_p \leq C_1 e^{\frac{t}{\varepsilon}} t^{-\gamma} \|\phi\|_q,$$
$$\|\nabla e^{tA}\phi\|_p \leq C_2 e^{\frac{t}{\varepsilon}} t^{-(\gamma+\frac{1}{2})} \|\phi\|_q,$$

が成り立つ. ただし,

$$\gamma = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)$$

であり, C_1, C_2 は p, q, n にのみ依存する定数である.

注意 3.3. 命題 3.2 で

$$C_1 = (4\pi)^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})},\ C_2 = C_0 4^{-\gamma}\left(|\mathbb{S}^{n-1}|\Gamma\left(\frac{n(n-2\gamma+1)}{2n(n-2\gamma)}\right)\right)^{1-\frac{2\gamma}{n}}$$

とできる. ただし, C_0 は n にのみ依る定数, $|\mathbb{S}^{n-1}|$ は n 次元球面の面積, Γ は Γ 関数である. 以下, このセクションでは, C_1 , C_2 を命題 3.2 で取れる定数として, 断わりなく用いる.

さて, 方程式 (3.1) は

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u - \dfrac{u}{\varepsilon} = -\dfrac{u}{\varepsilon}|\nabla u|^2, & (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.6}$$

と書ける. 右辺を摂動をみて, 積分方程式に書きかえると

$$u(t) = e^{tA}u_0 - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{(t-\tau)A} u(\tau)|\nabla u(\tau)|^2\, d\tau \tag{3.7}$$

と書ける. この積分方程式の解の局所存在定理を述べる.

定理 3.4. $1 \leq p, r \leq \infty$ は

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} < \frac{1}{n},\ \frac{1}{p} + \frac{2}{r} \leq 1$$

をみたすとする. 任意の初期値 $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\nabla u_0 \in L^r(\mathbb{R}^n)$ に対して, $T > 0$ を以下の条件

$$0 < T^{1-\gamma}(\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla u_0\|^2_{L^r(\mathbb{R}^n)}) \ll 1\,,\ e^{\frac{3T}{\varepsilon}} < \frac{3}{2}\,,\ \gamma = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{2}$$

をみたすようにとる. このとき, (3.7) の一意解が存在して, $u \in L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R}^n))$, $\nabla u \in L^\infty(0,T;L^r(\mathbb{R}^n))$ をみたす.

3.1. 関数空間の設定.

定義 3.5. $1 \le p, r \le \infty$, $T, M > 0$ に対して

$$X_M(T) := \{u \in L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R}^n))\,;\,\nabla u \in L^\infty(0,T;L^r(\mathbb{R}^n))\,, \\ \|u\|_{X_M} := \|u\|_{L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R}^n))} + \|\nabla u\|_{L^\infty(0,T;L^r(\mathbb{R}^n))} \le M\}$$

と定める.

補題 3.6. $1 \le p, r \le \infty$, $T, M > 0$ に対して

$$d(u,v) := \|u-v\|_{L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R}^n))} + \|\nabla(u-v)\|_{L^\infty(0,T;L^r(\mathbb{R}^n))} \quad (u,v \in X_M(T))$$

とおく. このとき, $X_M(T)$ は完備距離空間になる.

補題 3.6 の証明. 距離空間になることは, norm の性質より導かれる. ここでは完備性のみ示す. $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ を X_M の Cauchy 列とする.

$$\|u_k - u_l\|_{L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R}^n))} \to 0 \quad (k,l \to \infty), \\ \|\nabla(u_k - u_l)\|_{L^\infty(0,T;L^r(\mathbb{R}^n))} \to 0 \quad (k,l \to \infty)$$

より, $u \in L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R}^n))\,, v \in L^\infty(0,T;L^r(\mathbb{R}^n))$ が存在して, $k \to \infty$ のときに

$$u_k \to u \quad \text{in } L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R}^n)) \quad (k \to \infty), \\ \nabla u_k \to v \quad \text{in } L^\infty(0,T;L^r(\mathbb{R}^n)) \quad (k \to \infty)$$

とできる. 従って, $\nabla u = v$ を示せば十分である.

$k \to \infty$ としたときに,

$$u_k \to u \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^n) \quad \text{a.e. } 0 \le t \le T \quad (k \to \infty), \\ \nabla u_k \to v \quad \text{in } L^r(\mathbb{R}^n) \quad \text{a.e. } 0 \le t \le T \quad (k \to \infty),$$

から

$$u_k \to u\,,\, \nabla u_k \to v \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \quad \text{a.e. } 0 \le t \le T \quad (k \to \infty),$$

となる. $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 上で微分作用素は連続なので, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ 上で $\nabla u = v$ となる. よって, $L^r(\mathbb{R}^n)$ 上で $\nabla u = v$ となる.

$$u_k \to u \quad \text{in } L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R}^n)) \quad (k \to \infty), \\ \nabla u_k \to v \quad \text{in } L^\infty(0,T;L^r(\mathbb{R}^n)) \quad (k \to \infty)$$

より, ノルムの連続性から

$$\|u_k\|_{X_M} \to \|u\|_{X_M} \quad (k \to \infty)$$

となる. $k \in \mathbb{N}$ に対して $\|u_k\|_{X_M} \le M$ より $\|u\|_{X_M} \le M$ となる. 従って X_M が完備であることがわかる. □

3.2. $\|\Phi(u)\|_{X_M}$ の評価. 定理 3.4 を示すために, 以下の写像を定義する.

定義 3.7. e^{tA} を (3.4) で定めた半群とする. このとき, $u \in X_M(T)$ に対し

$$\Phi(u) := e^{tA}u_0 - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{(t-\tau)A}u(\tau)|\nabla u(\tau)|^2\,d\tau \tag{3.8}$$

と定める.

積分方程式 (3.7) の解の存在を示すために, Φ に対する不動点の存在を示す. そのために, Φ が $X_M(T)$ 上で定義できるように, T を定められることを示す.

補題 3.8. $1 \le p, r \le \infty$ は

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} < \frac{1}{n}\,,\ \frac{1}{p} + \frac{2}{r} \le 1$$

をみたすとする. さらに

$$M := 2(\|u_0\|_p + \|\nabla u_0\|_r)\,,\ \gamma = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{2}$$

とおき, $0 < T_0 < 1$ を

$$CT_0^{1-\gamma}M^2 \ll 1\,,\ e^{\frac{T_0}{\varepsilon}} < \frac{3}{2} \tag{3.9}$$

をみたすようにとる. ここで, C は, n, p, r, ε にのみ依る定数である. このとき, $T < T_0$, $u \in X_M(T)$ に対して, $\Phi(u) \in X_M(T)$ となる.

注意 3.9. 具体的に T_0 として,

$$e^{\frac{T_0}{\varepsilon}} \le \frac{3}{2}\,,\ \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{C_1 r T_0^{1-\frac{n}{r}}}{r-n} + \frac{C_2 T_0^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right) \le \frac{1}{4M^2}$$

を満たすようにとればよい.

補題 3.8 の証明. まず, $\|\Phi(u)\|_{L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R}^n))}$ を評価する. $q \ge 1$ を, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{2}{r}$ をみたすようにとると, 命題 3.2 から

$$\begin{aligned}\|\Phi(u)\|_p &\le \|e^{tA}u_0\|_p + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \|e^{(t-\tau)A}u|\nabla u|^2\|_p\,d\tau \\ &\le \|e^{tA}u_0\|_p + \frac{C_1}{\varepsilon}\int_0^t e^{\frac{t-\tau}{\varepsilon}}(t-\tau)^{-\frac{n}{r}}\|u|\nabla u|^2\|_q\,d\tau\end{aligned}$$

と変形できる. ここで, 被積分関数について Hölder 不等式を用いると

$$\|u|\nabla u|^2\|_q \le \|u\|_p\|\nabla u\|_r^2$$

となる. 従って

$$\|\Phi(u)\|_p \le \|e^{tA}u_0\|_p + \frac{C_1}{\varepsilon}\int_0^t e^{\frac{t-\tau}{\varepsilon}}(t-\tau)^{-\frac{n}{r}}\|u\|_p\|\nabla u\|_r^2\,d\tau$$

となる. $\frac{1}{n} > \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$ より $r > n$ となることに注意する.

よって, 両辺 t について上限をとると

$$\begin{aligned}
\sup_{0\le t\le T}\|\Phi(u)\|_p &\le e^{\frac{T}{\varepsilon}}\|u_0\|_p + \frac{C_1}{\varepsilon}e^{\frac{T}{\varepsilon}}\sup_{0\le t\le T}\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{n}{r}}\|u(\tau)\|_p\|\nabla u(\tau)\|_r^2\,d\tau\\
&\le e^{\frac{T}{\varepsilon}}\|u_0\|_p + \frac{C_1}{\varepsilon}e^{\frac{T}{\varepsilon}}\sup_{0\le t\le T}\|u(t)\|_p\sup_{0\le t\le T}\|\nabla u(t)\|_r^2\sup_{0\le t\le T}\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{n}{r}}\,d\tau\\
&\le e^{\frac{T}{\varepsilon}}\|u_0\|_p + \frac{C_1}{\varepsilon}e^{\frac{T}{\varepsilon}}M^3\sup_{0\le t\le T}\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{n}{r}}\,d\tau
\end{aligned}$$

となる. ここで

$$\int_0^t (t-\tau)^{-\frac{n}{r}}\,d\tau = \frac{r}{r-n}\left[-(t-\tau)^{-\frac{n}{r}+1}\right]_0^t = \frac{r}{r-n}t^{1-\frac{n}{r}}$$

だから

$$\sup_{0\le t\le T}\|\Phi(u)\|_p \le e^{\frac{T}{\varepsilon}}\|u_0\|_p + \frac{C_1}{\varepsilon}e^{\frac{T}{\varepsilon}}M^3\frac{rT^{1-\frac{n}{r}}}{r-n}$$

となる.

次に $\|\nabla\Phi(u)\|_{L^\infty(0,T;L^r(\mathbb{R}^n))}$ を評価する. (3.8) を両辺微分すると

$$\nabla\Phi(u) = \nabla e^{tA}u_0 - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t e^{(t-\tau)A}\nabla(u(\tau)|\nabla u(\tau)|^2)\,d\tau$$

となる. 命題 3.2 で, 微分に対する L^r-L^q 評価を用いると, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}+\frac{2}{r}$ をみたす $q\ge 1$ に対して

$$\begin{aligned}
\|\nabla\Phi(u)\|_r &\le \|e^{tA}\nabla u_0\|_r + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \|\nabla e^{(t-\tau)A}u|\nabla u|^2\|_r\,d\tau\\
&\le \|e^{tA}\nabla u_0\|_r + \frac{C_2}{\varepsilon}\int_0^t e^{\frac{t-\tau}{\varepsilon}}(t-\tau)^{-\gamma}\|u|\nabla u|^2\|_q\,d\tau
\end{aligned}$$

となる. ここで, 被積分関数について, Hölder 不等式を用いると

$$\|u|\nabla u|^2\|_q \le \|u\|_p\|\nabla u\|_r^2$$

となる. $\frac{1}{n}>\frac{1}{r}+\frac{1}{p}$ から

$$\gamma = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{2} = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{2} < 1$$

となる.

従って

$$\|\nabla\Phi(u)\|_r \le \|e^{tA}\nabla u_0\|_r + \frac{C_2}{\varepsilon}e^{\frac{T}{\varepsilon}}\int_0^t (t-\tau)^{-\gamma}\|u\|_p\|\nabla u\|_r^2\,d\tau \tag{3.10}$$

となる. ただし,

$$\gamma = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{2}$$

である. 両辺 t について上限をとると, 先と同様にして

$$\sup_{0\le t\le T}\|\nabla\Phi(u)\|_r \le e^{\frac{T}{\varepsilon}}\|\nabla u_0\|_r + \frac{C_2}{\varepsilon}e^{\frac{T}{\varepsilon}}M^3\frac{T^{1-\gamma}}{1-\gamma}$$

となる.

以上により

$$\|\Phi(u)\|_{X_M} \le \frac{M}{2}e^{\frac{T}{\varepsilon}} + \frac{M^3 e^{\frac{T}{\varepsilon}}}{\varepsilon}\left(\frac{C_1 r T^{1-\frac{n}{r}}}{r-n} + \frac{C_2 T^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right)$$

が得られる. 次に T_0 を

$$e^{\frac{T_0}{\varepsilon}} \le \frac{3}{2}, \ \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{C_1 r T_0^{1-\frac{n}{r}}}{r-n} + \frac{C_2 T_0^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right) \le \frac{1}{4M^2} \tag{3.11}$$

となるようにとる. このとき,

$$\|\Phi(u)\|_{X_M} \le \frac{3M}{4} + \frac{M}{4} \le M$$

となる. 従って, (3.11) をみたすように T_0 を定めれば, $T < T_0$, $u \in X_M(T)$ に対し, $\Phi(u) \in X_M(T)$ となる.

□

3.3. Φ の縮小性. 次に Φ が X_M 上の縮小写像になることを示す.

補題 3.10. p, r は補題 3.8 のとおりとする. このとき, 十分小さい T に対して, Φ は X_M 上の縮小写像となる.

補題 3.10 の証明. $u, v \in X_M$ に対して, 命題 3.2 より,

$$\begin{aligned}\|\Phi(u)-\Phi(v)\|_p &\le \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \|e^{(t-\tau)A}(u|\nabla u|^2 - v|\nabla v|^2)\|_p\, d\tau \\ &\le \frac{C_1}{\varepsilon}\int_0^t e^{\frac{t-\tau}{\varepsilon}}(t-\tau)^{-\frac{n}{r}}\|u|\nabla u|^2 - v|\nabla v|^2\|_q\, d\tau\end{aligned}$$

とできる. ただし, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{2}{r}$ とおいた. Hölder の不等式より

$$\begin{aligned}\|u|\nabla u|^2 - v|\nabla v|^2\|_q &\le \|(u-v)|\nabla u|^2\|_q + \|(|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2)v\|_q \\ &\le \|(u-v)\|_p\|\nabla u\|_r^2 + \|\nabla u + \nabla v\|_r\|\nabla(u-v)\|_r\|v\|_p \\ &\le M^2\|u-v\|_p + 2M^2\|\nabla(u-v)\|_r\end{aligned}$$

とできるので

$$\begin{aligned}\sup_{0\le t\le T}\|\Phi(u)-\Phi(v)\|_p &\le \frac{C_1 r e^{\frac{T}{\varepsilon}} T^{1-\frac{n}{r}}}{\varepsilon(r-n)}\left(M^2\sup_{0\le t\le T}\|u-v\|_p + 2M^2\sup_{0\le t\le T}\|\nabla(u-v)\|_r\right) \\ &\le \frac{2M^2 C_1 r e^{\frac{T}{\varepsilon}} T^{1-\frac{n}{r}}}{\varepsilon(r-n)}\left(\sup_{0\le t\le T}\|u-v\|_p + \sup_{0\le t\le T}\|\nabla(u-v)\|_r\right)\end{aligned}$$

となる. 同様にして $\gamma = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{2}$ とおくと

$$\sup_{0\le t\le T}\|\nabla(\Phi(u)-\Phi(v))\|_r \le \frac{2M^2 C_2 e^{\frac{T}{\varepsilon}} T^{1-\gamma}}{\varepsilon(1-\gamma)}\left(\sup_{0\le t\le T}\|u-v\|_p + \sup_{0\le t\le T}\|\nabla(u-v)\|_r\right)$$

もわかる.

従って

$$\|\Phi(u)-\Phi(v)\|_{X_M} \le \frac{2M^2e^{\frac{T}{\varepsilon}}}{\varepsilon}\left(\frac{C_1rT^{1-\frac{n}{r}}}{r-n}+\frac{C_2T^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right)\|u-v\|_{X_M}$$

となる. T を十分小さくとって,

$$\frac{2M^2e^{\frac{T}{\varepsilon}}}{\varepsilon}\left(\frac{C_1rT^{1-\frac{n}{r}}}{r-n}+\frac{C_2T^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right) \le \frac{3}{4} \tag{3.12}$$

となるようにとれば,

$$\|\Phi(u)-\Phi(v)\|_{X_M} \le \frac{3}{4}\|u-v\|_{X_M}$$

となるので, Φ は X_M 上の縮小写像になる. □

注意 3.11. 関係式 (3.11) をみたす T_0 に対し, $T<T_0$ であれば, (3.12) は自動的にみたされる.

定理 3.4 の証明. 補題 3.8 と補題 3.10 より Φ は X_M 上の縮小写像になるから, Cauchy の不動点定理により, 縮小写像を持つ. すなわち, $\Phi(u)=u$ となる $u\in X_M$ が存在する. この u は (3.7) をみたす. □

注意 3.12. 命題 3.2 の評価が成り立つ領域と境界条件であれば, この議論が適用できて, (1.4) の初期境界値問題に対する解の存在が示せる.

4. Harnack 不等式の導出と Harnack 定数の評価

セクション 3 で考察した, 解の属する関数空間においては, 解の空間方向における Hölder 連続性が得られることが, Sobolev の埋め込み定理からわかる. しかし, 解の正則性が ε によってどのように変化するかはわからない. そこで, このセクションでは (1.4) の弱解に対する Harnack 評価を考え, 解の正則性に関する情報を持っていると推測される, Harnack 定数の ε における依存性を調べる.

まず, 解 u_ε の L^p 有界性から, 局所 L^∞ 有界性が示す評価である, 局所最大値原理について述べる.

定理 4.1 (局所最大値原理)**.** u_ε は (1.4) の $(0,T)\times B_R$ 上で非負な弱解とする. このとき, 任意の $p\ge 1$, $0\le\tau<\tau'<T$, $0<R'<R$, $0<\varepsilon<1$ に対して

$$\sup_{(\tau',T)\times B_{R'}} u_\varepsilon \le C\varepsilon^{-\frac{n+2}{2p}}\|u_\varepsilon\|_{L^p((\tau,T)\times B_R)}$$

が成り立つ. ここで, 定数 C は n,p,τ',τ,R,R' に依存する.

注意 4.2. 次の方程式を考える:

$$\partial_t v-\Delta v-v=0,\quad (t,x)\in(0,T)\times B_R.$$

この方程式の非負劣解と, $p\ge 1$, $0\le\tau<\tau'<T$, $0<R'<R$ に対して

$$\sup_{(\tau',T)\times B_{R'}} v \le C\|v\|_{L^p((\tau,T)\times B_R)}$$

が成り立つ．ここで定数 C は n, p, τ, τ', R, R' に依存する．

$$v_\varepsilon(t,x) := v\left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

とおくと, 合成関数の微分法により

$$\partial_t v_\varepsilon - \Delta v_\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} v_\varepsilon = 0\,, \quad (t,x) \in (0, \varepsilon T) \times B_{\sqrt{\varepsilon}R}$$

が成り立つ．変数変換により

$$\|v\|_{L^p(\tau,T)\times B_R} = \varepsilon^{-\frac{n+2}{2p}} \|v_\varepsilon\|_{L^p((\varepsilon\tau,\epsilon T)\times B_{\sqrt{\varepsilon}R})}$$

となるので

$$\sup_{(\varepsilon\tau',\varepsilon T)\times B_{\sqrt{\varepsilon}R'}} \leq C\varepsilon^{-\frac{n+2}{2p}} \|v_\varepsilon\|_{L^p((\varepsilon\tau,\epsilon T)\times B_{\sqrt{\varepsilon}R})}$$

がわかる．

定理 4.1 の証明では, 方程式 (1.4) の非負解 u が

$$\partial_t v - \Delta v - \frac{1}{\varepsilon} v = 0 \quad (0,T) \times B_R$$

の劣解になることを本質的に用いているので, ε に対する指数の評価は適切である．

次に, Moser の Iteration Method と呼ばれる方法により, $p > q$ に対して, 解 u_ε の L^p ノルムを, 解 u_ε の q 乗積分[1]で評価する不等式について述べる．

定理 4.3. u_ε は $(0,T) \times B_R$ 上で $0 \leq u_\varepsilon \leq M$ をみたす (1.4) の弱解とする．このとき, 任意の $p \geq 1 > q > 0$, $0 < \tau' < \tau \leq T$, $0 < R' < R$ に対して

$$\|u_\varepsilon\|_{L^p((0,\tau')\times B_{R'})} \leq C \exp\left(\frac{M\theta(n+2)}{2q\varepsilon}\right) \left(\int_0^\tau \int_{B_R} u_\varepsilon^q \, dxdt\right)^{\frac{1}{q}}$$

が成り立つ．ここで, 定数 C は $n, p, q, \tau, \tau', R, R'$ に依存し, θ は M, q に依存する．

次に, 解 u_ε の inf を下から評価する不等式である, 弱 Harnack 不等式について述べる．

定理 4.4. u_ε は $(0,T) \times B_R$ 上で $0 \leq u_\varepsilon \leq M$ をみたす (1.4) の弱解とする．このとき, 任意の $q > 0$, $0 \leq \tau < \tau' < T$, $0 < R' < R$ に対して

$$\inf_{(\tau',T)\times B_{R'}} u_\varepsilon \geq C \exp\left(\frac{-M\theta(n+2)}{2q\varepsilon}\right) \left(\int_\tau^T \int_{B_R} u_\varepsilon^{-q} \, dxdt\right)^{-\frac{1}{q}}$$

が成り立つ．ここで, 定数 C は n, q, τ, τ', R, R' に依存し, θ は M, q に依存する．

次に John-Nirenberg 評価と呼ばれる, 解 u_ε の q 乗積分を $-q$ 乗積分で上から評価する不等式について述べる．

[1]ここでいう q 乗積分とは $(\iint u_\varepsilon^q \, dxdt)^{\frac{1}{q}}$ のことをいう

定理 4.5. u_ε は $(0,T)\times K_R$ 上で $0\le u_\varepsilon\le M$ をみたす (1.4) の弱解とする．このとき, $p_0>0$ が存在して

$$\left(\iint_{(0,\frac{1}{8}T)\times K_{\frac{R}{2}}} u_\varepsilon^{p_0}\,dxdt\right)^{\frac{1}{p_0}}$$

$$\le CM\exp\left(\int_0^1 \frac{1-e^{-\frac{M}{\varepsilon}s}}{s}\,ds-\int_1^M \frac{e^{-\frac{M}{\varepsilon}s}}{s}\,ds\right)\left(\iint_{(\frac{7}{8}T,T)\times K_{\frac{R}{2}}} u_\varepsilon^{-p_0}\,dxdt\right)^{-\frac{1}{p_0}}$$

が成り立つ．ここで, 定数 C,p_0 は n,T,R に依存する．

注意 4.6. 定理 4.14 の指数の積分について

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-\frac{M}{\varepsilon}s}}{s}\,ds-\int_1^M \frac{e^{-\frac{M}{\varepsilon}s}}{s}\,ds\le\int_0^M \frac{1-e^{-\frac{M}{\varepsilon}s}}{s}\,ds\le\int_0^M \frac{M}{\varepsilon}\,ds=\frac{M^2}{\varepsilon}$$

となる．ここで

$$\frac{1-e^{-\frac{M}{\varepsilon}s}}{s}\le\lim_{s'\to 0}\frac{1-e^{-\frac{M}{\varepsilon}s'}}{s'}=\frac{M}{\varepsilon},\quad 0<s<M$$

を用いた．よって

$$\left(\iint_{(0,\frac{1}{8}T)\times K_{\frac{R}{2}}} u_\varepsilon^{p_0}\,dxdt\right)^{\frac{1}{p_0}}\le CM\exp\left(\frac{M^2}{\varepsilon}\right)\left(\iint_{(\frac{7}{8}T,T)\times K_{\frac{R}{2}}} u_\varepsilon^{-p_0}\,dxdt\right)^{-\frac{1}{p_0}}$$

となる．

定理 4.1 から 4.5 を組み合わせることにより, 次に述べる Harnack 不等式が得られる．

定理 4.7 (Harnack の不等式)**.** u_ε は $(0,24T)\times B_{6R}$ 上で $0\le u_\varepsilon\le M$ をみたす (1.4) の弱解とする．このとき

$$\sup_{(T,2T)\times B_R} u_\varepsilon\le CM\exp\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right)\inf_{(23T,24T)\times B_R} u_\varepsilon$$

が成り立つ．ここで定数 C は n,T,R にのみ依存し, θ は n,M,T,R に依存する．

定理 4.7 の証明.

$$D_0:=(T,2T)\times B_R\qquad D_1:=(0,2T)\times B_{2R}\qquad D_2:=(0,3T)\times B_{3R}$$
$$D_3:=(21T,24T)\times B_{3R}\quad D_4:=(23T,24T)\times B_R$$

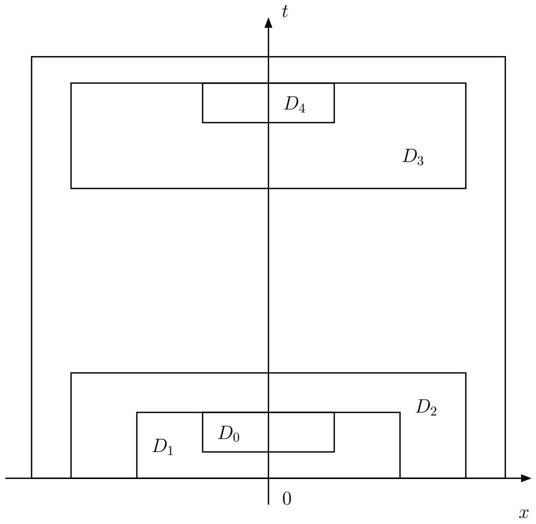

FIGURE 4.1. $D_0, \ldots, D_4$ の領域

とする (Figure 4.1 を参照). 定理 4.1, 定理 4.3, 定理 4.5, 定理 4.4 の順に用いると, n, T, R にのみ依る定数 C_j と, n, M, T, R に依存する定数 θ_j を用いて

$$\begin{aligned}\sup_{D_0} u_\varepsilon &\leq C_1 \varepsilon^{-\frac{n+2}{2}} \|u_\varepsilon\|_{L^1(D_1)} \leq C_2 \exp\left(\frac{\theta_2}{\varepsilon}\right) \left(\iint_{D_2} u_\varepsilon^{p_0}\, dxdt\right)^{\frac{1}{p_0}} \\ &\leq C_3 M \exp\left(\frac{\theta_3}{\varepsilon}\right) \left(\iint_{D_3} u_\varepsilon^{-p_0}\, dxdt\right)^{-\frac{1}{p_0}} \leq C_4 M \exp\left(\frac{\theta_4}{\varepsilon}\right) \inf_{D_4} u_\varepsilon\end{aligned}$$

となる. □

定理 4.1, 定理 4.3, 定理 4.4 の証明の前に, 正則性に関する Ladyženskaja の不等式を証明する. ここでは, $D \subset \mathbb{R}^n$ を一般の領域とする.

定理 4.8 (Ladyženskaja の不等式)**.** $T > 0$ とし, $D \subset \mathbb{R}^n$ を領域とする. $w \in L^\infty(0,T;L^2(D)) \cap L^2(0,T;H_0^1(D))$ とし,

$$4 \le r \le \infty\,,\ 2 \le q \le \infty, \quad n = 1,$$
$$2 < r \le \infty\,,\ 2 \le q < \infty, \quad n = 2,$$
$$2 \le r \le \infty\,,\ 2 \le q \le \frac{2n}{n-2}, \quad n \ge 3$$

なる q, r が

$$\frac{1}{r} + \frac{n}{2q} = \frac{n}{4}$$

をみたすとする. このとき, $w \in L^r(0,T;L^q(D))$ であり, n, q にのみ依存する定数 C がとれて

$$\|w\|_{L^r(0,T;L^q(D))} \le C\|w\|_{L^2(0,T;H_0^1(D))}^{\frac{2}{r}} \|w\|_{L^\infty(0,T;L^2(D))}^{1-\frac{2}{r}} \tag{4.1}$$

が成り立つ.

注意 4.9. (4.1) に Young の不等式を用いることで

$$\|w\|_{L^r(0,T;L^q(D))} \le C(\|w\|_{L^2(0,T;H_0^1(D))} + \|w\|_{L^\infty(0,T;L^2(D))}),$$

すなわち,

$$L^\infty(0,T;L^2(D)) \cap L^2(0,T;H_0^1(D)) \subset L^r(0,T;L^q(D))$$

は連続な埋め込みとなる. 特に $r = q$ とすることで

$$L^\infty(0,T;L^2(D)) \cap L^2(0,T;H_0^1(D)) \subset L^{2+\frac{4}{n}}((0,T) \times D)$$

は連続な埋め込みになる.

証明には, 次の Gagliardo-Nirenberg の不等式を用いる.

定理 4.10 (Gagliardo-Nirenberg の不等式)**.** $D \subset \mathbb{R}^n$ を領域とする． $w \in H_0^1(D)$ とし,

$$2 \le q \le \infty, \quad n = 1,$$
$$2 \le q < \infty, \quad n = 2,$$
$$2 \le q \le \frac{2n}{n-2}, \quad n \ge 3$$

なる q は, $0 \le \alpha \le 1$ に対し

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2}(1-\alpha) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)\alpha$$

をみたすとする．このとき, $w \in L^q(D)$ であり, n, q にのみ依存する定数 C がとれて

$$\|w\|_{L^q(D)} \le C\|w\|_{L^2(D)}^{1-\alpha}\|\nabla w\|_{L^2(D)}^{\alpha}$$

が成り立つ.

Ladyženskaja の不等式の証明. Gagliardo-Nirenberg の不等式から

$$\begin{aligned}
\|w\|_{L^r(0,T;L^q(D))} &= \left(\int_0^T \|w\|_{L^q(D)}^r\,dt\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\le \left(\int_0^T C^r\|\nabla w\|_{L^2(D)}^{\alpha r}\|w\|_{L^2(D)}^{(1-\alpha)r}\,dt\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\le C\left(\int_0^T \|\nabla w\|_{L^2(D)}^{\alpha r}\,dt\right)^{\frac{1}{r}}\|w\|_{L^\infty(0,T;L^2(D))}^{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

ここで $\alpha = \frac{2}{r}$ とおけば

$$\begin{aligned}
\|w\|_{L^r(0,T;L^q(D))} &\le C\left(\int_0^T \|\nabla w\|_{L^2(D)}^{2}\,dt\right)^{\frac{1}{r}}\|w\|_{L^\infty(0,T;L^2(D))}^{1-\frac{2}{r}} \\
&\le C\|w\|_{L^2(0,T;H_0^1(D))}^{\frac{2}{r}}\|w\|_{L^\infty(0,T;L^2(D))}^{1-\frac{2}{r}}.
\end{aligned}$$

ここで, $\frac{1}{q} = \frac{1}{2}(1-\frac{2}{r}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{n})\frac{2}{r}$ を解いて, $\frac{1}{r} + \frac{n}{2q} = \frac{n}{4}$ が得られる. □

4.1. 定理 4.1 の証明. 定理を証明するために, 補題を準備する.

補題 4.11. u を (1.4) の非負解とする．このとき，任意の $\beta \geq 0$, $0 < s < s' < T$, $0 < r' < r$, $\varepsilon < 1$ に対して，$v = u^{\frac{\beta+1}{2}}$ とおくと

(4.2) $$\|v\|^2_{L^{2(1+\frac{2}{n})}((s',T)\times B_{r'})} \leq C(n)\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta+1)+\frac{1}{(r-r')^2}+\frac{1}{(s'-s)}\right)\|v\|_{L^2((s,T)\times B_r)}$$

が成り立つ．ここで，定数 C は n にのみ依存する．

補題 4.11 の証明. η を滑らかな，時空間の cut-off 関数とし，$0 \leq \eta \leq 1$ とする．さらに $0 \leq t \leq T$ に対して $\mathrm{supp}\ \eta(t) \subset\subset B_r$ とする．$\phi := u^\beta \eta^2$ を (1.4) に対する試験関数とすると，$0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ に対して

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\beta+1}\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r}\eta^2\partial_t(u^{\beta+1})\,dxdt+\beta\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r}\eta^2u^{\beta-1}|\nabla u|^2\,dxdt+2\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r}u^\beta\eta\nabla\eta\cdot\nabla u\,dxdt\\
&\quad=\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r}\eta^2u^{\beta+1}\,dxdt-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r}\eta^2u^{\beta+1}|\nabla u|^2\,dxdt\leq\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r}\eta^2u^{\beta+1}\,dxdt
\end{aligned}$$

となる．Schwarz の不等式と Young の不等式より

$$2u^\beta\eta\nabla\eta\cdot\nabla u\leq\frac{\beta}{2}\eta^2u^{\beta-1}|\nabla u|^2+\frac{2}{\beta}u^{\beta+1}|\nabla\eta|^2$$

となるから

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\beta+1}\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r}\partial_t(\eta^2u^{\beta+1})\,dxdt+\frac{\beta}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r}\eta^2u^{\beta-1}|\nabla u|^2\,dxdt\\
&\leq\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r}\eta^2u^{\beta+1}\,dxdt+\frac{2}{\beta}\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r}|\nabla\eta|^2u^{\beta+1}\,dxdt+\frac{2}{\beta+1}\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r}\eta|\partial_t\eta|u^{\beta+1}\,dxdt
\end{aligned}$$

となる．ここで，$v = u^{\frac{\beta+1}{2}}$ とおくと

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\beta+1}\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r}\partial_t(\eta^2v^2)\,dxdt+\frac{2\beta}{(\beta+1)^2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r}\eta^2|\nabla v|^2\,dxdt\\
&=\frac{1}{\beta+1}\int_{B_r}\eta^2v^2\,dx\Big|_{t_1}^{t_2}+\frac{2\beta}{(\beta+1)^2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r}\eta^2|\nabla v|^2\,dxdt\\
&\leq\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r}\eta^2v^2\,dxdt+\frac{2}{\beta}\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r}|\nabla\eta|^2v^2\,dxdt+\frac{2}{\beta+1}\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r}\eta|\partial_t\eta|v^2\,dxdt
\end{aligned}\tag{4.3}$$

となる．

ここで η が

$$\begin{aligned}
&\eta(t,x)=1,\quad (t,x)\in(s',T)\times B_{r'}\,,\\
&\eta(t,x)=0,\quad (t,x)\in(0,s)\times B_r
\end{aligned}$$

をみたすとすると, $s' \leq t \leq T$ に対し, $t_1 = 0, t_2 = t$ とおくと (4.3) で $\eta^2|\nabla v|^2$ が非負であることから

$$\int_{B_r} (\eta v)^2(t)\,dx = \int_{B_r} (\eta v)^2\,dx\Big|_0^t$$
$$\leq \frac{1}{\varepsilon}(\beta+1)\int_s^T\int_{B_r} \eta^2 v^2\,dxdt + \frac{2(\beta+1)}{\beta}\int_s^T\int_{B_r} |\nabla\eta|^2 v^2\,dxdt + 2\int_s^T\int_{B_r} \eta|\partial_t\eta| v^2\,dxdt$$

だから

$$\sup_{s'<t<T}\int_{B_r} (\eta v)^2(t)\,dx$$
$$\leq \frac{1}{\varepsilon}(\beta+1)\int_s^T\int_{B_r} \eta^2 v^2\,dxdt + \frac{2(\beta+1)}{\beta}\int_s^T\int_{B_r} |\nabla\eta|^2 v^2\,dxdt + 2\int_s^T\int_{B_r} \eta|\partial_t\eta| v^2\,dxdt$$

となる.

また, $t_1 = 0$, $t_2 = T$ とすると

$$\frac{1}{\beta+1}\int_{B_r} \eta^2 v^2\,dx\Big|_0^T \geq 0$$

だから (4.3) より

$$\begin{aligned}\int_{s'}^T |\nabla(\eta v)|^2\,dxdt &\leq 2\int_{s'}^T (|\nabla\eta|^2 v^2 + \eta^2|\nabla v|^2)\,dxdt \\ &\leq \frac{2}{\varepsilon}\frac{(\beta+1)^2}{\beta}\int_s^T\int_{B_r} \eta^2 v^2\,dxdt + 2\left(\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)^2 + 1\right)\int_s^T\int_{B_r} |\nabla\eta|^2 v^2\,dxdt \\ &\qquad + \frac{\beta+1}{\beta}\int_s^T\int_{B_r} \eta|\partial_t\eta| v^2\,dxdt\end{aligned}$$

が得られる.

ここで, $\eta = \eta_1(t)\eta_2(|x|)$ と変数分離して

$$\eta_1(t) = \begin{cases} 1, & t > s', \\ 0, & t < \frac{s+s'}{2}, \end{cases} \quad \eta_2(|x|) = \begin{cases} 1, & |x| < r', \\ 0, & |x| > \frac{r+r'}{2}, \end{cases}$$

かつ

$$|\partial_t\eta_1| \leq \frac{4}{s'-s}\ ,\ |\partial_r\eta_2| \leq \frac{4}{r-r'}$$

となるようにとれば

$$\begin{aligned}&\|\eta v\|^2_{L^\infty(s',T\,;\,L^2(B_r))} + \|\nabla(\eta v)\|_{L^2(s',T\,;\,L^2(B_r))} \\ &\qquad \leq C\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta+1) + \frac{1}{(r-r')^2} + \frac{1}{(s'-s)}\right)\|v\|^2_{L^2((s,T)\times B_r)}\end{aligned}$$

が得られる.

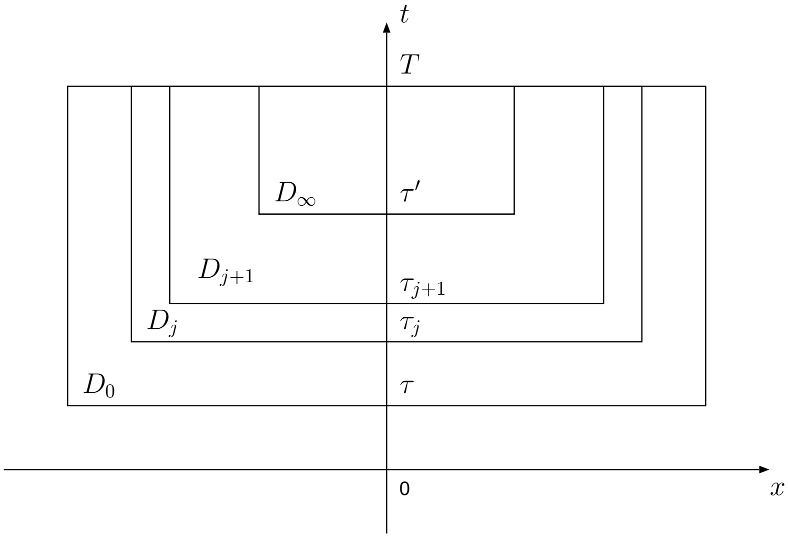

FIGURE 4.2. 領域 D_j について ($D_\infty = (\tau', T) \times B_{R'}$ と置いた)

Ladyženskaja の不等式 (補題 4.8) より

$$
\begin{aligned}
\|v\|^2_{L^{2(1+\frac{2}{n})}((s',T)\times B_{r'})} &\le \|\eta v\|^2_{L^{2(1+\frac{2}{n})}((s',T)\times B_r)} \\
&\le C(n)(\|\eta v\|^2_{L^\infty(s',T\,;\,L^2(B_r))} + \|\nabla(\eta v)\|^2_{L^2(s',T\,;\,L^2(B_r))}) \\
&\le C(n)\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2\left(\frac{1}{\varepsilon}(\beta+1)+\frac{1}{(r-r')^2}+\frac{1}{(s'-s)}\right)\|v\|^2_{L^2((s,T)\times B_r)}
\end{aligned}
$$

が得られる.

□

定理 4.1 の証明. $j \in \mathbb{N}_0$ に対し

$$
\begin{aligned}
\tau_j &= \tau' + 2^{-j}(\tau - \tau'), \quad & R_j &= R' + 2^{-j}(R - R'), \\
\alpha_j &= \left(1+\frac{2}{n}\right)^j, & D_j &= (\tau_j, T) \times B_{R_j}
\end{aligned}
$$

とおく.

(4.2) に $\beta + 1 = p\alpha_j$, $s' = \tau_{j+1}$, $s = \tau_j$, $r' = R_{j+1}$, $r = R_j$ を代入すると

$$
\|u^p\|^{\alpha_j}_{L^{\alpha_{j+1}}(D_{j+1})} \le C_1(n,p)\left(\frac{1}{\varepsilon}\alpha_j + 2^{2j+2}\left(\frac{1}{\tau'-\tau}+\frac{1}{(R-R')^2}\right)\right)\|u\|^{\alpha_j}_{L^{\alpha_j}(D_j)}
$$

となる (積分領域については, Figure 4.2 を参照). $\varepsilon < 1$ より, n にのみ依る定数 C_2 を用いて

$$
\frac{1}{\varepsilon}\alpha_j + 2^{2j+2}\left(\frac{1}{\tau'-\tau}+\frac{1}{(R-R')^2}\right) \le \frac{1}{\varepsilon}C_2^j\left(1+\frac{1}{\tau'-\tau}+\frac{1}{(R-R')^2}\right)
$$

と評価できるので

$$
\|u^p\|_{L^{\alpha_{j+1}}(D_{j+1})} \le \left(\frac{C_1}{\varepsilon}\left(1+\frac{1}{\tau'-\tau}+\frac{1}{(R-R')^2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha_j}} C_2^{\frac{j}{\alpha_j}}\|u^p\|_{L^{\alpha_j}(D_j)} \tag{4.4}
$$

となる.

(4.4) を繰り返して用いることにより,

$$
\begin{aligned}
\|u^p\|_{L^{\alpha_j}((\tau',T)\times B_{R'})} &\le \prod_{i=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{C_1}{\varepsilon}\left(1+\frac{1}{\tau'-\tau}+\frac{1}{(R-R')^2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha_i}} C_2^{\frac{i}{\alpha_i}}\right\}\|u^p\|_{L^{\alpha_0}(D_0)} \\
&\le C_3(n,p)\varepsilon^{-\frac{n+2}{2}}\left(1+\frac{1}{\tau'-\tau}+\frac{1}{(R-R')^2}\right)^{\frac{n+2}{2}} C_2^{\sum\frac{i}{\alpha_i}}\|u^p\|_{L^1(D_0)}.
\end{aligned}
$$

$j\to\infty$ として

$$
\sup_{(\tau',T)\times B_{R'}} u \le C(n,p)\varepsilon^{-\frac{n+2}{2p}}\left(1+\frac{1}{\tau'-\tau}+\frac{1}{(R-R')^2}\right)^{\frac{n+2}{2p}}\|u\|_{L^p((\tau,T)\times B_R)}
$$

となり, 定理が示される. □

4.2. 定理 4.3, 4.4 の証明. 次に u を下から評価することを考える. 証明の方針は Moser の手法に習い, 定理 4.1 と類似である.

まず, 補題 4.11 に対応する補題を証明する.

補題 4.12. u を (1.4) の非負値解とする. このとき, 任意の $\beta<-1$, $0<s<s'<T$, $0<r'<r$ に対して, $v=u^{\frac{\beta+1}{2}}$, $b_0=\frac{M}{\varepsilon}$ とおくと

$$
\|v\|^2_{L^{2(1+\frac{2}{n})}((s',T)\times B_{r'})} \le Ce^{b_0\theta}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2\left(\frac{1}{s'-s}+\frac{1}{(r-r')^2}\right)\|v\|^2_{L^2((s,T)\times B_r)} \tag{4.5}
$$

が成り立つ. ここで, 定数 C は n にのみ依存し, 定数 θ は M,β にのみ依存する.

補題 4.13. u を (1.4) の非負値解とする. このとき, 任意の $-1<\beta<0$, $0<s'<s<T$, $0<r'<r$ に対して, $v=u^{\frac{\beta+1}{2}}$, $b_0=\frac{M}{\varepsilon}$ とおくと

$$
\|v\|^2_{L^{2(1+\frac{2}{n})}((0,s')\times B_{r'})} \le Ce^{b_0\theta}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2\left(\frac{1}{s'-s}+\frac{1}{(r-r')^2}\right)\|v\|^2_{L^2((0,s)\times B_r)} \tag{4.6}
$$

が成り立つ. ここで, 定数 C は n にのみ依存し, 定数 θ は M,β にのみ依存する.

以下では, 補題 4.12 と補題 4.13 を同時に証明する.

補題 4.12, 補題 4.13 の証明. η を滑らかな, 時空間の cut-off 関数とし, $0\le\eta\le1$ とする. さらに $b_0=\frac{M}{\varepsilon}$ とおく. $\beta<0$ に対して, $\phi:=\eta^2e^{-b_0u}u^\beta$ を (1.4) に対する試験関数とすると, $0\le t_1<t_2\le T$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r}\eta^2e^{-b_0u}u^\beta\partial_tu\,dxdt+\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r}\eta^2e^{-b_0u}(\beta u^{\beta-1}-b_0u^\beta)|\nabla u|^2\,dxdt \\
&\qquad = -2\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r}\eta e^{-b_0u}u^\beta\nabla\eta\cdot\nabla u\,dxdt-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r}\eta^2e^{-b_0u}u^{\beta+1}(|\nabla u|^2-1)\,dxdt
\end{aligned}
$$

となる. 両辺 -1 倍すると, $u^\beta|\nabla u|^2$ の積分は非負値であることと, $u \le M$ から

$$
\begin{aligned}
&-\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r} \eta^2 e^{-b_0 u} u^\beta \partial_t u\, dxdt - \int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r} \eta^2 e^{-b_0 u}(\beta u^{\beta-1} - b_0 u^\beta)|\nabla u|^2\, dxdt \\
&\qquad \le 2\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r} \eta e^{-b_0 u} u^\beta \nabla\eta\cdot\nabla u\, dxdt + b_0\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r} \eta^2 e^{-b_0 u} u^\beta |\nabla u|^2\, dxdt
\end{aligned}
$$

となる. 左辺第二項目の $\eta^2 e^{-b_0 u} u^\beta |\nabla u|^2$ の積分と, 右辺第二項目の積分は両辺キャンセルできる. さらに右辺第一項目の $\eta e^{-b_0 u} u^\beta \nabla\eta\cdot\nabla u$ の積分に Schwarz の不等式と Young の不等式を用いて

$$
\begin{aligned}
(4.7)\quad &-\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r} \eta^2 e^{-b_0 u} u^\beta \partial_t u\, dxdt - \frac{\beta}{2}\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r} \eta^2 e^{-b_0 u} u^{\beta-1}|\nabla u|^2\, dxdt \\
&\qquad \le -\frac{2}{\beta}\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r} e^{-b_0 u} u^{\beta+1}|\nabla \eta|^2\, dxdt
\end{aligned}
$$

となる. 次に $\beta \ne -1$ とし,

$$
f(u) := \begin{cases} (\beta+1)\displaystyle\int_0^u e^{-b_0 s} s^\beta\, ds, & \beta > -1, \\ -(\beta+1)\displaystyle\int_u^\infty e^{-b_0 s} s^\beta\, ds, & \beta < -1 \end{cases}
$$

とおく. このとき

$$
\partial_t f(u) = (\beta+1) e^{-b_0 u} u^\beta \partial_t u
$$

となる. 変数変換と部分積分により, $\beta < -1$ に対して

$$
\begin{aligned}
\frac{f(u)}{u^{\beta+1}} &= -\frac{(\beta+1)}{u}\int_u^\infty e^{-b_0 s}\left(\frac{s}{u}\right)^\beta ds \\
&= -(\beta+1)\int_1^\infty e^{-b_0 u r} r^\beta\, dr \qquad (r = \frac{s}{u}) \\
&= e^{-b_0 u} - b_0 u\int_1^\infty e^{-b_0 u r} r^{\beta+1}\, dr \\
&= b_0 u\int_1^\infty e^{-b_0 u r}(1 - r^{\beta+1})\, dr \\
&\ge b_0 u\int_{2^{-\frac{1}{\beta+1}}}^\infty e^{-b_0 u r}(1 - r^{\beta+1})\, dr \ge \frac{1}{2} e^{-b_0 M 2^{-\frac{1}{\beta+1}}}.
\end{aligned}
$$

また, $\beta > -1$ に対しては

$$
\begin{aligned}
\frac{f(u)}{u^{\beta+1}} &= \frac{\beta+1}{u}\int_0^u e^{-b_0 s}\left(\frac{s}{u}\right)^\beta ds \\
&= (\beta+1)\int_0^1 e^{-b_0 u r} r^\beta\, dr \qquad (r = \frac{s}{u}) \\
&= e^{-b_0 u} + b_0 u\int_0^1 e^{-b_0 u r} r^{\beta+1}\, dr \\
&\ge e^{-b_0 M}.
\end{aligned}
$$

従って, $0 < \theta_{M,\beta} \le 1$ がとれて

$$\frac{1}{2} e^{-b_0 \theta_{M,\beta}} u^{\beta+1} \le f(u) \le u^{\beta+1}$$

とできる. $\theta_{M,\beta} \to \infty \quad (\beta \to -1)$ に注意する. 従って

$$\begin{aligned} - \frac{1}{\beta+1} \int_{t_1}^{t_2} \int_{B_r} \eta^2 \partial_t f(u) \, dxdt - \frac{\beta}{2} e^{-b_0 M} \int_{t_1}^{t_2} \int_{B_r} \eta^2 u^{\beta-1} |\nabla u|^2 \, dxdt \\ \le -\frac{2}{\beta} \int_{t_1}^{t_2} \int_{B_r} u^{\beta+1} |\nabla \eta|^2 \, dxdt \end{aligned}$$

となるから, $v = u^{\frac{\beta+1}{2}}$ とおくと

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\beta+1} \int_{t_1}^{t_2} \int_{B_r} \partial_t(\eta^2 f(u)) \, dxdt - \frac{2\beta}{(\beta+1)^2} e^{-b_0 M} \int_{t_1}^{t_2} \int_{B_r} \eta^2 |\nabla v|^2 \, dxdt \\ \le \frac{2}{|\beta|} \int_{t_1}^{t_2} \int_{B_r} v^2 |\nabla \eta|^2 \, dxdt + \frac{2}{|\beta+1|} \int_{t_1}^{t_2} \int_{B_r} \eta |\partial_t \eta| f(u) \, dxdt \\ \le \frac{2}{|\beta|} \int_{t_1}^{t_2} \int_{B_r} v^2 |\nabla \eta|^2 \, dxdt + \frac{2}{|\beta+1|} \int_{t_1}^{t_2} \int_{B_r} \eta |\partial_t \eta| v^2 \, dxdt \end{aligned} \tag{4.8}$$

となる.

補題 4.12 の (4.5) を証明する. $\beta < -1$ とする. さらに η が

$$\begin{aligned} \eta(t,x) &= 1, \quad (t,x) \in (s', T) \times B_{r'}, \\ \eta(t,x) &= 0, \quad (t,x) \in (0,s) \times B_r \end{aligned}$$

をみたすとする. $s' \le t \le T$ に対して, $t_1 = 0, t_2 = t$ とおくと (4.3) で $\eta^2 |\nabla v|^2$ が非負であることから

$$\begin{aligned} \int_{B_r} (\eta v)^2 \, dx \Big|_t \le 2e^{b_0 \theta} \int_{B_r} \eta^2 f(u) \, dx \Big|_t \le 2e^{b_0 \theta} \int_0^t \int_{B_r} \partial_t(\eta^2 f(u)) \, dxdt \\ \le 4e^{b_0 \theta} \left| 1 + \frac{1}{\beta} \right| \int_s^T \int_{B_r} (|\nabla \eta|^2 + \eta |\partial_t \eta|) v^2 \, dxdt \end{aligned}$$

だから

$$\sup_{s'<t<T} \int_{B_r} (\eta v)^2(t) \, dx \le 4e^{b_0 \theta} \left| 1 + \frac{1}{\beta} \right| \int_s^T \int_{B_r} (|\nabla \eta|^2 + \eta |\partial_t \eta|) v^2 \, dxdt$$

となる.

また, $t_1 = 0$, $t_1 = T$ とすると

$$-\frac{1}{\beta+1} \int_0^T \int_{B_r} \partial_t(\eta^2 f(u)) \, dxdt = -\frac{1}{\beta+1} \int_{B_r} f(u) \, dx \Big|_T \ge 0$$

より

$$\int_{s'}^{T}\int_{B_r}|\nabla(\eta v)|^2\,dxdt \le 2\int_{s'}^{T}\int_{B_r}(|\nabla\eta|^2v^2+\eta^2|\nabla v|^2)\,dxdt$$
$$\le 2e^{b_0M}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2\int_{s}^{T}\int_{B_r}(|\nabla\eta|^2+\eta|\partial_t\eta|)v^2\,dxdt$$

η を補題 4.11 と同じようにとれば

$$\|\eta v\|^2_{L^\infty(s',T;L^2(B_r))}+\|\nabla(\eta v)\|^2_{L^2(s',T;L^2(B_r))}$$
$$\le Ce^{b_0\theta}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2\left(\frac{1}{s'-s}+\frac{1}{(r-r')^2}\right)\|v\|^2_{L^2((s,T)\times B_r)}$$

が得られる．

Ladyženskaja の不等式 (補題 4.8) より

$$\|v\|^2_{L^{2(1+\frac{2}{n})}((s',T)\times B_{r'})}\le\|\eta v\|^2_{L^{2(1+\frac{2}{n})}((s',T)\times B_r)}$$
$$\le C(n)(\|\eta v\|^2_{L^\infty(s',T\,;\,L^2(B_r))}+\|\nabla(\eta v)\|^2_{L^2(s',T\,;\,L^2(B_r))})$$
$$\le C(n)e^{b_0\theta}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2\left(\frac{1}{s'-s}+\frac{1}{(r-r')^2}\right)\|v\|^2_{L^2((s,T)\times B_r)}$$

が得られる．

次に補題 4.13 の (4.6) を証明する．$-1<\beta<0$ とする．さらに η が

$$\eta(t,x)=1,\quad (t,x)\in(0,s')\times B_{r'}\,,$$
$$\eta(t,x)=0,\quad (t,x)\in(s,T)\times B_r$$

をみたすとする．$0\le t\le s'$ に対して, $t_1=t$, $t_2=T$ とおくと, (4.8) で $\eta^2|\nabla v|^2$ が非負であることから

$$\int_{B_r}(\eta v)^2\,dx\bigg|_t\le 2e^{b_0\theta}\int_{B_r}\eta^2f(u)\,dx=-2e^{b_0\theta}\int_t^T\int_{B_r}\partial_t(\eta^2f(u))\,dxdt$$
$$\le 4e^{b_0\theta}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\int_0^s\int_{B_r}(|\nabla\eta|^2+\eta|\partial_t\eta|)v^2\,dxdt$$

となる．従って

$$\sup_{0<t<s'}\int_{B_r}(\eta v)^2(t)\,dxdt\le 4e^{b_0\theta}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\int_0^s\int_{B_r}(|\nabla\eta|^2+\eta|\partial_t\eta|)v^2\,dxdt$$

となる．

また, $t_1=0$, $t_2=T$ とすると

$$-\frac{1}{\beta+1}\int_0^T\int_{B_r}\partial_t(\eta^2f(u))\,dxdt=\frac{1}{\beta+1}\int_{B_r}f(u)\,dx\bigg|_{t=0}\ge 0$$

より

$$\int_0^{s'}\int_{B_r}|\nabla(\eta v)|^2\,dxdt \le 2\int_0^{s'}\int_{B_r}(|\nabla\eta|^2v^2+\eta^2|\nabla v|^2)\,dxdt$$
$$\le 2e^{b_0M}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2\int_0^{s}\int_{B_r}(|\nabla\eta|^2+\eta|\partial_t\eta|)v^2\,dxdt$$

が得られる.

ここで, $\eta=\eta_1(t)\eta_2(|x|)$ と変数分離して

$$\eta_1(t)=\begin{cases}1, & (t<s'),\\ 0, & (t>\frac{s+s'}{2}),\end{cases}\qquad \eta_2(|x|)=\begin{cases}1, & (|x|<r'),\\ 0, & (|x|>\frac{r+r'}{2}),\end{cases}$$

かつ

$$|\partial_t\eta_1|\le\frac{4}{s-s'}\ ,\ |\partial_r\eta_2|\le\frac{4}{r-r'}$$

となるようにとれば

$$\|\eta v\|^2_{L^\infty(0,s';L^2(B_r))}+\|\nabla(\eta v)\|^2_{L^2(0,s';L^2(B_r))}$$
$$\le Ce^{b_0\theta}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2\left(\frac{1}{s-s'}+\frac{1}{(r-r')^2}\right)\|v\|^2_{L^2(0,s)\times L^2(B_r)}$$

が得られる.

Ladyženskaja の不等式 (補題 4.8) より

$$\|v\|^2_{L^{2(1+\frac{2}{n})}((0,s')\times B_{r'})}\le\|\eta v\|^2_{L^{2(1+\frac{2}{n})}((0,s')\times B_r)}$$
$$\le C(n)(\|\eta v\|^2_{L^\infty(0,s'\,;\,L^2(B_r))}+\|\nabla(\eta v)\|^2_{L^2(0,s'\,;\,L^2(B_r))})$$
$$\le C(n)e^{b_0\theta}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)^2\left(\frac{1}{s'-s}+\frac{1}{(r-r')^2}\right)\|v\|^2_{L^2((0,s)\times B_r)}$$

が得られる. □

定理 4.4 の証明. $j\in\mathbb{N}_0$ に対し

$$\tau_j=\tau'+2^{-j}(\tau-\tau')\,,\quad R_j=R'+2^{-j}(R-R')\,,$$
$$\alpha_j=\left(1+\frac{2}{n}\right)^j\,,\qquad D_j=(\tau_j,T)\times B_{R_j}$$

とおく. (4.5) に $\beta+1=p\alpha_j$, $s=\tau_j$, $s'=\tau_{j+1}$, $r'=R_{j+1}$, $r=R_j$ を代入すると

$$\|u^{-p}\|^{\alpha_j}_{L^{\alpha_{j+1}}(D_{j+1})}\le C_1(n,p)e^{b_0\theta}2^{2j+2}\left(\frac{1}{\tau'-\tau}+\frac{1}{(R-R')^2}\right)\|u^{-p}\|^{\alpha_j}_{L^{\alpha_j}(D_j)}$$

より

$$\|u^{-p}\|_{L^{\alpha_{j+1}}(D_{j+1})}\le\left(C_1e^{b_0\theta}\left(\frac{1}{\tau'-\tau}+\frac{1}{(R-R')^2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha_j}}2^{\frac{2j+2}{\alpha_j}}\|u^{-p}\|_{L^{\alpha_j}(D_j)} \tag{4.9}$$

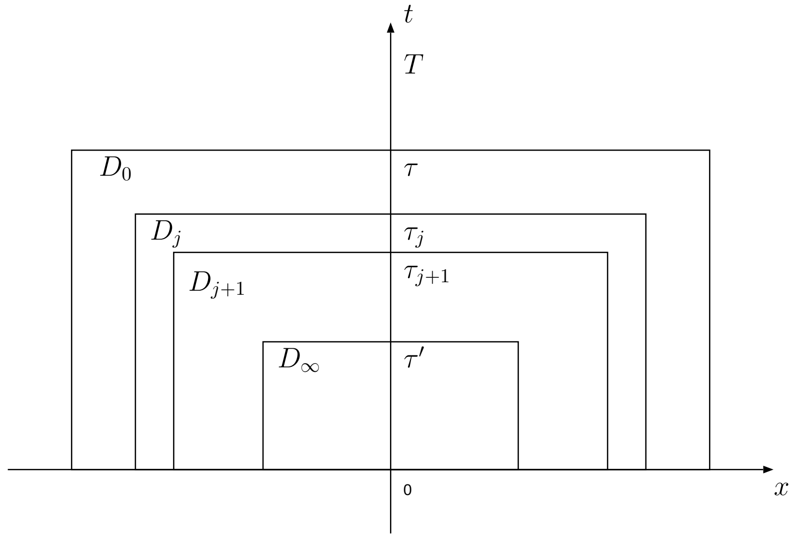

FIGURE 4.3. 領域 D_j について ($D_\infty = (0,\tau') \times B_{R'}$ と置いた)

となる. (4.9) をくり返し用いることにより

$$\begin{aligned}\|u^{-p}\|_{L^{\alpha_{j+1}}((\tau',T)\times B_{R'})} &\le \prod_{i=0}^{\infty}\left\{\left(C_1 e^{b_0\theta}\left(\frac{1}{\tau'-\tau}+\frac{1}{(R-R')^2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha_j}} 2^{\frac{2j+2}{\alpha_j}}\right\}\|u^{-p}\|_{L^{\alpha_0}(D_0)}\\ &\le C_3(n,p)\exp\left(\frac{b_0\theta(n+2)}{2}\right)\left(\frac{1}{\tau'-\tau}+\frac{1}{(R-R')^2}\right)^{\frac{n+2}{2}}\|u^{-p}\|_{L^{\alpha_0}(D_0)}.\end{aligned}$$

$j \to \infty$ として

$$\sup_{(\tau',T)\times B_{R'}} u^{-p} \le C_3(n,p)\exp\left(\frac{b_0\theta(n+2)}{2}\right)\left(\frac{1}{\tau'-\tau}+\frac{1}{(R-R')^2}\right)^{\frac{n+2}{2}}\|u^{-p}\|_{L^{\alpha_0}(D_0)}$$

となり, 両辺 $-p$ 乗根をとることにより

$$\begin{aligned}&\inf_{(\tau',T)\times B_{R'}} u\\ &\ge C_3(n,p)\exp\left(-\frac{b_0\theta(n+2)}{2p}\right)\left(\frac{1}{\tau'-\tau}+\frac{1}{(R-R')^2}\right)^{-\frac{n+2}{2p}}\left(\int_\tau^T\int_{B_R} u^{-p}\,dxdt\right)^{-\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

が得られる. □

定理 4.3 の証明. $j \in \mathbb{N}_0$ に対し

$$\begin{aligned}\tau_j &= \tau' + 2^{-j}(\tau-\tau'), \quad & R_j &= R' + 2^{-j}(R-R'),\\ \alpha_j &= \left(1+\frac{2}{n}\right)^j, & D_j &= (0,\tau_j)\times B_{R_j}\end{aligned}$$

とおく (Figure 4.3 を参照). (4.6) に $\beta+1 = p\alpha_j$, $s=\tau_j$, $s'=\tau_{j+1}$, $r'=R_{j+1}$, $r=R_j$ を

代入すると

$$\|u^p\|_{L^{\alpha_{j+1}}(D_{j+1})}^{\alpha_j} \le C_1(n,p)e^{b_0\theta}2^{2j+2}\left(\frac{1}{\tau-\tau'}+\frac{1}{(R-R')^2}\right)\|u^p\|_{L^{\alpha_j}(D_j)}^{\alpha_j}$$

より

$$\|u^p\|_{L^{\alpha_{j+1}}(D_{j+1})} \le \left(C_1e^{b_0\theta}\left(\frac{1}{\tau-\tau'}+\frac{1}{(R-R')^2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha_j}} 2^{\frac{2j+2}{\alpha_j}}\|u^p\|_{L^{\alpha_j}(D_j)} \tag{4.10}$$

となる. $p' < p\alpha_{j+1}$ となる $j \in \mathbb{N}_0$ をとれば,

$$\|u\|_{L^{p'}((0,\tau')\times B_{R'})} \le C(\tau',R',n,p,p')\|u\|_{L^{p\alpha_{j+1}}((0,\tau')\times B_{R'})} = C\|u^p\|_{L^{\alpha_{j+1}}((0,\tau')\times B_{R'})}^{\frac{1}{p}}$$

となり, (4.10) をくり返し用いることで

$$\begin{aligned}\|u^p\|_{L^{\alpha_{j+1}}((0,\tau')\times B_{R'})} &\le \prod_{i=0}^{\infty}\left\{\left(C_1e^{b_0\theta}\left(\frac{1}{\tau'-\tau}+\frac{1}{(R-R')^2}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha_j}}2^{\frac{2j+2}{\alpha_j}}\right\}\|u^p\|_{L^{\alpha_0}(D_0)}\\ &\le C_3(n,p,R,R',\tau,\tau')\exp\left(\frac{b_0\theta(n+2)}{2}\right)\|u^p\|_{L^1((0,\tau)\times B_R)}\end{aligned}$$

となる. 従って

$$\|u\|_{L^{p'}((0,\tau')\times B_{R'})} \le C(n,p,p',R,R',\tau,\tau')\exp\left(\frac{b_0\theta(n+2)}{2p}\right)\left(\int_0^\tau\int_{B_R}u^p\,dxdt\right)^{\frac{1}{p}}$$

が得られる. □

4.3. 定理 4.5 の証明.

Step.1 $t > 0$, $h \in \mathbb{R}$ を固定する. (4.7) で $r = R$, $t_1 = t$, $t_2 = t+h$ とする. また B_r のかわりに K_r とし, $\beta = -1$ とすると

$$\begin{aligned}-\int_t^{t+h}\int_{K_r}\eta^2e^{-b_0u}u^{-1}\partial_tu\,dxdt + \frac{1}{2}\int_t^{t+h}\int_{K_r}\eta^2e^{-b_0u}u^{-2}|\nabla u|^2\,dxdt&\\ \le 2\int_t^{t+h}\int_{K_r}e^{-b_0u}|\nabla\eta|^2\,dxdt.&\end{aligned}$$

ここで,

$$f(u) := -\int_1^u e^{-b_0s}s^{-1}\,ds$$

とおくと

$$\partial_tf(u) = -e^{-b_0u}u^{-1}\partial_tu\,,\ \nabla f(u) = e^{-b_0u}u^{-1}\nabla u$$

となるから

$$\begin{aligned}-\int_t^{t+h}\int_{K_r}\eta^2\partial_tf(u)\,dxdt + \frac{1}{2}\int_t^{t+h}\int_{K_r}\eta^2e^{b_0u}|\nabla f(u)|^2\,dxdt&\\ \le 2\int_t^{t+h}\int_{K_r}e^{-b_0u}|\nabla\eta|^2\,dxdt&\end{aligned}$$

となる．ここで, $K_\rho(x_0) \subset K_R$ となる $\rho > 0$, $x_0 \in K_R$ に対して, η を t に依らない関数で

$$\begin{aligned}&\eta(x) = 1, \quad (x \in K_{\frac{\rho}{2}}(x_0))\,,\\ &\operatorname{supp}\eta \subset\subset K_\rho(x_0)\,,\\ &0 \le \eta \le 1\,,\, |\nabla\eta| \le \frac{4}{\rho}\end{aligned}$$

をみたすようにとる．さらに, 任意の $\mu \ge 0$ に対して $\{x \in \mathbb{R}^n\,;\, \eta(x) \ge \mu\}$ が凸になるように選ぶと

$$\int_{K_\rho(x_0)} \eta^2 f(u)\, dxdt\Big|_t^{t+h} + \frac{1}{2}\int_t^{t+h}\int_{K_\rho(x_0)} \eta^2 |\nabla f(u)|^2\, dxdt \le Ch\rho^{N-2} \tag{4.11}$$

となる．ただし, 定数 C は n にのみ依存する．

補題 4.14. $D \subset \mathbb{R}^n$ を有界領域とする．さらに p を D 上非負で連続な関数とし, $\operatorname{supp} p$ は D 上でコンパクトであるとする．さらに, 任意の $\mu \ge 0$ に対して $\{x \in D\,;\, p(x) \ge \mu\}$ が凸であるとする．このとき, 任意の $g \in H^1(D)$ に対して

$$\int_D (g(x) - k)^2 p(x)\, dx \le C\frac{(\mathrm{diam}D)^{n+2}}{A}\|p\|_{L^\infty(D)}\int_D |\nabla g(x)|^2 p(x)\, dx$$

が成り立つ．ただし,

$$A = \int_D p(x)\, dx\,,\ k = \frac{\int_D g(x)p(x)\, dx}{A}$$

である．

補題 4.14 の証明. $\int_D p\, dx = 1$ を仮定して示せば十分である．このとき, k の定義と Hölder 不等式より

$$\begin{aligned}\int_D (g(x) - k)^2 p(x)\ dx &= \int_D \left(\int_D (g(x) - g(y))p(y)\ dy\right)^2 p(x)\ dx\\ &\le \iint_{D\times D} |g(x) - g(y)|^2 p(x)p(y)\ dxdy\end{aligned}$$

となる．

まず $x \ne y$ となる $x, y \in \operatorname{supp}\, p$ を固定し, $d = \mathrm{diam}D$ と置く．このとき

$$\begin{aligned}|g(x) - g(y)|^2 &= \left|\int_0^1 \nabla g(x + t(y - x))\cdot(y - x)\ dt\right|^2\\ &\le d^2\int_0^1 |\nabla g(x + t(y - x))|^2\ dt\\ &\le d^2\int_0^1 |\nabla g(x + t(y - x))|^2 p(x + t(y - x))\ dt\frac{1}{\min\{p(x), p(y)\}}\end{aligned}$$

となる．最後の不等式は $\{z; p(z) \ge p(x)\}, \{z; p(z) \ge p(y)\}$ が convex だから, $0 \le t \le 1$ に対して $p(x + t(y - x)) \ge \min\{p(x), p(y)\}$ となることから従う．さらに $p(x)p(y) \le$

$(\sup p)\min\{p(x), p(y)\}$ だから

$$|g(x)-g(y)|^2 p(x)p(y) \leq d^2(\sup p)\int_0^1 |\nabla g(x+t(y-x))|^2 p(x+t(y-x))\ dt$$

となる.

次に $u, \nabla u, p$ を $\mathbb{R}^n$ 上にゼロ拡張し, $z \in \mathbb{R}^n$ を固定する. さらに $y = x+z$ とおき, x について積分すると

$$\int_D |g(x)-g(x+z)|^2 p(x)p(x+z)\ dx \leq d^2(\sup p)\int_D\int_0^1 |\nabla g(x+tz)|^2 p(x+tz)\ dtdx$$

となる. 右辺の積分は積分順序を交換して変数変換して

$$\begin{aligned}\int_D\int_0^1 |\nabla g(x+tz)|^2 p(x+tz)\ dtdx &= \int_0^1\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla g(x+tz)|^2 p(x+tz)\ dxdt \\ &= \int_0^1\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla g(w)|^2 p(w)\ dwdt = \int_D |\nabla g(x)|^2 p(x)\ dx\end{aligned}$$

となる. さらに $x \in D$ に対して $|z| \geq d$ ならば $p(x)p(x+z) = 0$ だから, $z \in B_d$ 上で積分すると

$$\int_{B_d}\int_D |g(x)-g(x+z)|^2 p(x)p(x+z)\ dxdz \leq C(n)d^{n+2}(\sup p)\int_D\int_0^1 |\nabla g(x)|^2 p(x)\ dtdx$$

となる. 左辺について積分順序を交換して, $x+z = y$ と変数変換する. $B_d + x \supset D$ となることに注意して

$$\begin{aligned}\int_{B_d}\int_D |g(x)-g(x+z)|^2 p(x)p(x+z)\ dxdz &= \int_D\int_{B_d} |g(x)-g(x+z)|^2 p(x)p(x+z)\ dzdx \\ &= \int_D\int_D |g(x)-g(y)|^2 p(x)p(y)\ dydx\end{aligned}$$

となる. □

補題 4.14 を $g = f(u)$, $p = \eta^2$, $D = K_\rho(x_0)$ で (4.11) の左辺第二項に適用して

$$\int_{K_\rho(x_0)} \eta^2 f(u)\, dxdt\Big|_t^{t+h} + C_1\frac{\int_{K_\rho(x_0)}\eta^2 dx}{\rho^{n+2}}\int_t^{t+h}\int_{K_\rho(x_0)} (f(u)-V(t))^2\eta^2\, dxdt \leq Ch\rho^{n-2}$$

とできる. ここで, C_1 は n にのみ依る定数であり,

$$V(t) := \frac{\int_{K_\rho(x_0)} f(u)\eta^2\, dx}{\int_{K_\rho(x_0)}\eta^2\, dx}$$

である.

両辺 $h\int_{K_\rho(x_0)}\eta^2\, dx$ で割って, $h \to 0$ とすると

$$\frac{dV}{dt} + \frac{C_1}{\rho^{n+2}}\int_{K_{\frac{\rho}{2}}(x_0)} (f(u)-V(t))^2\, dx \leq \frac{C\rho^{n-2}}{\int_{K_\rho(x_0)}\eta^2\, dx} \leq C_2\rho^{-2}, \quad \text{a.e. } 0<t<T$$

となる. ここで C_2 は n にのみ依る定数である.

<u>Step.2</u> 次に $0<\tau<T$ を

$$0<\tau-\frac{\rho^2}{4}<\tau+\frac{\rho^2}{4}<T$$

をみたすようにとる．さらに

$$w_1(t,x)=f(u)-V(\tau)-C_2\rho^{-2}(t-\tau)\,,\,W_1(t)=V(t)-V(\tau)-C_2\rho^{-2}(t-\tau)$$

とおくと

$$\frac{dW_1}{dt}+\frac{C_1}{\rho^{n+2}}\int_{K_{\frac{\rho}{2}}(x_0)}(w_1-W_1)^2\,dx\le 0\,,\,W_1(\tau)=0 \tag{4.12}$$

となる．さらに, $s>0$ に対し $Q_s^1(t):=\{x\in K_{\frac{\rho}{2}}(x_0)\,;\,w(t,x)>s\}$ とおくと, (4.12) より $\tau\le t\le\tau+\frac{\rho^2}{4}$ 上で $W_1(t)\le 0$ となるので

$$w_1-W_1\ge s-W_1>0,\quad (t\ge\tau\,,\,x\in Q_s^1(t))$$

となる．(4.12) で積分領域を $Q_s^1(t)$ に制限すると

$$\frac{dW_1}{dt}+\frac{C_1}{\rho^{n+2}}(s-W_1(t))^2|Q_s^1(t)|\le 0$$

より

$$\frac{|Q_s^1(t)|}{\rho^{n+2}}\le C_1^{-1}(s-W_1(t))^{-2}\frac{d(s-W_1)}{dt}=C_1^{-1}\frac{d}{dt}\{-(s-W_1(t))^{-1}\}$$

となる．両辺 t について, τ から $\tau+\frac{\rho^2}{4}$ まで積分して

$$\frac{1}{\rho^{n+2}}\int_{\tau}^{\tau+\frac{\rho^2}{4}}|Q_s^1(t)|\,dt\le C_1^{-1}\left\{\frac{1}{s-W_1(\tau)}-\frac{1}{s-W_1(\tau+\frac{\rho^2}{4})}\right\}\le\frac{1}{C_1 s}$$

となる．そこで. $U_+:=(\tau,\tau+\frac{\rho^2}{4})\times K_{\frac{\rho}{2}}(x_0)$ とおけば

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|U_+|}\iint_{U_+}\sqrt{(f(u)-V(\tau))_+}\,dxdt\\
&=\frac{1}{|U_+|}\iint_{U_+}\sqrt{(w_1(t,x)+C_2\rho^{-2}(t-\tau))_+}\,dxdt\\
&\le\left(\iint_{U_+}\sqrt{w_1(t,x)_+}\,dxdt+\iint_{U_+}\sqrt{C_2\rho^{-2}(t-\tau)}\,dxdt\right)\\
&\le\left(\frac{1}{2}\int_{\tau}^{\tau+\frac{\rho^2}{4}}\int_0^{\infty}s^{-\frac{1}{2}}|Q_s^1(t)|\,dsdt+\sqrt{\frac{C_2}{4}}|U_+|\right)
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\int_{\tau}^{\tau+\frac{\rho^2}{4}}\int_0^{\infty}s^{-\frac{1}{2}}|Q_s^1(t)|\,dsdt&=\int_{\tau}^{\tau+\frac{\rho^2}{4}}\int_0^{1}s^{-\frac{1}{2}}|Q_s^1(t)|\,dsdt+\int_{\tau}^{\tau+\frac{\rho^2}{4}}\int_1^{\infty}s^{-\frac{1}{2}}|Q_s^1(t)|\,dsdt\\
&=:I_1+I_2
\end{aligned}$$

とおくと,

$$I_1 \le \int_\tau^{\tau+\frac{\rho^2}{4}} \int_0^1 s^{-\frac{1}{2}} |K_{\rho/2}|\, ds dt = 2|U_+|\,,$$

$$I_2 \le \int_1^\infty s^{-\frac{1}{2}} \int_\tau^{\tau+\frac{\rho^2}{4}} |Q_s^1(t)|\, ds dt \le \int_1^\infty s^{-\frac{1}{2}} \frac{\rho^{n+2}}{C_1 s}\, ds = \frac{8}{C_1}|U_+|$$

従って

$$\frac{1}{|U_+|} \iint_{U_+} \sqrt{(f(u)-V(\tau))_+}\, dx dt \le C \tag{4.13}$$

となる. ここで, 定数 C は n にのみ依る定数である.

次に

$$w_2(t,x) = V(\tau) - f(u) + C_2\rho^{-2}(t-\tau)\,,\, W_2(t) = V(\tau) - V(t) + C_2\rho^{-2}(t-\tau)$$

とおくと

$$-\frac{dW_2}{dt} + \frac{C_1}{\rho^{n+2}} \int_{K_{\frac{\rho}{2}(x_0)}} (w_2 - W_2)^2\, dx \le 0\,,\, W_2(\tau) = 0 \tag{4.14}$$

となる. (4.14) より

$$W_2(t) \le 0, \quad \tau - \frac{\rho^2}{4} \le t \le \tau$$

となる. 次に $Q_s^2(t) := \{x \in K_{\frac{\rho}{2}}(x_0) \,:\, w_2(t,x) > s\}$ とおくと

$$W_2 - w_2 \le W_2 - s \le 0, \quad (\tau - \frac{\rho^2}{4} \le t \le \tau\,,\, x \in Q_s^2(t))$$

だから, (4.14) で積分領域を $Q_s(t)$ に制限して

$$-\frac{dW_2}{dt} + \frac{C_1}{\rho^{n+2}}|Q_s^2(t)| \le 0$$

となるので,

$$\frac{|Q_s^2(t)|}{\rho^{n+2}} \le C_1^{-1} \frac{d}{dt}\{-(W_2 - s)^{-1}\}$$

となる. 両辺, t について, $\tau - \frac{\rho^2}{4}$ から τ まで積分して

$$\frac{1}{\rho^{n+2}} \int_{\tau-\frac{\rho^2}{4}}^{\tau} |Q_s(t)|\, dt \le C_1^{-1} \left(\frac{1}{W_2(\tau - \frac{\rho^2}{4}) - s} - \frac{1}{W_2(\tau) - s} \right) \le \frac{1}{C_1 s}$$

となる. 先と同様にして, $U_- = (\tau - \frac{\rho^2}{4}, \tau) \times K_{\frac{\rho}{2}}(x_0)$ とおけば

$$\frac{1}{|U_-|} \iint_{U_-} \sqrt{(V(\tau)-f(u))_+}\, dx dt \le C \tag{4.15}$$

となる. ここで, 定数 C は n にのみ依る定数である. 以上により $(\tau-\frac{\rho^2}{4},\tau+\frac{\rho^2}{4})\times K_{\frac{\rho}{2}}(x_0)\subset(0,T)\times K_R$ ならば

$$\begin{aligned}\frac{1}{|U_+|}\iint_{U_+}\sqrt{(f(u)-V(\tau))_+}\,dxdt\le C\\ \frac{1}{|U_-|}\iint_{U_-}\sqrt{(V(\tau)-f(u))_+}\,dxdt\le C\end{aligned}\tag{4.16}$$

がわかった.

ここで, 次の補題を用いる.

補題 4.15 (Moser[**16**] , Fabes-Garofalo [**5**]). $f(u)$ が (4.16) をみたすとすると, $p_0>0$ が存在して

$$\left(\iint_{(0,\frac{1}{8}T)\times K_{\frac{R}{2}}}e^{-p_0f}\,dxdt\right)\left(\iint_{(\frac{7}{8}T,T)\times K_{\frac{R}{2}}}e^{p_0f}\,dxdt\right)\le C\tag{4.17}$$

が成り立つ. ここで, 定数 C は n,T,R にのみ依存する.

定理 4.5 の証明.

$$A=\frac{1}{M}\exp\left(\int_1^M e^{-b_0s}s^{-1}\,ds\right),\ B=\exp\left(\int_0^1\frac{1-e^{-b_0s}}{s}\,ds\right)$$

とおけば

$$-\log B\xi\le f(\xi)\le-\log A\xi,\quad(0<\xi\le M)$$

がわかる. 従って, 補題 4.15 より

$$\left(\iint_{(0,\frac{1}{8}T)\times K_{\frac{R}{2}}}e^{p_0\log Au}\,dxdt\right)\left(\iint_{(\frac{7}{8}T,T)\times K_{\frac{R}{2}}}e^{-p_0\log Bu}\,dxdt\right)\le C$$

より

$$\left(\iint_{(0,\frac{1}{8}T)\times K_{\frac{R}{2}}}u^{p_0}\,dxdt\right)^{\frac{1}{p_0}}\le C\frac{B}{A}\left(\iint_{(\frac{7}{8}T,T)\times K_{\frac{R}{2}}}u^{-p_0}\,dxdt\right)^{-\frac{1}{p_0}}$$

が得られる. □

5. 放物型 John-Nirenberg 評価

このセクションでは, 定理 4.5 の証明で用いた, 補題 4.15 を Fabes-Garofalo[5] の手法により, 証明する.

記号 5.1. このセクションを通して, $K := [-1,1]^n$, $U := (-1,1) \times K$ とし, U の部分集合として

$$
\begin{aligned}
U^+ :=& (0,1) \times K, & U^- :=& (-1,0) \times K, \\
V^+ :=& \left(\frac{1}{2}, 1\right) \times K, & V^- :=& \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \times K, \\
W^+ :=& \left(\frac{1}{4}, 1\right) \times K, & W^- :=& \left(-1, -\frac{3}{4}\right) \times K,
\end{aligned}
$$

と定義する.

$(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\lambda > 0$ に対して

$$\pi(t,x) = \pi_\lambda^{(t_0,x_0)}(t,x) := (t_0 + \lambda^2 t, x_0 + \lambda x)$$

と定める.

定義 5.2. $C \subset \mathbb{R}^{n+1}$ が放物型長方形であるとは $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\lambda > 0$ が存在して

$$C = \pi_\lambda^{(t_0,x_0)}(U)$$

と書けるときをいう. このとき, $C^+, C^-, D^+, D^-, E^+, E^-$ をそれぞれ$U^+, U^-, V^+, V^-, W^+, W^-$ の π による像とする.

このセクションにおける主定理は次である.

定理 5.3 (Fabes-Garofalo[**5**]). ある定数 $A \geq 0$ が存在して, 任意の放物型長方形 $C \subset U$ に対して C に依存する定数 a_C が存在して

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|C^+|}\int_{C^+} \sqrt{(f(t,x) - a_C)_+}\, dtdx \leq A \\
\frac{1}{|C^-|}\int_{C^-} \sqrt{(a_C - f(t,x))_+}\, dtdx \leq A
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

をみたすとする. このとき, 定数 $p_0 > 0$ が存在して

$$\int_{W^+} e^{p_0 f(t,x)}\, dxdt \int_{W^-} e^{-p_0 f(t,x)}\, dxdt \leq C|W^+||W^-|$$

が成り立つ. ここで, 定数 C は n にのみ依存する.

まず, 分布関数の評価を行う.

定理 5.4 (Fabes-Garofalo[**5**])**.** ある定数 $A \geq 0$ が存在して, 任意の放物型長方形 $C \subset U$ に対して C に依存する定数 a_C が存在して

$$\begin{aligned}\frac{1}{|C^+|}\int_{C^+}\sqrt{(f(t,x)-a_C)_+}\,dtdx &\leq A\\ \frac{1}{|C^-|}\int_{C^-}\sqrt{(a_C-f(t,x))_+}\,dtdx &\leq A\end{aligned}\tag{5.2}$$

をみたすとする. このとき, 任意の $\alpha > 0$ に対し

$$\begin{aligned}|\{(t,x)\in V^+\,;\,(f(t,x)-a_{C_0})_+ > \alpha\}| &\leq Be^{-b\sqrt{\frac{\alpha}{A}}}|V^+|\\ |\{(t,x)\in V^-\,;\,(a_{C_0}-f(t,x))_+ > \alpha\}| &\leq Be^{-b\sqrt{\frac{\alpha}{A}}}|V^-|\end{aligned}\tag{5.3}$$

が成り立つ. ここで B, b は次元 n にのみ依存する.

補題 5.4 の証明. まず (5.3) の第 1 式を示せば, 第 2 式は $-f(-t,x)$ を考えることで示せる. さらに $\frac{f-a_U}{A^2}$ を f のかわりに考えることで, $A=1$, $a_U=0$ としてよい. $\alpha \leq 1$ なら $Be^{-b\alpha^{\frac{1}{2}}} \geq Be^{-b}$ だから, B を十分に大きくとることで, $\alpha > 1$ に対して

$$|\{(t,x)\in V^+\,;\,f(t,x)_+ > \alpha\}| \leq Be^{-b\sqrt{\alpha}}|V^+| \tag{5.4}$$

を示せばよい.

<u>Selection Process</u> $\beta > 0$ を固定する. $D_0^+ := V^+$ を空間方向に 4^n 等分, 時間方向に 4^2 等分の長方形にわける. 各長方形を $D_{1,j}^+$ とおく. 次に $D_{1,j}^+$ に対応する放物型長方形 $C_{1,j}$ を考える. このとき $\beta \geq a_{C_{1,j}}^+$ のときは, また同様の分割をして $D_{2,j}^+$ を作る. 逆に $\beta < a_{C_{1,j}}^+$ ならば, $D_{1,j}^+$ は操作を終える. 以下, この操作をくりかえす.

このようにして $\{D_{n,j}^+(\beta)\}$ を作り

$$D(\beta) := \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_j D_{n,j}^+(\beta)$$

とおく.

主張 5.5. 任意の $\beta > 0$ に対して

$$\sqrt{f_+(t,x)} \leq 1+\sqrt{\beta} \quad \text{a.e. } (t,x)\in D_0^+ \setminus D(\beta).$$

主張 5.5 の証明. $(t,x)\in D_0^+\setminus D(\beta)$ なら, ある放物型長方形の列 $\{D_{n,j}^+\}$ が存在して

$$(t,x)\in D_{n,j}^+\,,\ a_{C_{n,j}} \leq \beta\,,\ |C_{n,j}^+| \to 0\ (n\to\infty)$$

とできる. 従って (5.2) と $A=1$ より

$$\frac{1}{|C_{n,j}^+|}\int_{C_{n,j}^+}\sqrt{f_+(t,x)}\,dxdt \leq \frac{1}{|C_{n,j}^+|}\int_{C_{n,j}^+}\sqrt{(f(t,x)-a_{C_{n,j}})_+}\,dxdt+\sqrt{\beta} \leq 1+\sqrt{\beta}$$

とできる. Lebesgue の微分定理から殆んど至るところの $(t,x) \in D_0^+ \setminus D(\beta)$ に対して

$$\frac{1}{|C_{n,j}^+|}\int_{C_{n,j}^+} \sqrt{f_+(t,x)}\,dxdt \to \sqrt{f_+(t,x)} \quad (n \to \infty)$$

より主張 5.5 が従う. □

主張 5.5 から

$$\{(t,x) \in D_0^+\,;\, f(t,x) \geq (1+\sqrt{\beta})^2\} \subset D(\beta)$$

がわかる. もし $\beta > 0$ に対して

$$|D(\beta)| \leq Be^{-b\sqrt{\beta}}|D_0^+| \tag{5.5}$$

を示せば, $\beta = (\sqrt{\alpha}-1)^2$ ととることで

$$|\{(t,x) \in D_0^+\,;\, f(t,x)^+ > \alpha\}| \leq |D(\beta)| \leq Be^{-b(\sqrt{\alpha}-1)}|D_0^+| = Be^b e^{-b\sqrt{\alpha}}|V^+|$$

がわかり, (5.4) が示される. (5.5) を示すのに, 次の主張を用いる.

主張 5.6.

$$\sqrt{\beta} \geq \sqrt{\alpha}+1 \to |D(\beta)| \leq \frac{C}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}-1}|D(\alpha)|, \tag{5.6}$$

ただし $C \geq 0$ は n にのみ依存する.

(5.4) の証明. $g(\alpha) := |D(\alpha^2)|$ とおくと (5.6) より

$$\beta > \alpha+1 \to g(\beta) \leq \frac{C}{\beta-\alpha-1}g(\alpha).$$

$L = 2C+1$ とおくと, 任意の $\alpha > 0$ に対し, $\beta = \alpha + L$ とおくと, $\beta > \alpha+1$ だから

$$g(\alpha+L) \leq \frac{C}{\alpha+L-\alpha-1}g(\alpha) \leq \frac{1}{2}g(\alpha) \tag{5.7}$$

となる. $\beta > 0$ に対し $nL < \beta \leq (n+1)L$ となる $n \in \mathbb{N}$ をとると, (5.7) を繰り返し用いることにより,

$$g(\beta) \leq \frac{1}{2}g(\beta-L) \leq \cdots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n g(\beta-nL) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\beta/L-1}|D_0^+| = 2e^{-\beta\log 2/L}|D_0^+|$$

となり (5.5) が示される. □

主張 5.6 を示すために $D(\alpha)$ を再度考察する. $\{D_{n,j}^+(\alpha)\}$ は互いに交わらない, すなわち共通部分が零集合だが, 対応する $\{C_{n,j}^-(\alpha)\}$ は互いに交わる. すなわち, 共通部分が零集合にならないことがありうる. そこで $\{C_{n,j}^-(\alpha)\}$ から, 次の方法で最大非交叉部分集合族 $\{{}^*C_{n,j}^-\}$ を作る.

Step.1 次をみたす $\{C_{1,j}^-(\alpha)\} \supset \{{}^*C_{1,j}^-(\alpha)\}$ を選ぶ.

- 任意の $C_{1,j}^-(\alpha)$ はある ${}^*C_{1,k}^-(\alpha)$ と交わる.
- $\{{}^*C_{1,j}^-(\alpha)\}$ は互いに交わらない.

Step.2 次をみたす $\{C_{2,j}^-(\alpha)\} \supset \{{}^*C_{2,j}^-(\alpha)\}$ を選ぶ.

- 任意の $C_{2,j}^-(\alpha)$ はある ${}^*C_{1,k}^-(\alpha)$ か ${}^*C_{2,k}^-(\alpha)$ と交わる.
- $\{{}^*C_{1,j}^-(\alpha)\}$ と $\{{}^*C_{2,j}^-(\alpha)\}$ は互いに交わらない.

以下同様にして

Step.n 次をみたす $\{C^-_{n,j}(\alpha)\} \supset \{{}^*C^-_{n,j}(\alpha)\}$ を選ぶ.

- 任意の $C^-_{n,j}(\alpha)$ に対して, ある $\lambda \le n$ が存在して, ある ${}^*C^-_{\lambda,k}(\alpha)$ と交わる.
- $\lambda \le n$ に対して, $\{{}^*C^-_{\lambda,j}(\alpha)\}$ は互いに交わらない.

さて $0 < \alpha < \beta$ に対して, $\{D^+_{n,j}(\alpha)\}$ と $\{D^+_{n,j}(\beta)\}$ を Selection Process によって構成する. 次に $\{{}^*C^-_{n,j}(\beta)\}$ を $\{C^-_{n,j}(\beta)\}$ の最大非交叉部分集合族とする.

まず, $\{D^+_{n,j}(\beta)\}$ は互いに交わらないから

$$|D(\beta)| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j} |D^+_{n,j}(\beta)|$$

となる. 次に $\mu \ge 1$ に対して

$$\begin{aligned} I_\mu := \{(n,j)\,;\, & C^-_{n,j}(\beta) \text{ はある} {}^*C^-_{\mu,k}(\beta) \text{ と交わり},\\ & \text{任意の} \lambda < \mu \text{に対して, どの} {}^*C^-_{\lambda,k}(\beta) \text{ とも交わらない} \} \end{aligned}$$

とおく. $\{{}^*C^-_{n,j}(\beta)\}$ が最大非交叉部分集合族だから

$$|D(\beta)| = \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{(n,j)\in I_\mu} |D^+_{n,j}(\beta)|$$

となる.

$(n,j) \in I_\mu$ に対し, $C^-_{n,j}(\beta)$ の各辺の長さよりも, $C^-_{n,j}(\beta)$ に交わる ${}^*C^-_{\mu,k}(\beta)$ の各辺の長さの方が長いから

$$D^+_{n,j}(\beta) \subset 2C^-_{n,j}(\beta) \subset 4{}^*C^-_{\mu,k}(\beta)$$

が成り立つ. ここで $2C^-_{n,j}(\beta)$ は $C^-_{n,j}(\beta)$ の各辺を 2 倍したもの, $4{}^*C^-_{\mu,k}(\beta)$ は ${}^*C^-_{\mu,k}(\beta)$ の各辺を 4 倍したものである. 従って

$$\bigcup_{(n,j)\in I_\mu} D^+_{n,j}(\beta) \subset \bigcup_j 4{}^*C^-_{\mu,j}(\beta)$$

となるから

$$|D(\beta)| \le 4^{n+1} \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{j} |{}^*C^-_{\mu,j}(\beta)|$$

となる.

さらに $\beta > \alpha$ と $\mu > 0$ に対し, $\nu \le \mu$ と k が存在して $D^+_{\mu,j}(\beta) \subset D^+_{\nu,k}(\alpha)$ とできるから

$$|D(\beta)| \le 4^{n+1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(\mu,j)\in J_n} |{}^*C^-_{\mu,j}(\beta)| \tag{5.8}$$

とできる. ここで

$$J_n := \{(\mu,j)\,;\, \text{ある } k \text{ が存在して } D^+_{\mu,j}(\beta) \subset D^+_{n,k}(\alpha)\}$$

である.

今, $(\mu, j) \in J_n$ に対し,

$$\begin{aligned}\sqrt{\beta} &< \sqrt{(a_{{}^*C_{\mu,j}(\beta)})_+} \\ &\leq \frac{1}{|{}^*C^-_{\mu,j}(\beta)|}\int_{{}^*C^-_{\mu,j}(\beta)} \sqrt{(a_{{}^*C_{\mu,j}(\beta)} - f(t,x))_+}\,dxdt + \frac{1}{|{}^*C^-_{\mu,j}(\beta)|}\int_{{}^*C^-_{\mu,j}(\beta)} \sqrt{f_+(t,x)}\,dxdt\end{aligned}$$

より (5.2) と $A = 1$ から

$$(\sqrt{\beta} - 1)|{}^*C^-_{\mu,j}(\beta)| \leq \int_{{}^*C^-_{\mu,j}(\beta)} \sqrt{f_+(t,x)}\,dxdt$$

となるので

$$(\sqrt{\beta} - 1)\sum_{(\mu,j)\in J_n} |{}^*C^-_{\mu,j}(\beta)| \leq \sum_{(\mu,j)\in J_n} \int_{{}^*C^-_{\mu,j}(\beta)} \sqrt{f_+(t,x)}\,dxdt$$

となる.

$(\mu, j) \in J_n$ ならば, k, l が存在して $D^+_{\mu,j}(\beta) \subset D^+_{n,k}(\alpha) \subset D^+_{n-1,l}(\alpha)$ かつ $a_{C_{n-1,l}(\alpha)} \leq \alpha$ とできる. 従って

$$\int_{{}^*C^-_{\mu,j}(\beta)} \sqrt{f_+(t,x)}\,dxdt \leq \int_{{}^*C^-_{\mu,j}(\beta)} \sqrt{(f(t,x) - a_{C_{n-1,l}(\alpha)})_+}\,dxdt + \sqrt{\alpha}|{}^*C^-_{\mu,j}(\beta)|$$

となる. 次に

$$J_{n,l} := \{(\mu, j)\,;\, D^+_{\mu,j}(\beta) \subset D^+_{n-1,l}(\alpha)\}$$

とおく. $n \leq \mu$ より

$${}^*C^-_{\mu,j}(\beta) \subset C^+_{n-1,l}(\alpha)$$

かつ,

$$J_n = \sum_l J_{n,l}$$

となる. 従って

$$\begin{aligned}&\sum_{(\mu,j)\in J_n} \int_{{}^*C^-_{\mu,j}(\beta)} \sqrt{(f(t,x) - a_{C_{n-1,l}(\alpha)})_+}\,dxdt \\ &= \sum_l \sum_{(\mu,j)\in J_{n,l}} \int_{{}^*C^-_{\mu,j}(\beta)} \sqrt{(f(t,x) - a_{C_{n-1,l}(\alpha)})_+}\,dxdt \\ &= \sum_l \int_{\cup_{(\mu,j)\in J_{n,l}} {}^*C^-_{\mu,j}(\beta)} \sqrt{(f(t,x) - a_{C_{n-1,l}(\alpha)})_+}\,dxdt \\ &\leq \sum_l \int_{C^+_{n-1,l}(\alpha)} \sqrt{(f(t,x) - a_{C_{n-1,l}(\alpha)})_+}\,dxdt\end{aligned}$$

となる.

以上より (5.2) と $A=1$ から

$$
\begin{aligned}
(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}-1)\sum_{(\mu,j)\in J_n}|^*C^-_{\mu,j}(\beta)| &\le \sum_l \int_{C^+_{n-1,l}(\alpha)} \sqrt{(f-a_{C_{n-1,k}(\alpha)})^+} \\
&\le \sum_l |C^+_{n-1,l}(\alpha)| = 2\sum_l |D^+_{n-1,l}(\alpha)| \\
&= 2\times 4^{n+2}\sum_l |D^+_{n,l}(\alpha)|
\end{aligned}
$$

となる. (5.8) に代入して

$$
|D(\beta)| \le \frac{128\times 4^{2n}}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}-1}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_l |D^+_{n,l}(\alpha)| \le \frac{128\times 4^{2n}}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}-1}|D(\alpha)|
$$

となる. □

注意 5.7. 定理 5.4 の仮定 (5.2) を, $0<p<1$ を固定して

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|C^+|}\int_{C^+}(f(t,x)-a_C)_+^p\, dtdx \le A \\
\frac{1}{|C^-|}\int_{C^-}(a_C-f(t,x))_+^p\, dtdx \le A
\end{aligned}
$$

に変えると, 今の証明の議論と同様にして, 任意の $\alpha>0$ に対して

$$
\begin{aligned}
|\{(t,x)\in V^+\,;\,(f(t,x)-a_{C_0})_+>\alpha\}| \le Be^{-b(\frac{\alpha}{A})^p}|V^+| \\
|\{(t,x)\in V^-\,;\,(a_{C_0}-f(t,x))_+>\alpha\}| \le Be^{-b(\frac{\alpha}{A})^p}|V^-|
\end{aligned}
$$

が示せる.

系 5.8. 定理 5.4 の仮定の下で, n, A にのみ依る定数 $A'>0$ が存在して, 任意の放物型長方形 $C\subset U$ に対して

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|D^+|}\int_{D^+}(f(t,x)-a_C)_+\, dxdt \le A', \\
\frac{1}{|D^-|}\int_{D^-}(a_C-f(t,x))_+\, dxdt \le A'
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

が成り立つ.

系 5.8 の証明. (5.9) の上の不等式のみ示す. 変数変換と定理 5.4 より

$$
|\{(t,x)\in D^+\,;\,(f(t,x)-a_C)_+>\alpha\}| \le Be^{-b\sqrt{\frac{\alpha}{A}}}|D^+|
$$

が成り立つ. 従って

$$
\frac{1}{|D^+|}\int_{D^+}(f(t,x)-a_C)_+\, dxdt \le B\int_0^{\infty} e^{-b\sqrt{\frac{\alpha}{A}}}\, d\alpha < \infty
$$

となる.

$$A' := B\int_0^\infty e^{-b\sqrt{\frac{\alpha}{A}}}\,d\alpha$$

とおけばよい. $\square$

定理 5.9 (Fabes-Garofalo[**5**])**.** ある定数 $A \geq 0$ が存在して, 任意の放物型長方形に対して, C に依存する定数 a_C が存在して

$$\begin{aligned}\frac{1}{|D^+|}\int_{D^+}(f(t,x)-a_C)_+\,dtdx &\leq A\\ \frac{1}{|D^-|}\int_{D^-}(a_C-f(t,x))_+\,dtdx &\leq A\end{aligned}\tag{5.10}$$

をみたすとする. このとき, 任意の $\alpha > 0$ に対し

$$\begin{aligned}|\{(t,x)\in W^+\,;\,(f(t,x)-a_{C_0})^+ > \alpha\}| &\leq Be^{-b(\frac{\alpha}{A})}|W^+|\\ |\{(t,x)\in W^-\,;\,(a_{C_0}-f(t,x))^+ > \alpha\}| &\leq Be^{-b(\frac{\alpha}{A})}|W^-|\end{aligned}\tag{5.11}$$

が成り立つ. ここで B, b は次元 n にのみ依存する.

定理 5.9 の証明. 定理 5.4 と同じ議論で, $A = 1$, $a_U = 0$ として $\alpha > 1$ に対して

$$|\{(t,x)\in W^+\,;\,f(t,x)_+ > \alpha\}| \leq Be^{-b\sqrt{\alpha}}|W^+| \tag{5.12}$$

を示せばよい.

<u>Selection Process</u> $\beta > 0$ を固定する. $E_0^+ := W^+$ を空間方向に 4^n 等分, 時間方向に 4^2 等分の長方形にわける. 各長方形を $E_{1,j}^+$ とおく. 次に $E_{1,j}^+$ に対応する放物型長方形 $C_{1,j}$ を考える. このとき $\beta \geq a_{C_{1,j}}^+$ のときは, また同様の分割をして $E_{2,j}^+$ を作る. 逆に $\beta < a_{C_{1,j}}^+$ ならば, $E_{1,j}^+$ は操作を終える. 以下, この操作をくりかえす.

このようにして $\{E_{n,j}^+(\beta)\}$ を作り

$$E(\beta) := \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_j E_{n,j}^+(\beta)$$

とおく.

主張 5.5 と同様にして, 次がわかる.

主張 5.10. 任意の $\beta > 0$ に対して

$$f_+(t,x) \leq 1+\beta \quad \text{a.e. } (t,x)\in E_0^+ \setminus E(\beta).$$

主張 5.10 から

$$\{(t,x)\in E_0^+\,;\,f(t,x)\geq(1+\beta)\}\subset E(\beta)$$

がわかる. もし $\beta > 0$ に対して

$$|E(\beta)| \leq Be^{-b\beta}|E_0^+| \tag{5.13}$$

を示せば, $\beta = (\alpha - 1)$ ととることで

$$|\{(t,x) \in E_0^+ \,;\, f(t,x)^+ > \alpha\}| \le |E(\beta)| \le Be^{-b(\alpha-1)}|E_0^+| = Be^b e^{-b\alpha}|W^+|$$

がわかり, (5.12) が示される. (5.13) を示すのに, 次の主張を用いる.

主張 5.11.

$$\beta \ge \alpha + 1 \to |E(\beta)| \le \frac{C}{\beta - \alpha - 1}|E(\alpha)|, \tag{5.14}$$

ただし $C \ge 0$ は n にのみ依存する.

不等式 (5.13) の証明は, (5.4) を主張 5.6 を用いて示す方法と同様である.

主張 5.11 を示すために $E(\alpha)$ について再度考察する. $\{E_{n,j}^+(\alpha)\}$ は互いに交わらない, すなわち共通部分が零集合だが, 対応する $\{D_{n,j}^-(\alpha)\}$ は互いに交わる. すなわち, 共通部分が零集合にならないことがありうる. そこで $\{D_{n,j}^-(\alpha)\}$ から, 次の方法で最大非交叉部分集合族 $\{{}^*D_{n,j}^-\}$ を作る.

Step.1 次をみたす $\{D_{1,j}^-(\alpha)\} \supset \{{}^*D_{1,j}^-(\alpha)\}$ を選ぶ.

- 任意の $D_{1,j}^-(\alpha)$ はある ${}^*D_{1,k}^-(\alpha)$ と交わる.
- $\{{}^*D_{1,j}^-(\alpha)\}$ は互いに交わらない.

Step.2 次をみたす $\{D_{2,j}^-(\alpha)\} \supset \{{}^*D_{2,j}^-(\alpha)\}$ を選ぶ.

- 任意の $D_{2,j}^-(\alpha)$ はある ${}^*D_{1,k}^-(\alpha)$ か ${}^*D_{2,k}^-(\alpha)$ と交わる.
- $\{{}^*D_{1,j}^-(\alpha)\}$ と $\{{}^*D_{2,j}^-(\alpha)\}$ は互いに交わらない.

以下同様にして

Step.n 次をみたす $\{D_{n,j}^-(\alpha)\} \supset \{{}^*D_{n,j}^-(\alpha)\}$ を選ぶ.

- 任意の $D_{n,j}^-(\alpha)$ に対して, ある $\lambda \le n$ が存在して, ある ${}^*D_{\lambda,k}^-(\alpha)$ と交わる.
- $\lambda \le n$ に対して $\{{}^*D_{\lambda,j}^-(\alpha)\}$ は互いに交わらない.

さて $0 < \alpha < \beta$ に対して, $\{E_{n,j}^+(\alpha)\}$ と $\{E_{n,j}^+(\beta)\}$ を Selection Process によって構成する. 次に $\{{}^*D_{n,j}^-(\beta)\}$ を $\{D_{n,j}^-(\beta)\}$ の最大非交叉部分集合族とする.

まず, $\{E_{n,j}^+(\beta)\}$ は互いに交わらないから

$$|E(\beta)| = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_j |E_{n,j}^+(\beta)|$$

となる. 次に $\mu \ge 1$ に対して

$$\begin{aligned} I_\mu := \{(n,j)\,;\, & D_{n,j}^-(\beta) \text{ はある}{}^*D_{\mu,k}^-(\beta) \text{ と交わり},\\ & \text{任意の}\lambda < \mu\text{に対して, どの}{}^*D_{\lambda,k}^-(\beta) \text{ とも交わらない}\,\} \end{aligned}$$

とおく. $\{{}^*D_{n,j}^-(\beta)\}$ が最大非交叉部分集合族だから

$$|E(\beta)| = \sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{(n,j)\in I_\mu} |E_{n,j}^+(\beta)|$$

となる.

$(n,j)\in I_\mu$ に対し, $D^-_{n,j}(\beta)$ の各辺の長さよりも, $D^-_{n,j}(\beta)$ に交わる ${}^*D^-_{\mu,k}(\beta)$ の各辺の長さの方が長いから

$$E^+_{n,j}(\beta)\subset 4D^-_{n,j}(\beta)\subset 8{}^*D^-_{\mu,k}(\beta)$$

が成り立つ. ここで $4D^-_{n,j}(\beta)$ は $D^-_{n,j}(\beta)$ の各辺を 4 倍したもの, $8{}^*D^-_{\mu,k}(\beta)$ は ${}^*D^-_{\mu,k}(\beta)$ の各辺を 8 倍したものである. 従って

$$\bigcup_{(n,j)\in I_\mu} E^+_{n,j}(\beta)\subset\bigcup_j 8{}^*D^-_{\mu,j}(\beta)$$

となるから

$$|E(\beta)|\le 8^{n+1}\sum_{\mu=1}^\infty\sum_j|{}^*D^-_{\mu,j}(\beta)|$$

となる.

さらに $\beta>\alpha$ と $\mu>0$ に対し, $\nu\le\mu$ と k が存在して $E^+_{\mu,j}(\beta)\subset E^+_{\nu,k}(\alpha)$ とできるから

$$|E(\beta)|\le 8^{n+1}\sum_{n=1}^\infty\sum_{(\mu,j)\in J_n}|{}^*D^-_{\mu,j}(\beta)| \tag{5.15}$$

とできる. ここで

$$J_n:=\{(\mu,j)\,;\ \text{ある } k \text{ が存在して } E^+_{\mu,j}(\beta)\subset E^+_{n,k}(\alpha)\}$$

である.

今, $(\mu,j)\in J_n$ に対して

$$\begin{aligned}\beta&<(a_{{}^*C_{\mu,j}(\beta)})_+\\&\le\frac{1}{|{}^*D^-_{\mu,j}(\beta)|}\int_{{}^*D^-_{\mu,j}(\beta)}(a_{{}^*C_{\mu,j}(\beta)}-f(t,x))_+\,dxdt+\frac{1}{|{}^*D^-_{\mu,j}(\beta)|}\int_{{}^*D^-_{\mu,j}(\beta)}f_+(t,x)\,dxdt\end{aligned}$$

より (5.10) と $A=1$ から

$$(\beta-1)|{}^*D^-_{\mu,j}(\beta)|\le\int_{{}^*D^-_{\mu,j}(\beta)}f_+(t,x)\,dxdt$$

となるので

$$(\beta-1)\sum_{(\mu,j)\in J_n}|{}^*D^-_{\mu,j}(\beta)|\le\sum_{(\mu,j)\in J_n}\int_{{}^*D^-_{\mu,j}(\beta)}f_+(t,x)\,dxdt$$

となる.

$(\mu,j)\in J_n$ ならば, k,l が存在して $E^+_{\mu,j}(\beta)\subset E^+_{n,k}(\alpha)\subset E^+_{n-1,l}(\alpha)$ かつ $a_{C_{n-1,l}(\alpha)}\le\alpha$ とできる. 従って

$$\int_{{}^*D^-_{\mu,j}(\beta)}f_+(t,x)\,dxdt\le\int_{{}^*D^-_{\mu,j}(\beta)}(f(t,x)-a_{C_{n-1,l}(\alpha)})_+\,dxdt+\alpha|{}^*D^-_{\mu,j}(\beta)|$$

となる. 次に

$$J_{n,l}:=\{(\mu,j)\,;\ E^+_{\mu,j}(\beta)\subset E^+_{n-1,l}(\alpha)\}$$

とおく. $n\le\mu$ より

$${}^*D^-_{\mu,j}(\beta)\subset D^+_{n-1,l}(\alpha)$$

かつ,

$$J_n = \sum_l J_{n,l}$$

となる. 従って

$$\begin{aligned}
&\sum_{(\mu,j)\in J_n} \int_{{}^*D^-_{\mu,j}(\beta)} (f(t,x) - a_{C_{n-1,l}(\alpha)})_+ \, dxdt \\
&= \sum_l \sum_{(\mu,j)\in J_{n,l}} \int_{{}^*D^-_{\mu,j}(\beta)} (f(t,x) - a_{C_{n-1,l}(\alpha)})_+ \, dxdt \\
&= \sum_l \int_{\cup_{(\mu,j)\in J_{n,l}} {}^*D^-_{\mu,j}(\beta)} (f(t,x) - a_{C_{n-1,l}(\alpha)})_+ \, dxdt \\
&\leq \sum_l \int_{D^+_{n-1,l}(\alpha)} (f(t,x) - a_{C_{n-1,l}(\alpha)})_+ \, dxdt
\end{aligned}$$

となる.

以上より (5.10) と $A=1$ から

$$\begin{aligned}
(\beta - \alpha - 1) \sum_{(\mu,j)\in J_n} |{}^*D^-_{\mu,j}(\beta)| &\leq \sum_l \int_{D^+_{n-1,l}(\alpha)} (f - a_{C_{n-1,k}(\alpha)})^+ \\
&\leq \sum_l |D^+_{n-1,l}(\alpha)| = 2 \sum_l |E^+_{n-1,l}(\alpha)| \\
&= 2 \times 4^{n+2} \sum_l |E^+_{n,l}(\alpha)|
\end{aligned}$$

となる. (5.15) に代入して

$$|E(\beta)| \leq \frac{256 \times 32^n}{\beta - \alpha - 1} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_l |E^+_{n,l}(\alpha)| \leq \frac{256 \times 32^n}{\beta - \alpha - 1} |E(\alpha)|$$

となる. □

定理 5.3 の証明. $p_0 < \frac{b}{A}$ とおく. 定理 5.9 と Fubini の定理を用いて

$$\begin{aligned}
\int_{W^+} e^{p_0 f(t,x)} \, dxdt &\leq e^{p_0 a_U} \int_{W^+} e^{p_0 (f(t,x) - a_U)_+} \, dxdt \\
&= e^{p_0 a_U} \int_{W^+} p_0 \left(\int_0^{(f(t,x)-a_U)_+} e^{p_0 \alpha} \, d\alpha + 1 \right) dxdt \\
&= e^{p_0 a_U} \left(p_0 \int_0^{\infty} e^{p_0 \alpha} \int_{W^+} \chi_{\{\beta\,;\,(f(t,x)-a_U)_+ > \beta\}}(\alpha) \, dxdtd\alpha + |W^+| \right) \\
&\leq e^{p_0 a_U} \left(p_0 \int_0^{\infty} e^{p_0 \alpha} (B e^{-\frac{b}{A}\alpha}) \, d\alpha + 1 \right) |W^+| \\
&= e^{p_0 a_U} \left(p_0 B \int_0^{\infty} e^{(p_0 - \frac{b}{A})\alpha} \, d\alpha + 1 \right) |W^+|
\end{aligned}$$

となる. 同様にして

$$\int_{W^-} e^{-p_0 f(t,x)}\,dxdt \le e^{-p_0 a_U} \int_{W^+} e^{p_0(a_U - f(t,x))_+}\,dxdt$$
$$\le e^{-p_0 a_U}\left(p_0 B \int_0^\infty e^{(p_0 - \frac{b}{A})\alpha}\,d\alpha + 1\right)|W^-|$$

となる. 従って

$$\int_{W^+} e^{p_0 f(t,x)}\,dxdt \int_{W^-} e^{-p_0 f(t,x)}\,dxdt \le \left(p_0 B \int_0^\infty e^{(p_0 - \frac{b}{A})\alpha}\,d\alpha + 1\right)^2 |W^+||W^-|$$

が従う. □

6. 謝辞

最後に, この修士論文の作成にあたり, 様々な御指導, 御助言を与えてくださった, 指導教員である小川卓克先生に深く感謝申し上げます. さらに, 東北大学の中村誠先生, 石渡通徳先生, 埼玉大学の太田雅人先生, 福岡教育大学の瀬片純市先生にも, 多くのお力添えを頂き, 心より感謝致します. また, 東北大学応用数学セミナーの諸先生方々, 諸先輩方々, お世話になった方々にこの場を借りて御礼申し上げます.

参考文献

[1] G. Barles and C. Georgelin, *A simple proof of convergence for an approximation scheme for computing motions by mean curvature*, SIAM J. Numer. Anal. **32** (1995), 484–500.

[2] T. Cazenave and A. Haraux, “An Introduction to Semilinear Evolution Equations,” Clarendon, 1998.

[3] L. C. Evans, *Convergence of an algorithm for mean curvature motion*, Indiana Univ. Math. J. **42** (1993), 533–557.

[4] L. C. Evans, “Partial Differential Equations,” American Mathematical Society, 1998.

[5] E. B. Fabes and N. Garofalo, *Parabolic B.M.O. and Harnack's inequality*, Proc. Amer. Math. Soc. **95** (1985), 63–69.

[6] 儀我 美一 , 儀我 美保, 「非線形偏微分方程式 –解の漸近挙動と自己相似解–」, 共立出版, 1999.

[7] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, “Elliptic partial differetial equations of second order,” Reprint of the 1998 edition, Springer-Verlag, 2001.

[8] 後藤 俊一, 「平均曲率流方程式の数値解析 –BMO Algorithm–」, 数理解析講究録, **1045** (1998), 53–57.

[9] 後藤 陽子, 「平均曲率流方程式に対する Bence-Merriman-Osher 型近似アルゴリズムについて」, 九州大学修士論文, 2002.

[10] Y. Goto, K. Ishii and T. Ogawa, *Method of the distance function to the Bence-Merriman-Osher algorithm for motion by mean curvature*, Commun. Pure Appl. Anal. **4** (2005), 311–339.

[11] H. Ishii, *A Generalization of the Bence-Merriman and Osher algorithm for motion by mean curvature*, in “Curvature flows and related topics,” GAKUTO International Series, 1995.

[12] H. Ishii and K. Ishii, *An approximation scheme for motion by mean curvature with right-angle boundary condition*, SIAM J. Math. Anal. **33** (2001), 369–389.

[13] 工藤 賢一, 「退化放物型偏微分方程式に対する Harnack の不等式について」, 九州大学修士論文, 2004.

[14] E. H. Lieb and M. Loss, “Analysis,” second edition, American Mathematical Society, 2001.

[15] G. M. Lieberman, “Second order parabolic differential equations,” World Scientific, 1996.

[16] J. Moser, *A Harnack inequality for parabolic differential equations*, Comm. Pure. Appl. Math., **17** (1964), 101–134.

[17] J. Moser, *On a pointwise estimate for parabolic differential equations*, Comm. Pure. Appl. Math., **24** (1971), 727–740.

[18] O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov and N. N. Ural'ceva, “Linear and quasilinear equations of parabolic type,” Translations of Mathematical Monographs **25**, American Mathematical Society, 1978.

[19] N. S. Trudinger, *Pointwise estimates and quasilinear parabolic equations*, Comm. Pure Appl. Math., **21** (1968), 205–226.