退化準線型放物型方程式に対する正則性評価について

東北大学大学院 理学研究科 M2 水野 将司

1. 序

次の非線型放物型方程式の初期値, 境界値問題

$$(\mathrm{NP}_\varepsilon) \qquad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \dfrac{u}{\varepsilon}(|\nabla u|^2 - 1) = 0 & \text{in } (0,T)\times\Omega, \\ u = 0 & \text{on } (0,T)\times\partial\Omega, \\ u(0) = u_0 & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

について考察する. ここで, Ω は滑らかな境界をもつ $\mathbb{R}^N$ の有界領域とし, $T>0$ とする. また, Δ は空間変数における Laplacian, $\varepsilon>0$ はパラメータとする.

$(\mathrm{NP}_\varepsilon)$ の解 u_ε は $\varepsilon\to 0$ とすると次の平均曲率流方程式

$$\partial_t u - \Delta u + \frac{1}{|\nabla u|^2}\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \quad \text{in } (0,T)\times\Omega$$

のある近似アルゴリズムに現れる方程式であることがわかっている (c.f. Goto, Ishii and Ogawa [2]). 平均曲率流方程式は非発散型の退化放物型方程式であって, 超関数の枠組みによる解析的な取り扱いは困難である. この方程式を解析するために, 近似方程式 $(\mathrm{NP}_\varepsilon)$ を考えて, $\varepsilon\to 0$ の解析を行うことにより, 元の平均曲率流方程式の解の挙動を知る手がかりとなりうる.

この報告では $(\mathrm{NP}_\varepsilon)$ に関する Harnack 不等式について考える. $(\mathrm{NP}_\varepsilon)$ の非負値解 u_ε と $0<t_1<t_2<t_3<t_4\le T$ と $\Omega' \subset\subset \Omega$ に対して

$$(\mathrm{HI}) \qquad \sup_{(t_1,t_2)\times\Omega'} u_\varepsilon \le C \inf_{(t_3,t_4)\times\Omega'} u_\varepsilon$$

なる不等式を Harnack 不等式という. ここで C は $N, t_1, \dots, t_4, \mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega), \varepsilon$ に依存する定数である. 以下, この定数を Harnack 定数と呼ぶことにする.

係数が滑らかでない, 線型発散型一様放物型方程式に対する Harnack 不等式は 1964 年に Moser [5] によって示された. ここで, 一様放物型であるとは, 主要部の係数行列の最小固有値と最大固有値の比が有界であることをいう. 線型の放物型方程式に対しては, Harnack 不等式から解の内部正則性, 特に局所 Hölder 連続性を示すことができる. Harnack 定数は Hölder 連続性の次数と関係があり, Harnack 定数がより小さくとれれば, Hölder 連続性の次数 α はより大きくとれることがわかっている. また, Harnack 不等式 (HI) において, $\inf u_\varepsilon$ が正の値となる場合には, 両辺を $\inf u_\varepsilon$ で割ると

$$\frac{\sup_{(t_1,t_2)\times\Omega'} u_\varepsilon}{\inf_{(t_3,t_4)\times\Omega'} u_\varepsilon} \le C$$

となる. この不等式は $(t_1,t_2)\times\Omega'$ 上での解の最大値と $(t_3,t_4)\times\Omega'$ 上での解の最小値の比が Harnack 定数 C で抑えられているという意味を持っている. つまり, Harnack 定数 C によって, 解の形状がある程度決まってしまうということになる.

非線型方程式に対しても, Harnack 定数が解の形状に関する情報を与える. また線型方程式に対して Harnack 定数が解の滑らかさに関する情報を与えていることから, 非線型方

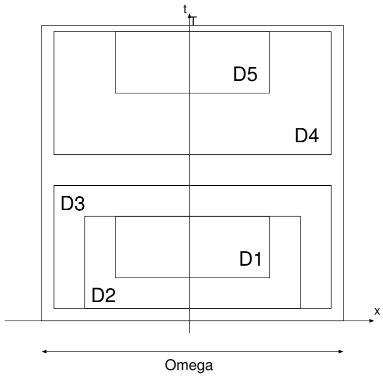

Figure 1. Harnack 不等式における領域

程式に対しても Harnack 定数が解の滑らかさに関する情報を持っていると推測することができる. このことから Harnack 定数を評価することは興味ある問題であると考えられる. また, 非線型方程式 $(\mathrm{NP}_\varepsilon)$ は小さいパラメータ $\varepsilon > 0$ を考えることによる, 非線型項の係数が大きいということと, $|\nabla u|^2$ の効果が Δu の効果とつりあってしまうということ (このような方程式を臨界型方程式という) の二つの意味で強い非線型項だと考えることができる. このような強い非線型項を持つ方程式に対して, どれだけの正則性が期待できるかを調べることは興味ある問題だと考えられる. $(\mathrm{NP}_\varepsilon)$ は $\varepsilon \to 0$ としたときに平均曲率流方程式の近似方程式となっていることから, Harnack 定数と ε との関係を調べることが問題になる.

まず, Harnack 不等式の証明の手法について, 簡単に説明する. そのために $p \neq 0$, $D \subset \Omega_T$ に対して次の記号を導入する:

$$\Phi_u(p, D) := \left(\iint_D |u|^p \ dxdt \right)^{1/p}.$$

Trudinger [7] の手法を改良すると, $(\mathrm{NP}_\varepsilon)$ の非負値解 u に対し, $0 < q < 2$ がとれて

$$\sup_{D_1} u \le C_1 \Phi_u(2, D_2) \le C_2 \Phi_u(q, D_3) \le C_3 \Phi_u(-q, D_4) \le C_4 \inf_{D_5} u \tag{1}$$

が成り立つことがわかる. ここで, 領域 $D_1, \dots, D_5$ については Figure 1 を参照せよ (正確な定義は, ここでは省略する). Figure 1 は時間を縦軸, 空間を横軸に書いた時空間の図である. また C_1 から C_4 は定数である. (1) から, $C_1, \dots, C_4$ の ε に関する評価が得られれば, Harnack 定数の ε に対する評価がわかる. 今回, (1) の最後の不等式に対する Harnack 定数と ε の関係について評価を得ることができた.

定理を述べるために記号を用意する. $B_R(x)$ を中心が x, 半径が R の N 次元開球とする. すなわち,

$$B_R(x) := \{ y \in \mathbb{R}^N \, ; \, |x - y| < R \}$$

とおく.

定理 1 (Weak Harnack Type Inequality)**.**
$0 \le u_\varepsilon \le M$ を $(\mathrm{NP}_\varepsilon)$ の弱解とする. このとき, $\tau > 0$ と $B_R(x) \subset\subset \Omega$, $p > 0$ に対して, M と p のみに依存する定数 $\xi \ge M$ が存在して次の評価が成り立つ:

$$\left(\int_0^T \int_\Omega |u_\varepsilon|^{-p} \ dtdx \right)^{-1/p} \le C_1 C_2 \inf_{(\tau, T) \times B_R} u_\varepsilon,$$

ここで $C_1 > 0$ は N , p , $\tau, \mathrm{dist}(\partial\Omega, B_R(x))$ にのみ依る定数であり, C_2 は次で与えられる :

$$C_2 := \exp\left(\frac{M\xi(N+2)}{2p\varepsilon}\right).$$

$\varepsilon \to 0$ としたとき, Harnack 定数が指数増大する要因は非線型項 $|\nabla u|^2$ の指数が 2 となっていることである. この指数が 2 より真に小さい時は, 多項式増大で抑えられることがわかっている. このことから, $|\nabla u|^2$ を評価することを考える. そのために $(\mathrm{NP}_\varepsilon)$ を x_i 方向に微分して, $2\partial u/\partial x_i$ をかけて i について和を取ると, $w := |\nabla u|^2$ とおいて

$$\partial_t w - \left(\Delta w - 2\sum_{i,j=1}^{N}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)^2\right) + \frac{2w}{\varepsilon}(w-1) + \frac{2u}{\varepsilon}\nabla u \cdot \nabla w = 0 \tag{2}$$

が得られる. この方程式に対して, Lieberman [4] を参考にして次の評価を得た.

定理 2.
u_ε を $(\mathrm{NP}_\varepsilon)$ の有界な解とする. このとき, $w_\varepsilon = |\nabla u_\varepsilon|^2$ とおくと, $\lambda < 0$ に対して

$$\sup_{\Omega_T}(w_\varepsilon - 1) \le e^{-\lambda T} \sup_{\mathcal{P}\Omega_T}(w_\varepsilon - 1)_+$$

が成り立つ. ここで $\mathcal{P}\Omega_T := ([0,T] \times \partial\Omega) \cup (\{t=0\} \times \Omega)$ である.

定理 2 の証明は (2) から w が

$$\partial_t w - \Delta w + \frac{2w}{\varepsilon}(w-1) - \frac{2M}{\varepsilon} w^{1/2} |\nabla w| \le 0$$

を満たしていることを用いて, $\lambda < 0$ に対して $e^{\lambda t}(w-1)$ の最大値を評価することによる.
定理 2 から $(\mathrm{NP}_\varepsilon)$ の解 u_ε が $\mathcal{P}\Omega_T$ 上で $|\nabla u_\varepsilon| \le 1$ となれば, Harnack 定数のより精密な評価を得ることができる. 定理 2 より Ω_T 上で $|\nabla u_\varepsilon| \le 1$ だから

$$\partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon \ge 0$$

となる. すなわち, 熱方程式の優解となる. 熱方程式に対して Moser [5] の手法を用いることで,

$$\Phi_{u_\varepsilon}(2, D_2) \le C \inf_{D_5} u_\varepsilon$$

を示すことができる. ここで定数 C が ε に依らないで取れることに注意する. さらに

$$\sup_{D_1} u_\varepsilon \le C\Phi_{u_\varepsilon}(2, D_2) \tag{3}$$

に対しては, C が $|\nabla u_\varepsilon|^2$ の影響をうけずに評価できる. 正確には u_ε が

$$\partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon - \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} \le 0$$

をみたすことから (3) が得られる. このとき, $C = O(\varepsilon^{-(N+2)/2})$ $(\varepsilon \to 0)$ となることが Moser の手法を用いることで計算できて, Harnack 定数の $\varepsilon \to 0$ に関する増大度を多項式程度に抑えることができる.

2. 定理 1 の証明

以下, 定理 1 の証明の概略を述べる. $R' \geq R$ に対して, $\Omega = B_{R'} := B_{R'}(0)$, $x = 0$ で考えても, 証明の本質は失われないので, 以下では $\Omega = B_{R'}$, $x = 0$ で証明する. また $u = u_\varepsilon$ と略記し, $u > 0$ で示す ($u \geq 0$ に対しては, $\gamma > 0$ に対して $u + \gamma > 0$ を考えて $\gamma \to 0$ とすればよい). η を滑らかな時空間の cut-off 関数とする. test 関数として $\beta < -1$ に対して $\phi = \eta^2 e^{-b_0 u} u^\beta$, $b_0 = M/\varepsilon$ を (NP$_\varepsilon$) に掛けて部分積分すると

$$\nabla\phi = 2\eta e^{-b_0 u} u^\beta \nabla\eta + \eta^2 e^{-b_0 u} (\beta u^{\beta-1} - \frac{M}{\varepsilon} u^\beta) |\nabla u|^2$$

だから, 任意の $0 \leq t_1 < t_2 \leq T$ に対して

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_{R'}} \eta^2 e^{-b_0 u} u^\beta \partial_t u \, dxdt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{B_{R'}} \eta^2 e^{-b_0 u} (\beta u^{\beta-1} - \frac{M}{\varepsilon} u^\beta) |\nabla u|^2 \, dxdt \\ = -2 \int_{t_1}^{t_2}\int_{B_{R'}} \eta e^{-b_0 u} u^\beta \nabla\eta \cdot \nabla u \, dxdt - \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2}\int_{B_{R'}} \eta^2 e^{-b_0 u} u^{\beta+1} (|\nabla u|^2 - 1) \, dxdt,\end{aligned}$$

となる. 両辺 (-1) 倍して右辺の最後の項は非正値なので落とす. さらに $u \leq M$ を用いて

$$\begin{aligned}- \int_{t_1}^{t_2}\int_{B_{R'}} \eta^2 e^{-b_0 u} u^\beta \partial_t u \, dxdt - \int_{t_1}^{t_2}\int_{B_{R'}} \eta^2 e^{-b_0 u} (\beta u^{\beta-1} - \frac{M}{\varepsilon} u^\beta) |\nabla u|^2 \, dxdt \\ \leq 2 \int_{t_1}^{t_2}\int_{B_{R'}} \eta e^{-b_0 u} u^\beta \nabla\eta \cdot \nabla u \, dxdt + \frac{M}{\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2}\int_{B_{R'}} \eta^2 e^{-b_0 u} u^\beta |\nabla u|^2 \, dxdt.\end{aligned}$$

$\frac{M}{\varepsilon} \int_{t_1}^{t_2}\int_{B_R} \eta^2 e^{-b_0 u} u^\beta |\nabla u|^2 \, dxdt$ は両辺キャンセルできる. また右辺第一項は Schwarz の不等式と Young の不等式を用いて左辺に吸収させて

$$\begin{aligned}- \int_{t_1}^{t_2}\int_{B_{R'}} \eta^2 e^{-b_0 u} u^\beta \partial_t u \, dxdt - \frac{\beta}{2} \int_{t_1}^{t_2}\int_{B_{R'}} \eta^2 e^{-b_0 u} u^{\beta-1} |\nabla u|^2 \, dxdt \\ \leq -\frac{2}{\beta} \int_{t_1}^{t_2}\int_{B_{R'}} e^{-b_0 u} u^{\beta+1} |\nabla\eta|^2 \, dxdt\end{aligned}$$

となる. 次に

$$f(u) := -(\beta+1) \int_u^\infty e^{-b_0 s} s^\beta \, ds$$

とおくと

$$0 \leq \exists\xi_M < \infty \text{ s.t. } \partial_t f(u) = (\beta+1) e^{-b_0 u} u^\beta \partial_t u \, , \, e^{-b_0 \xi_M} u^{\beta+1} \leq f(u) \leq u^{\beta+1}$$

とできる. 従って $0 < u \leq M$ を用いて

$$\begin{aligned}- \frac{1}{\beta+1} \int_{t_1}^{t_2}\int_{B_{R'}} \eta^2 \partial_t f(u) \, dxdt - \frac{\beta}{2} e^{-b_0 M} \int_{t_1}^{t_2}\int_{B_{R'}} \eta^2 u^{\beta-1} |\nabla u|^2 \, dxdt \\ \leq -\frac{2}{\beta} \int_{t_1}^{t_2}\int_{B_{R'}} u^{\beta+1} |\nabla\eta|^2 \, dxdt\end{aligned}$$

となるから

$$-\frac{1}{\beta+1}\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_{R'}}\partial_t(\eta^2 f(u))\,dxdt-\frac{\beta}{2}e^{-b_0M}\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_{R'}}\eta^2u^{\beta-1}|\nabla u|^2\,dxdt$$
$$\leq -\frac{2}{\beta}\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_{R'}}u^{\beta+1}|\nabla\eta|^2\,dxdt-\frac{2}{\beta+1}\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_{R'}}\eta|\partial_t\eta|f(u)\,dxdt$$
$$\leq -\frac{2}{\beta}\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_{R'}}u^{\beta+1}|\nabla\eta|^2\,dxdt-\frac{2}{\beta+1}\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_{R'}}\eta|\partial_t\eta|u^{\beta+1}\,dxdt.$$

$0<\tau_j<\tau_{j+1}<\tau$, $R<R_{j+1}<R_j<R'$ を固定して, η を $\eta(t,x)=\eta_1(t)\eta_2(|x|)$ と変数分離して, 次により定める:

$$\begin{cases}\eta_1(t)=1 & (\tau_{j+1}<t<T)\\ 0\leq\eta_1(t)\leq 1 & ((\tau_j+\tau_{j+1})/2<t<\tau_{j+1})\\ \eta_1(t)=0 & (0<t<(\tau_j+\tau_{j+1})/2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\eta_2(r)=1 & (0<r<R_{j+1})\\ 0\leq\eta_2(r)\leq 1 & (R_{j+1}<r<(R_{j+1}+R_j)/2)\;.\\ \eta_2(r)=0 & ((R_{j+1}+R_j)/2<r<R')\end{cases}$$

さらに $|\partial_t\eta_1|\leq 4/(\tau_{j+1}-\tau_j)$ かつ $|\partial_r\eta_2|\leq 4/(R_j-R_{j+1})$ なるように取ると

$$\sup_{(\tau_{j+1},T)}\int_{B_{R_{j+1}}}f(u)\,dx\leq C\delta_j\int_{\tau_j}^{T}\int_{B_{R_j}}u^{\beta+1}\,dxdt$$
$$\int_{\tau_{j+1}}^{T}\int_{B_{R_{j+1}}}|\nabla u^{(\beta+1)/2}|^2\,dxdt\leq Ce^{b_0M}\delta_j\int_{\tau_j}^{T}\int_{B_{R_j}}u^{\beta+1}\,dxdt,$$

但し C は N のみに依存して

$$\delta_j:=\frac{1}{\tau_j-\tau_{j+1}}+\frac{1}{(R_j-R_{j+1})^2}.$$

$f(u)$ の下からの評価から

$$\sup_{(\tau_{j+1},T)}\int_{B_{R_{j+1}}}u^{\beta+1}\,dx\leq Ce^{b_0\xi_M}\delta_j\int_{\tau_j}^{T}\int_{B_{R_j}}u^{\beta+1}\,dxdt.$$

ここで $j\in\mathbb{N}$ に対し

$$\tau_j:=(1-2^{-j})\tau\;,\;R_j:=R+2^{-j}(R'-R)$$
$$D_j:=((\tau_j,T)\times B_{R_j})\;,\;\beta+1=-p\alpha_j=-p\left(1+\frac{2}{N}\right)^j$$

とおくと

$$\|u^{-p\alpha_j/2}\|^2_{L^2((\tau_j,T);H^1_0(B_{R_j}))\cap L^\infty((\tau_j,T);L^2(B_{R_j}))}\leq Ce^{b_0\xi_M}\delta_j\|u^{-p\alpha_j/2}\|^2_{L^2(D_j)}$$

となる. ただし, 区間 $I\subset\mathbb{R}$, 有界領域 $\Omega'\subset\mathbb{R}^N$ に対し

$$\|v\|^2_{L^2(I;H^1_0(\Omega'))\cap L^\infty(I;L^2(\Omega'))}=\|v\|^2_{L^2(I;H^1_0(\Omega'))}+\|v\|^2_{L^\infty(I;L^2(\Omega'))}$$

とおいた.

ここで, 次の Ladyženskaja の不等式を用いる.

補題 3 (Ladyženskaja の不等式)**.**
$v \in L^2(I; H_0^1(\Omega')) \cap L^\infty(I; L^2(\Omega'))$ とする．このとき $u \in L^{2(1+2/N)}(I \times \Omega')$ となり, 埋め込みは連続となる．すなわち,

$$\|v\|_{L^{2(1+2/N)}(I\times\Omega')} \le C\|v\|_{L^2(I;H_0^1(\Omega'))\cap L^\infty(I;L^2(\Omega'))},$$

が成り立つ．ここで定数 C は $N \ge 3$ のときは次元 N にのみ依存する．$N = 1, 2$ の時は次元 N と $I \times \Omega'$ にのみ依存する．

証明は Aronson and Serrin [1] を参照されたい．この不等式の本質的なところは $u \in V(I \times \Omega')$ ならば, u の時空間における可積分性が, 2 乗より大きくなるところにある．

さて, Ladyženskaja の不等式により, u^{-p} に対して逆 Hölder 不等式と呼ばれる, 指数の大きいノルムを指数の小さいノルムで抑える不等式

$$\|u^{-p}\|^{\alpha_j}_{L^{\alpha_{j+1}}(D_{j+1})} \le Ce^{b_0\xi_M}\delta_j\|u^{-p}\|^{\alpha_j}_{L^{\alpha_j}(D_j)} \tag{4}$$

が得られる．任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して, $(\tau, T) \times B_R \subset D_k$ に注意して, (4) を繰り返し使うと

$$\begin{aligned}\|u^{-p}\|_{L^{\alpha_k}((\tau,T)\times B_R)} &\le \prod_{j=0}^{\infty} C^{1/\alpha_j} e^{b_0\xi_M/\alpha_j}\delta_j^{1/\alpha_j}\|u^{-p}\|_{L^1((0,T)\times B_{R'})} \\ &\le Ce^{b_0\xi_M(N+2)/2}\left(\frac{1}{(R'-R)^2}+\frac{1}{\tau}\right)^{(N+2)/2} 2^{2\sum\frac{j+1}{\alpha_j}}\|u^{-pk}\|_{L^1((0,T)\times B_{R'})}\end{aligned}$$

$k \to \infty$ として

$$\sup_{(\tau,T)\times B_R} u^{-p} \le Ce^{b_0\xi_M(N+2)/2}\left(\frac{1}{(R-R')^2}+\frac{1}{\tau-\tau'}\right)^{(N+2)/2} 2^{2\sum\frac{j+1}{\alpha_j}}\|u^{-p}\|_{L^1((0,T)\times B_{R'})}$$

両辺 $-p$ 乗根を取ることにより

$$\inf_{(\tau,T)\times B_R} u \ge C^{-1/p}e^{-b_0\xi_M(N+2)/2p}\left(\frac{1}{(R-R')^2}+\frac{1}{\tau-\tau'}\right)^{-(N+2)/2p}\Phi_u(-p,(0,T)\times B'_R)$$

がわかる．

References

[1] D. G. Aronson and J. Serrin, *Local behavior of solutions of quasilinear parabolic equations*, Arch. Ration. Mech. Math. **25**(1967), 81-122.

[2] Y. Goto, K. Ishii and T. Ogawa, *Method of the distance function to the Bence-Merriman-Osher algorithm for motion by mean curvature*, Commun. Pure Appl. Anal. **4**(2005), 311-339.

[3] D. Gilberg and N. S. Trudinger, "*Elliptic partial differetial equations of second order*," Springer-Verlag, (2001) Reprint of the 1998 edition.

[4] G. M. Lieberman, "*Second order parabolic differential equations*," World Scientific, 1996.

[5] J. Moser, *A Harnack inequality for parabolic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. **17**(1964), 101-134.

[6] J. Moser, *On a pointwise estimate for parabolic differential equations*, Comm. Pure. Appl. Math. **24**(1971), 727-740.

[7] N. S. Trudinger, *Pointwise estimates and quasilinear parabolic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **21**(1968), 205-226.

E-mail address: sa5m16@math.tohoku.ac.jp