ある半線形放物型方程式の解に対する正則性評価について

水野 将司 (東北大学大学院 理学研究科 D1)

1. 序

次の非線形放物型方程式の初期値問題を考える:

$$(1)\qquad \begin{cases} \partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon + \dfrac{u_\varepsilon}{\varepsilon}(|\nabla u_\varepsilon|^2 - 1) = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ u_\varepsilon(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

ここで, $n \geq 2$, $u_\varepsilon = u_\varepsilon(t,x)$ は未知関数, $u_0 = u_0(x)$ は既知関数とし, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ とする.

1.1. 平均曲率流方程式と BMO アルゴリズム.

$\{\Gamma_t\}_{t\geq 0}$ を $\mathbb{R}^n$ 上の閉曲面の族とし, 次の平均曲率流方程式をみたすとする:

$$(2)\qquad V(x) = \kappa(x)\nu(x), \quad t>0,\ x\in\Gamma_t,$$

ここで, $V(x), \nu(x), \kappa(x)$ はそれぞれ $x \in \Gamma_t$ における外向き法線速度ベクトル, 外向き単位法線ベクトル, 平均曲率とする. Bence-Merriman-Osher [2] は $\{\Gamma_t\}_{t\geq 0}$ を, 熱方程式を用いた簡明な手法により, 数値計算する手法を提唱した. 以下, この手法を BMO アルゴリズムと呼ぶことにするが, その手法は次のようなものである.

$A \subset \mathbb{R}^n$ に対し, $\chi_A = \chi_A(x)$ を A 上の特性関数とする. パラメータ $0 < h \ll 1$ を固定し, 初期曲面 Γ_0 が囲う領域を C_0 とおき, $v_0(x) = \chi_{C_0}(x) - \chi_{\mathbb{R}^n\setminus C_0}(x)$ を初期値とする熱方程式を考える.

$$(3)\qquad \begin{cases} \partial_t v_h - \Delta v_h = 0, \quad (t,x)\in(0,h]\times\mathbb{R}^n, \\ v_h(0,x) = \chi_{C_0}(x) - \chi_{\mathbb{R}^n\setminus C_0}(x) = \begin{cases} 1, & x\in C_0, \\ -1, & x\in\mathbb{R}^n\setminus C_0. \end{cases} \end{cases}$$

C_0 に対し (3) の解 u_h の $t = h$ に対する 0-upper level set $\{x\in\mathbb{R}^n\,; v_h(t,x)\geq 0\}$ を対応させる写像を $\mathcal{H}_h$ とおく:

$$\mathcal{H}_h C_0 := \{x\in\mathbb{R}^n\,; v_h(t,x)\geq 0\}.$$

$C_1^h := \mathcal{H}_h C_0$ とおき, (3) の C_0 を C_1 にとりかえて, 初期時刻を h とする熱方程式を再び解き, 解の 0-upper level set を考える. この操作を繰り返す, すなわち

$$C_k^h := \underbrace{\mathcal{H}_h \ldots \mathcal{H}_h}_{k\text{ 個}} C_0$$

とおく. さらに

$$\Gamma_t^h := \partial C_k^h = \{x\in\mathbb{R}^n\,; v_h(kh,x) = 0\} \quad \text{if} \quad kh < t \leq (k+1)h$$

とおく. このとき, $h\downarrow 0$ とすることにより, Γ_t^h が (2) の解 Γ_t の近似となっていることがわかる. BMO アルゴリズムの理論的収束性については, Evans [3] の非線形半群を用いた証明や, Barles-Georgelin [1] の粘性解を用いた証明が知られている. また, H. Ishii [5] は BMO アルゴリズムで熱核を一般の球対称関数に拡張し, H. Ishii-K. Ishii [6] は境界直交条件に対する BMO アルゴリズムの収束性を示している.

1.2. **方程式の導出.** Goto-K. Ishii-Ogawa [4] は, 次の考察により, 方程式 (1) を導出した. 簡単のため, $k=0$ の場合のみを考える. BMO アルゴリズムでの 0-level set のなす界面の変化は初期値が不連続な熱方程式の解に対する平滑化効果と時間区間 h が十分に小さいことから, 界面の各点の接線方向の変化よりも, 界面の法線方向の変化の方が十分に大きいと考えることができる. そこで, 法線方向の成分を z とおくと, BMO アルゴリズムで熱方程式を解くことは

$$\begin{cases} \partial_t v_h - \Delta v_h = 0, \quad (t,x) \in (0,h] \times \mathbb{R}, \\ \quad v_h(0,z) = \chi_{C_0}(z) - \chi_{\mathbb{R}^n \setminus C_0}(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0, \\ -1, & z < 0 \end{cases} \end{cases}$$

とおきかえられる. v_h は初期値と熱核の合成積を考えることにより,

$$v_h(t,z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-r^2}\, dr, \quad \xi = \frac{z}{2\sqrt{t}}$$

と書くことができる. ここで, 補助関数 $U(\xi)$ を

$$U(\xi) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-r^2}\, dr$$

により定める. この補助関数 U を用いて, BMO アルゴリズムでの熱方程式の解 $v_h = v_h(t,x)$ を未知関数 $u_\varepsilon(t,x)$ を用いて

$$v_h(t,x) = U\left(\frac{u_\varepsilon(t,x)}{2\sqrt{t}}\right)$$

と展開できたとすると, $v_h(t,x)$ を熱方程式 (3) に代入することにより, u_ε が

$$\partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon + \frac{u_\varepsilon}{2t}(|\nabla u_\varepsilon|^2 - 1) = 0$$

を満たさねばならないことがわかる. $2t = \varepsilon$ とおくことにより, u_ε は方程式 (1) をみたすと見なす.

注意 1. 補助関数 U は Leoni [8] の論文に見られる. また, 補助関数を用いて, 解を展開する解析手法を Soner [10] が Allen-Cahn 方程式について考察している.

Goto-K. Ishii-Ogawa [4] は, (1) の $\varepsilon \downarrow 0$ とする, 特異極限問題の解 u が十分に滑らかであることを仮定すれば, BMO アルゴリズムが収束して, u は平均曲率流方程式の等高面方程式

$$\partial_t u - \Delta u + \frac{1}{|\nabla u|^2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

をみたすことを示した. このことから, 特異極限問題の解の正則性を調べることは興味ある問題であると考えられる. ここでは, 特異極限問題の解を考察するために, 初期値問題 (1) の解 u_ε の正則性が ε に応じてどのように変化するかを考察することにする.

2. 主定理

2.1. **Harnack 不等式.** 初期値問題 (1) の解 u_ε の正則性の ε に関する依存性を調べるために, 放物型方程式の正則性を求める標準的な方法の一つである, Harnack 不等式について述べる. 線形の熱方程式

$$\begin{cases} \partial_t w - \Delta w = 0, \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ \quad w(0,x) = w_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{4}$$

を考える. (4) の非負解 w に対し

$$\sup_{D_1} w \leq C_H \inf_{D_2} w \tag{5}$$

が成り立つ. ここで, D_1, D_2 は時間差のある放物型円筒である. この不等式 (5) を Harnack 不等式と呼ぶ. Harnack 不等式 (5) にあらわれる定数 C_H は n, D_1, D_2 に依存するが, この定数を Harnack 定数と呼ぶことにする.

線形の熱方程式に対して, Harnack 不等式から局所 Hölder 不等式が得られることはよく知られている (c.f. [9]). Harnack 不等式は Harnack 定数がより小さくとれればよりよい評価となるが, このとき, Hölder 連続の次数 α はより大きくとれることが知られている. より詳しくは, Harnack 定数には依らない定数 $C > 0$ が存在して

$$\alpha \geq -C \log\left(1 - \frac{1}{C_H}\right)$$

と評価できることが知られている. このことから Harnack 定数には解の正則性に関する情報を含んでいると考えることができるので, (1) の非負値解に対する Harnack 不等式を考察し, Harnack 定数の ε に対する依存性を調べて, 次の結果を得た.

2.2. 主定理.

定理 2 (Harnack 不等式)**.** u_ε を $(0, 8T) \times B_{4R}$ で非負な (1) の弱解とする. さらに, $M \geq 0$ が存在して $0 \leq u_\varepsilon \leq M$ をみたすとする. このとき

$$\sup_{(T,2T)\times B_R} u_\varepsilon \leq CM \exp\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right) \inf_{(7T,8T)\times B_R} u_\varepsilon \tag{6}$$

が成り立つ. ここで, 定数 C は n, T, R に依存し, 定数 θ は n, M に依存する.

定理の Harnack 不等式 (6) で Harnack 定数 $CM\exp(\frac{\theta}{\varepsilon})$ の C と θ は ε には依らないことに注意する. つまり Harnack 定数で $\exp(\frac{\theta}{\varepsilon})$ と ε をあらわに表示できたことが主結果である.

注意 3. 初期値 $u_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ に対し, 熱半群の L^p-L^q 評価を用いて縮小写像を構成することで (1) の局所解 $u \in C([0,T]\,; W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n))$ の存在が示せる. また, 最大値原理により, $u_0 \geq 0$ であれば $u \geq 0$ も示せる. このことから定理の非負かつ有界な解の存在がわかる.

主定理の証明の鍵となる命題を与える.

命題 4 (局所最大値原理)**.** u_ε を $(0, T) \times B_R$ 上で非負な (1) の弱解とする. このとき, 任意の $p > 1$, $0 \leq \tau < \tau' < T$, $0 < R' < R$, $0 < \varepsilon < 1$ に対して

$$\sup_{(\tau',T)\times B_{R'}} u_\varepsilon \leq C\varepsilon^{-\frac{n+2}{2p}} \|u_\varepsilon\|_{L^p((\tau,T)\times B_R)}, \tag{7}$$

が成り立つ. ただし, 定数 C は n, p, τ', τ, R, R' に依存する.

命題 4 は u_ε が

$$\partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon - \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} \leq 0$$

をみたすことを用いて, Moser [9] の方法を適用することによる. さらに

$$u_\varepsilon(t, x) = u_1\left(\frac{t}{\varepsilon}, \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

とスケール変換することで, $\varepsilon = 1$ の場合のみ考察すればよい. さらに, (7) の ε における指数が適切であることも従う.

命題 5 (弱 Harnack 不等式)**.** u_ε を $(0,T)\times B_R$ 上で非負な (1) の弱解とする．さらに, $M\geq 0$ が存在して $0\leq u_\varepsilon\leq M$ をみたすとする．このとき, 任意の $p\geq 1$, $0<\tau\leq \frac{1}{4}T$, $0<R'<R$ に対して

$$\|u_\varepsilon\|_{L^p((0,\tau)\times B_{R'})}\leq CM\exp\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right)\inf_{(3\tau,4\tau)\times B_{R'}}u_\varepsilon,$$

が成り立つ．ここで, 定数 C は n,p,τ,R',R にのみ依存し, 定数 θ は n,M,q にのみ依存する．

命題 4 と命題 5 を組みあわせることで定理 2 が従う．ここで,

$$\varepsilon^{-\frac{n+2}{2p}}=o\left(\exp\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right)\right)\quad \varepsilon\to 0$$

であるため, Harnack 定数にあらわれる ε のオーダーは $\exp(\frac{\theta}{\varepsilon})$ となる．

3. 命題 5 の証明の概略

以下, 非線形項の影響をうける命題 5 の証明の概略を述べる．以下, u_ε の下付きの ε を省略して u とかく．u が (1) の非負解ならば, $\frac{u}{\varepsilon}$ を移項して, u の非負性と有界性から

$$0\leq\frac{u}{\varepsilon}=\partial_t u-\Delta u+\frac{u}{\varepsilon}|\nabla u|^2\leq\partial_t u-\Delta u+\frac{M}{\varepsilon}|\nabla u|^2 \tag{8}$$

が成り立つ．この微分不等式において, 非線形項 $|\nabla u|^2$ が Δu とつりあうために問題を困難にする．この「つりあう」について説明する．

3.1. 臨界型方程式. 簡単のため

$$\partial_t u-\Delta u+\frac{M}{\varepsilon}|\nabla u|^2=0 \tag{9}$$

について考える．De Giorge-Nash-Moser の方法に習い, u の巾乗をかけて, 時空間で積分をする．ここでは, 弱 Harnack 不等式を導くため, u の負巾をかけるが, 簡単のために u^{-3} を (9) にかけて部分積分する．さらに u は十分に滑らかとし, 積分する領域については考えないことにし, 部分積分による境界積分は消えると仮定すると

$$\frac{1}{4}\iint\partial_t u^{-4}\,d\tau dx+3\iint u^{-4}|\nabla u|^2\,d\tau dx\leq\frac{M}{\varepsilon}\iint u^{-3}|\nabla u|^2\,d\tau dx$$

になる．ここで, $\partial_t u^{-4}$ と $u^{-4}|\nabla u|^2$ を含む積分をこれらの含まない積分で上から評価したいのだが, 非線形項があらわれる積分 $\frac{M}{\varepsilon}\iint u^{-3}|\nabla u|^2\,d\tau dx$ がこの手法を困難にする．困難の一つは非線形項 $|\nabla u|^2$ の指数が 2 であるため, Young の不等式を用いて Laplacian からあらわれる積分の項に吸収ができないことである．このように, Laplacian の項と非線形項がつりあう方程式を臨界型方程式と呼ぶ．もう一つの困難な点は, 臨界型方程式では, 非線形項の係数が小さければ, Laplacian の項に吸収させることができるのだが, 今, $\varepsilon\ll 1$ としているため, 非線形項の係数は大きい, すなわち, 非線形項を Laplacian の項に吸収させることができないことである．

3.2. Cole-Hopf変換. この問題の解決のために, 形式的に Cole-Hopf 変換 $v(t,x):=e^{-\frac{M}{\varepsilon}u(t,x)}$ を考える．この変換により, u が (9) をみたすとき, v は

$$\partial_t v-\Delta v=0,$$

すなわち, 線形の熱方程式をみたすことがわかる．これにより, 線形の手法を考えることができるが, 弱解を考えているために Cole-Hopf 変換を弱解の立場で正当化する必要がある．そこで, Trudinger [11] の方法を参考にして, 正当化を行う．

今, u が (8) をみたすとし, $\beta > 0$ に対して $\eta = \eta(t,x)$ を時空間の cut-off 関数として, (8) にかけて $(s,t) \times B_r$ 上で積分すると, Laplacian の項は部分積分することにより

$$
\begin{aligned}
(10) \quad 0 \le & \int_s^t \int_{B_r} \eta^2 u^{-\beta} e^{-\frac{M}{\varepsilon}u} \partial_t u \, d\tau dx + \int_s^t \int_{B_r} e^{-\frac{M}{\varepsilon}u} \nabla(\eta^2 u^{-\beta}) \cdot \nabla u \, d\tau dx \\
& + \int_s^t \int_{B_r} \eta^2 u^{-\beta} \nabla e^{-\frac{M}{\varepsilon}u} \cdot \nabla u \, d\tau dx + \frac{M}{\varepsilon} \int_s^t \int_{B_r} \eta^2 u^{-\beta} e^{-\frac{M}{\varepsilon}u} |\nabla u|^2 \, d\tau dx
\end{aligned}
$$

が得られる. ここで, $\nabla e^{-\frac{M}{\varepsilon}u} = -\frac{M}{\varepsilon} e^{-\frac{M}{\varepsilon}u} \nabla u$ に注意すると

$$
+ \int_s^t \int_{B_r} \eta^2 u^{-\beta} \nabla e^{-\frac{M}{\varepsilon}u} \cdot \nabla u \, d\tau dx + \frac{M}{\varepsilon} \int_s^t \int_{B_r} \eta^2 u^{-\beta} e^{-\frac{M}{\varepsilon}u} |\nabla u|^2 \, d\tau dx = 0
$$

となる. すなわち, test 関数に $e^{-\frac{M}{\varepsilon}u}$ をつけたことにより, 非線形項を処理することができ, Cole-Hopf 変換を弱解の立場で正当化することができる.

3.3. **DeGiorge-Nash-Moser の方法.** 簡単のため, (10) で $\beta = 3$ を考えることにする. cut-off 関数の微分の項を移項することにより,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4} \int_s^t \int_{B_r} \eta^2 e^{-\frac{M}{\varepsilon}u} \partial_t u^{-4} \, d\tau dx + 3 \int_s^t \int_{B_r} \eta^2 e^{-\frac{M}{\varepsilon}u} u^{-4} |\nabla u|^2 \, d\tau dx & \\
\le 2 \int_s^t \int_{B_r} \eta e^{-\frac{M}{\varepsilon}u} u^{-3} \nabla \eta \cdot \nabla u \, d\tau dx &
\end{aligned}
$$

が得られる. 右辺の積分に Young の不等式を用いて, ∇u を含む積分を左辺に吸収して $v = u^{-1}$ とおきかえると

$$
(11) \quad \int_s^t \int_{B_r} \eta^2 e^{-\frac{M}{\varepsilon}u} \partial_t v^2 \, d\tau dx + \int_s^t \int_{B_r} \eta^2 e^{-\frac{M}{\varepsilon}u} |\nabla v|^2 \, d\tau dx \le C \int_s^t \int_{B_r} |\nabla \eta|^2 v^2, d\tau dx
$$

が得られる. この不等式から Caccioppoli 評価

$$
\|\eta v\|_{L^\infty(s,t\,;L^2(B_r))} + \|\nabla(\eta v)\|_{L^2((s,t)\times B_r)} \le C e^{\frac{\theta}{\varepsilon}} \|v\|_{L^2((s,t)\times B_r)}
$$

が得られる.

注意 6. Caccioppoli 評価の右辺に $e^{\frac{\theta}{\varepsilon}}$ があらわれる理由は, 大雑把に述べると, u の有界性を用いて $e^{-\frac{M^2}{\varepsilon}} \le e^{-she\frac{M}{\varepsilon}u}$ を (11) の左辺の被積分関数に用いることによる. Caccioppoli 評価での θ は M について 2 乗のオーダーであることもわかる.

同様の計算を $\beta \ge 3$ で行うと $v := u^{-1}$, $q = \frac{\beta-1}{2} \ge 1$ とおくとき,

$$
\|\eta v^q\|_{L^\infty(s,t\,;L^2(B_r))} + \|\nabla(\eta v^q)\|_{L^2((s,t)\times B_r)} \le C e^{\frac{\theta}{\varepsilon}} \|v^q\|_{L^2((s,t)\times B_r)}
$$

が得られる. ここで, $n_* = 1 + \frac{2}{n}$ とおき, Ladyženskaja の不等式 (c.f. [7, pp.74])

$$
\|\eta v^q\|_{L^{2n_*}((s,t)\times B_r)} \le C \|\eta v^q\|_{L^\infty(s,t\,;L^2(B_r))} + \|\nabla(\eta v^q)\|_{L^2((s,t)\times B_r)}
$$

を用いると, 適当な放物型円筒 $Q' \subset Q$ を用いて

$$
(12) \qquad \|v\|_{L^{2n_* q}(Q')} \le C^{\frac{2}{q}} e^{\frac{\theta}{\varepsilon}\frac{2}{q}} \|v\|_{L^{2q}(Q)}
$$

と書ける. この不等式 (12) は積分指数の高いノルムを積分指数の低いノルムで上から評価しているので逆 Hölder 不等式と呼ぶ. $m \ge 0$ に対し, $q = q_m = n_*^m$ とおいて, (12) を繰り返し用いると, Q, Q' を適当にとりかえて

$$
(13) \qquad \|v\|_{L^{2n_*^{m+1}}(Q')} \le C^{\sum_m \frac{2}{q_m}} e^{\frac{\theta}{\varepsilon}\sum_m \frac{2}{q_m}} \|v\|_{L^2(Q)}
$$

となるので $m \to \infty$ とすると, 右辺の指数の級数は等比級数ゆえ, C, θ をとりかえて

$$\sup_{Q'} v \le Ce^{\frac{\theta}{\varepsilon}} \|v\|_{L^2(Q)}$$

が従う. $v = u^{-1}$ だったから

$$\|v\|_{L^2(Q)}^{-1} \le Ce^{\frac{\theta}{\varepsilon}} \inf_{Q'} u \tag{14}$$

を得る. 今までの議論は $0 < \beta < 1$ と $\beta > 1$ について同様に実行できる. さらに $\beta = 1$ に対して, 放物型 John-Nirenberg 評価を用いることにより, (14) の左辺を $\|u\|_{L^p(Q')}$ にかえることができ, 命題 5 を証明することができる.

注意 7. (12) を繰り返し用いるときに, cut-off 関数 η の微分が m に依存して大きくなるため, (13) の評価は正確ではない. しかし, $|\nabla \eta| \le C^m$ と評価できるため, 指数にあらわれる級数は $\sum_m \frac{m}{q_m}$ となり, 収束するので, $m \to \infty$ としても左辺が収束することが示される.

References

[1] G. Barles and C. Georgelin, *A simple proof of convergence for an approximation scheme for computing motions by mean curvature*, SIAM J. Numer. Anal., **32** (1995), 484–500.

[2] J. Bence, B. Merriman and S. Osher, *Diffusion generated motion by mean curvature*, in "Computational Crystal Growers Workshop", Amer. Math. Soc., 1992, 73–83.

[3] L. C. Evans, *Convergence of an algorithm for mean curvature motion*, Indiana Univ. Math. J., **42** (1993), 533–557.

[4] Y. Goto, K. Ishii and T. Ogawa, *Method of the distance function to the Bence-Merriman-Osher algorithm for motion by mean curvature*, Commun. Pure Appl. Anal., **4** (2005), 311–339.

[5] H. Ishii, *A Generalization of the Bence-Merriman and Osher algorithm for motion by mean curvature*, "Curvature flows and related topics," GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl. **5**, Gakkōtosho, 1995, 111–127.

[6] H. Ishii and K. Ishii, *An approximation scheme for motion by mean curvature with right-angle boundary condition*, SIAM J. Math. Anal., **33** (2001), 369–389.

[7] Ladyženskaja, O. A. and Solonnikov and V. A. and Ural'ceva, N. N., "*Linear and quasilinear equations of parabolic type*," Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1967.

[8] F. Leoni, *Convergence of an approximation scheme for curvature-dependent motions of sets*, SIAM J. Numer. Anal., **39**(2001), 1115–1131.

[9] J. Moser, *A Harnack inequality for parabolic differential equations*, Comm. Pure. Appl. Math., **17** (1964), 101–134.

[10] H. M. Soner, *Ginzburg-Landau equation and motion by mean curvature. I. Convergence*, J. Geom. Anal., **7**(1997), 437–475.

[11] N. S. Trudinger, *Pointwise estimates and quasilinear parabolic equations*, Comm. Pure Appl. Math., **21** (1968), 205–226.

E-mail address: sa5m16@math.tohoku.ac.jp